

Карвацький А. Я., Пулінець І. В., Шилович І. Л // Восточно-Европейский журнал передових технологій. — 2012. - №1/4(55). — С.33 — 37. 3. Magnussen B. F. On mathematical models of turbulent combustion with special emphasis on soot formation and combustion [Текст] / B. F. Magnussen, B. H. Hjertager // In 16th Symp. (Int'l.) on Combustion. The Combustion Institute. - Pittsburgh, 1976 - P. 719-727 4. Аленькин Д. Я. Пути повышения экологических характеристик процесса графитации / Аленькин Д. Я., Распопов М. Г., Власова Т. Б. // Технологические процессы и оборудование электродного производства: Сб. науч. тр. / НИИграфит, ГОСНИИЭП. – М., 1989. – 77-81с.

Надійшла до редколегії 20.12.2012

УДК 66.094.3

**Зниження концентрації со в процесі випалу графітових заготовок/ Карвацький А. Я. Шилович І. Л., Крутоус Л. В., Кутузов С. В. // Вісник НТУ «ХП». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХП», – 2012. - № 68 (974). – С. 201-205. – Бібліогр.: 4 назв.**

Проведены расчеты температурных полей камер печи с заготовками для определения влияния физического барьера на количество моно оксида углерода, образующегося в процессе обжига графитовых заготовок.

**Ключевые слова:** температурные поля, моно оксид углерода, обжиг графитовых заготовок, шамотный кирпич.

It was done calculations of temperature fields of cameras of the furnace with workpieces for definition of influence of a physical barrier on amount of mono oxide of the carbon which is formed in the process of graphite workpieces annealing are carried out. names.

**Keywords:** temperature fields, mono oxide of carbon, annealing of graphite workpieces, firebrick.

УДК 536.24

**Ю. О. КОБРИНОВИЧ**, аспірант, ИПМаш НАН України, Харків

### **ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ТЕПЛООБМЕНОМ**

Математические модели построены на базе совместного применения регионально-структурного или структурного методов, S-функций и разностных схем высокого порядка точности.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, высокоскоростные тепловые процессы, структурно-разностные модели.

**Введение.** Решение задач теплопроводности с нестационарными граничными условиями для областей сложной формы в случае высокоскоростных тепловых процессов встречает ряд трудностей принципиального характера и у численных методов, и у аналитических методов.

При решении нестационарных задач теплопроводности с помощью численных методов, усилия аппроксимации направлены одновременно на приближенное удовлетворение дифференциальному уравнению, осциллирующим граничным условиям и осциллирующим внутренним источникам (стокам) энергии. Результирующая погрешность для задач с высокими скоростями теплообмена оказывается выше предельно допустимой, что ограничивает область применения численных методов для разностных схем второго порядка точности задачами теплопроводности с медленно протекающими процессами.

Получить точные решения классическими аналитическими методами можно получить только для отдельных задач теплопроводности в случаях когда области исследования имеют каноническую форму.

Актуальной оказывается разработка численно-аналитических подходов к задачам теплопроводности с высокоскоростными нестационарными граничными условиями, которые позволяли бы решать соответствующие задачи с высокой степенью точности, и не были ограничены ни по градиенту температур по времени и координатам, ни по скорости и

© Ю. О. КОБРИНОВИЧ, 2012

характеру изменения нестационарных граничных условий.

**Анализ публикаций.** При решении нестационарных задач теплопроводности для областей сложной формы, используются следующие методы, для которых характерны нижеперечисленные особенности:

- метод конечных разностей [1-3] – необходимость аппроксимации границ, не совпадающих с линиями координат;
- метод конечных элементов [4,5] – нуждается в усовершенствовании для решения нелинейных нестационарных задач математической физики;
- вариационные методы [6 - 8] – ожидается сходимость по энергии к обобщенному решению соответствующего уравнения для всякой последовательности, минимизирующей функционал энергии, только при условии, что оператор для уравнения задачи положительно определен.

