

**Ю. В. МИХЛИН**, д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор НТУ «ХПИ»;  
**С. Н. РЕШЕТНИКОВА**, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»;  
**Е. Б. АХИЕЗЕР**, канд. техн. наук, доцент, доцент НТУ «ХПИ»

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ШАХТНЫМИ ПОДЪЕМНЫМИ УСТАНОВКАМИ

У статті розглянуті питання побудови оптимальних діаграм швидкості руху шахтних підйомних установок. На основі принципу оптимального управління Понтрягіна розв'язується задача мінімізації витрачання енергії. Крім того, виконано розрахунки оптимальних по швидкості діаграм руху підйомних установок з урахуванням обмежень прискорення та ривку, що забезпечує зменшення коливань підйомного сосуду.

В статье рассмотрены вопросы построения оптимальных диаграм скорости движения шахтных подъемных установок. На основе принципа оптимального управления Понтрягина решается задача минимизации расхода энергии. Кроме того, сделан расчет оптимальных по быстрдействию диаграм скорости движения подъемных установок с учетом ограничения ускорения и рывка, что обеспечивает уменьшение колебаний подъемного сосуда при движении.

Problems of construction of optimal speed diagrams construction for the hoisting plant motion are considered. A problem of minimization of the motion energy on the basis of the Pontriagin principle is solved. Besides, it is realized a determination of optimal by speed diagrams of the hoisting plants taking into account a limitation by acceleration and jerk to reduce the skip vertical oscillations.

**Введение. Проблема оптимизации циклов движения подъемных машин.** Задачи оптимизации цикла спуска/подъема шахтных подъемных установок стали актуальными несколько десятилетий назад и продолжают быть актуальными в настоящее время. К числу первых работ в этой области можно отнести статьи [1–3]. При расчете диаграм скорости оптимизация проводилась по критериям минимума времени цикла и минимума расхода энергии. Помимо проблемы оптимизации важнейшее значение в условиях значительного износа оборудования имеет проблема обеспечения безопасности, поскольку вертикальные рывки упругого каната и возникающие при этом вертикальные колебания подъемного сосуда приводят к возникновению горизонтальных колебаний и ударов предохранительных башмаков по изношенным проводникам [4, 5]. Проблема ограничения вертикальных колебаний решается введением ограничений на величины максимальной скорости, максимальных ускорения и рывка. В настоящей работе рассматривается как задача минимизации расхода энергии, которая решается на основе принципа максимума Понтрягина [6], так и задача оптимального по времени движения с учетом указанных ограничений. Оптимальные диаграммы скорости получены для реальных параметров подъемных установок.

**1. Оптимальный по расходу энергии режим движения неуравновешенной подъемной установки.** Рассмотрим задачу определения оптимального режима управления неуравновешенной подъемной установкой, обеспечивающего минимальное среднеквадратическое усилие на валу барабана, т.е. минимальные энергетические потери в якоре двигателя.

Простейшее уравнение динамики неуравновешенного подъема имеет вид:

$$\ddot{x} = v, \quad \dot{x} = \frac{2px}{m} + \frac{F}{m} - \frac{kQ + pH}{m}, \quad (1)$$

где  $x$  – пройденный путь,  $v$  – скорость движения,  $m$  – масса установки,  $F$  – управляющее усилие на ободе барабана подъемной машины,  $k$  – коэффициент шахтных сопротивлений,  $Q$  – вес полезного груза,  $p$  – вес погонного метра каната,  $H$  – полная высота подъема.

Требуется найти управление  $F(x)$ , реализующее минимум функционала  $L = \int_0^T F^2 dt$  (время  $T$  здесь не фиксировано) и переводящего систему из положения  $x = v = 0$  в положение  $x = H$ ,  $v = 0$ .

В соответствии с принципом максимума Понтрягина [6] вводятся вспомогательные так называемые сопряженные переменные  $y_1$  (соответствует переменной  $x$ ),  $y_2$  (соответствует переменной  $v$ ) и  $y_0$  (соответствует функционалу  $L$ ) и строится функция Гамильтона

$$\overset{\square}{H} = y_1 v + y_2 \frac{F + 2px - kQ - pH}{m} + y_0 F^2$$

В результате получаем так называемую гамильтонову систему. Уравнения, описывающие изменение по времени всех переменных, в том числе и функционала  $L$ , и включающие в себя уравнения движения, имеют вид (2) и (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = -\frac{\partial \overset{\square}{H}}{\partial x} = -r^2 y_2, \\ \dot{y}_2 = -\frac{\partial \overset{\square}{H}}{\partial v} = -y_1, \\ \dot{y}_0 = -\frac{\partial \overset{\square}{H}}{\partial L} = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = \frac{\partial H}{\partial y_1} = v, \\ \mathcal{L} = \frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{1}{m}(F + 2px - kQ - pH), \\ \mathcal{L} = \frac{\partial H}{\partial y_0} = F^2, \end{array} \right. \quad (3)$$

где  $r^2 = \frac{2p}{m}$ ,  $y_0 = c_0 = const$ , что следует из третьего уравнения системы (2).

Введем обозначения  $y_1 = \frac{Y_1}{c_0}$ ,  $y_2 = \frac{Y_2}{c_0}$ . Из первых двух уравнений

$$\frac{dy_1}{dy_2} = r^2 \frac{y_1}{y_2}, \text{ так что } y_1 = \pm \sqrt{h + r^2 y_2^2} \quad (h = const).$$

Условие оптимальности (по Понтрягину) имеет вид  $\frac{\partial H}{\partial F} = 0$  [6], откуда

получим  $y_2 = -2mF$ ;  $y_1 = \pm \sqrt{h + 8mpF^2}$ . Добавим условие  $H = 0$ , откуда

$$v = \frac{2F(kQ + pH - 2px) - F^2}{m\sqrt{h + 8mpF^2}}, \quad (4)$$

Отсюда при  $v = 0$  имеем  $F = 2(kQ + pH)$ ,  $x = 0$  (начало движения) и  $F = 0$ ,  $x = H$  (окончание движения). Так как в середине подъема в некоторой точке ускорение  $\frac{dv}{dt} = 0$ , причем в этом случае  $F = kQ + pH - 2px$ , а скорость  $v > 0$ , то перед корнем в выражении для скорости следует выбрать знак «+», а это отвечает знаку «-» в выражении для  $y_1$ . Подставляя полученные выражения во второе уравнение (2) и учитывая равенство  $\mathcal{L} = \frac{dF}{dt} v$ , получим уравнение

$$-\frac{dF}{dx} 2mF [2(kQ + pH - 2px) - F] = h + 8mpF^2$$

или

$$\frac{dx}{dF} + \frac{2mF}{h + 8mpF^2} [2(kQ + pH) - F - 4px] = 0. \quad (5)$$

Примем, что  $h > 0$ , тогда решение этого уравнения имеет вид:

$$\frac{x}{H} = c \frac{\sqrt{2}}{g} \sqrt{1 + g^2 u^2} + \frac{1+d}{2d} \left[ 1 - u + \frac{\sqrt{1 + g^2 u^2}}{g} \ln \left( \frac{\sqrt{1 + g^2 u^2} + gu}{\sqrt{1 + g^2} + g} \