В развитии численно-аналитических методов для нестационарных задач, трудность заключалась в построении базисных функций, точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям.

**Цель работы.** Анализ качественных особенностей построения структурно-разностных моделей, точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям в каждый момент времени, точно учитывающих геометрию исследуемой области и показывающих высокую точность при решении задач теплопроводности с нестационарными граничными условиями, в том числе – с быстропротекающими осциллирующими условиями теплообмена.

**Основные материалы исследования.** Структурно-разностная модель строится на базе совместного применения аналитических или регионально-аналитических консервативных структур решения [9], S-функций [10] и разностных схем повышенного порядка точности [11].

**Построение структур решения.** Структуру решения задачи теплопроводности с нестационарными граничными условиями представим в виде (1):

$$T(x, y, Fo) = \Phi_0(x, y, Fo) + \sum_{k,l} C_{k,l} \chi_{k,l}(x, y, Fo) \quad (1)$$

где  $C_{k,l}$  – неизвестные коэффициенты;  $\Phi_0(x, y, Fo)$  функция, точно удовлетворяющая нестационарным неоднородным граничным условиям,  $\chi_{k,l}(x, y, Fo)$  – базисные функции, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям.

Рассмотрим задачу теплопроводности для случая, когда поперечное сечение конструктивного элемента имеет вид двухсвязной области сложной формы с кусочно-гладкой границей, на которой заданы нестационарные граничные условия (2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial Fo} &= \Delta T(x, y, Fo) + F(x, y, Fo); T(x, y, 0) = \theta(x, y), \\ \left( \pm \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial x} + Bi_1(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{\Gamma_1} &= Bi_1(Fo)T_{cp1}(x, y, Fo); \\ \left( \pm \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial y} + Bi_1(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{\Gamma_1} &= Bi_1(Fo)T_{cp1}(x, y, Fo); \\ \left( \pm \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial x} + Bi_2(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{\Gamma_2} &= Bi_2(Fo)T_{cp2}(x, y, Fo); \\ \left( \pm \frac{\partial T(x, y, Fo)}{\partial y} + Bi_2(Fo)T(x, y, Fo) \right) \Big|_{\Gamma_2} &= Bi_2(Fo)T_{cp2}(x, y, Fo); \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ F(x, y, Fo) &= \frac{\partial T_m(x, y, Fo)}{\partial Fo} - \left( \frac{\partial^2 T_m(x, y, Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m(x, y, Fo)}{\partial y^2} \right); x, y \in \Omega; 0 < Fo < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

где  $T(x, y, Fo)$  – температура поперечного сечения,  $\theta(x, y)$  – начальная температура,  $T_{cp1}(x, y, Fo)$  и  $T_{cp2}(x, y, Fo)$  – температура среды для наружной ( $\Gamma_1$ ) и для внутренней ( $\Gamma_2$ ) границы призмы соответственно,  $Bi_1(Fo)$  и  $Bi_2(Fo)$  – коэффициенты Био для

наружной и внутренней границы призмы,  $Fo$  - критерий Фурье,  $T_m(x, y, Fo)$  - точное решение.

Базисные функции  $\chi_{k,l}(x, y, Fo)$ , точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям построим в виде (3):

$$\chi_{k,l}(x, y, Fo) = \begin{cases} \chi_{k,l_1}(x, y, Fo), & x, y \in \Omega_1 \\ \chi_{k,l_2}(x, y, Fo), & x, y \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\chi_{k,l_1} = P_k P_l - W_1 \left( \frac{\partial P_k}{\partial x} P_l \frac{\partial W_1}{\partial x} + P_k \frac{\partial P_l}{\partial x} \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) + W_1 Bi_1 P_k P_l \exp(-p_1 W_1^2);$$

$$\chi_{k,l_2} = P_k P_l - W_2 \left( \frac{\partial P_k}{\partial x} P_l \frac{\partial W_1}{\partial x} + P_k \frac{\partial P_l}{\partial x} \frac{\partial W_2}{\partial x} \right) + W_2 Bi_2 P_k P_l \exp(-p_2 W_2^2);$$

где  $p_1 = \text{const}$ ,  $p_2 = \text{const}$ ,  $\Gamma_{12}(x, y)$  - граница раздела двух регионов,  $P_k(x), P_l(y)$  - нормированные полиномы Чебышева, с помощью S-функций строятся уравнения границ  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  -  $W_1(x, y)|_{\Gamma_1} = 0$  и  $W_2(x, y)|_{\Gamma_2} = 0$  [12].

Функция  $\Phi_0(x, y, Fo)$ , точно удовлетворяющая нестационарным неоднородным граничным условиям (4):

$$\Phi_0(x, y, Fo) = \begin{cases} T_{cp1}(x, y, Fo) \exp(-p_1 W_1^2(x, y)), & x, y \in \Omega_1 \\ T_{cp2}(x, y, Fo) \exp(-p_2 W_2^2(x, y)), & x, y \in \Omega_2 \end{cases} \quad (4)$$

Как видно из структур решения (3) – (4), температура среды на границах области и критерии Био для двух границ областей могут иметь любую аналитическую зависимость. Благодаря модульной конструкции структуры решения (1) граничные условия в структурно-разностных и региональных структурно-разностных моделях удовлетворяются точно.

**Особенности учета геометрических параметров в математической модели.** В структуру решения (3) входят функции, которые содержат информацию геометрического характера об исследуемых областях. В уравнениях  $W_1(x, y)|_{\Gamma_1} = 0$  и  $W_2(x, y)|_{\Gamma_2} = 0$  функции строятся с помощью S-функций соответствующего класса [10], и содержат тейлоровские опорные функции, позволяющие управлять образованием форм весовых функций и позволяют строить консервативные структуры решения [11,12]. Опорные тейлоровские функции обеспечивают требуемую форму функции  $W(x, y)$  и соблюдение кривизны границы области. Функция  $W(x, y)$ , описывающая границу квадратной призмы стороной 1 (5), ее тейлоровские функции для функции  $f(x)$  (6) (для функции  $f(y)$  аналогично):

$$W(x, y) = \tilde{f}_1(x) \wedge \tilde{f}_2(y) \quad (5)$$

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \cdot \left( 1 + \alpha_1 \cdot f(x) + \sum_n \alpha_n \cdot f^n(x) \right), n = 2 \dots m; \\ f''_{xx}(x) \cdot (1 + \alpha_1 \cdot f(x)) = 0; \\ \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x + \Delta x) = \tilde{f}(x + 2\Delta x) = \dots = \tilde{f}(x + l \cdot \Delta x); \end{cases} \quad (6)$$

где  $f_1(x) = (1 - x^2)$ ,  $f_2(y) = (1 - y^2)$ , параметр  $\alpha_1$  определяется из условия кривизны границы области, параметры  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  оптимизируют форму функции  $W(x, y)$ .

**Разностные схемы повышенного порядка точности.** Рассмотрены различные разностные схемы, которые можно использовать для построения дискретной модели [13] и для них определено спектральное условие устойчивости, удовлетворяющие необходимому

условию устойчивости Неймана. В таблице 1 показано максимально допустимое значение параметра  $r$  (соотношение шага по времени к квадрату шага по координатам) для разностных схем разного порядка точности. Оптимальная по параметру  $r$  разностная схема трехслойная по времени и девятиточечная по координатам типа «ящик». Как показала серия вычислительных экспериментов [13-14], разностные схемы №1 – 4 в случае их применения к задачам теплопроводности с нестационарными граничными условиями с высокоскоростным теплообменом, показывают неудовлетворительную точность решения.

Таблица 1 - Максимальные значения параметра  $r$ , для разностных схем

№	Разностная схема по времени	Разностная схема по координатам	$r$
1	2-х слойная	5-точечная	0,25
2	2-х слойная	9-точечная «большой крест»	0,255
3	2-х слойная	9-точечная «ящик»	0,444
4	3-х слойная	5-точечная	0,5
5	3-х слойная	9-точечная «большой крест»	0,511
6	3-х слойная	9-точечная «ящик»	0,889

**Выводы.** Построение структурно-разностных математических моделей для высокоскоростных тепловых процессов с нестационарными граничными условиями, включает в себя:

- построение консервативных структур решения на базе структурного или регионально-структурного методов, имеющих модульное строение и точно учитывающих граничные условия

- построение функций  $W(x, y)|_{\Gamma} = 0$  на базе S-функций, в асимптотическом приближении заданной степени точности описывающих границы области поперечного сечения конструктивного элемента, в том числе информацию об их кривизне,

- определение необходимого условия устойчивости Неймана для выработки рекомендаций при проведении математического моделирования высокоскоростных тепловых процессов.

**Список литературы:** 1. Годунов С. К. Разностные схемы. Введение в теорию [Текст] / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. – 400 с. 2. Самарский А. А. Теория разностных схем [Текст] / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с. 3. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач [Текст]: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 421 с. 4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике [Текст]: Пер. с англ. под ред. Б. Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 542 с. 5. Деклу Ж. Метод конечных элементов [Текст]: Пер. с франц. – М.: Мир, 1976 – 96 с. 6. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1977. – 455 с. 7. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 558 с. 8. Шехтер Р. С. Вариационный метод в инженерных расчетах [Текст] / Р. С. Шехтер. – М.: Мир, 1971. – 291 с. 9. Слесаренко А. П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях [Текст] / А. П. Слесаренко // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5. №4 – С. 72-80. 10. Слесаренко А. П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм [Текст] / А. П. Слесаренко // Восточно-Европейский Журнал Передовых Технологий. - 2012. – Т1, № 4(55). - С. 4—10. – Режим доступа : URL : <http://journals.urau.ru/eejet/article/view/3310>. 11. Слесаренко, А. П. Математическое моделирование высокоскоростных тепловых процессов при точном учете нестационарных осциллирующих условий теплообмена на поверхности конструктивных элементов [Текст] / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобриневич // Вісник Кременчуцького нац. університета. – 2011. - Т.5(70) – С.35-38 12. Кобриневич, Ю. О. Консервативные структуры решения в математическом моделировании высокоскоростного осциллирующего теплообмена [Текст] / Ю. О. Кобриневич // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Сб. тезисов докладов междунар. конф. - Харьков: "Апостроф", 2012. – С.58 13. Слесаренко, А. П. Структурно-разностные модели, точно учитывающие осциллирующий во времени нестационарный теплообмен на поверхности ISSN 2079.5459. Вісник НТУ «ХПИ». 2013. №68(974) 208

конструктивных элементов [Текст] / А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович // Доповіді НАН України . – 2012. - №1. – С.82-88. **14.** Слесаренко, А. П. Об одном численно-аналитическом подходе к математическому моделированию нестационарных процессов теплопроводности с большой скоростью нагрева [Текст] / А. П. Слесаренко, Кобринович, Ю. О. // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип.16. – Харків: ХНУ, 2011. - №960. – С.159 – 168.

*Надійшла до редколегії 20.12.2012*

УДК 536.24

**Построение структурно-разностных моделей высокоскоростных тепловых процессов с осциллирующим теплообменом / Ю. О. Кобринович**// Вісник НТУ «ХП». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХП», – 2012. - № 68 (974). – С. 205-209. – Бібліогр.: 14 назв.

Математичні моделі базуються на сумісному використанні регіонально-структурного або структурного методів, S-функцій та різницевих схем високого порядку точності .

**Ключові слова:** математичне моделювання, високошвидкісні теплові процеси, структурно-різницева моделі.

Mathematical models are based on the combined use of regional-structural or structural methods, S-functions and difference schemes of high order accuracy.

**Keywords:** mathematical modeling, high speed heat processes, structural-difference model.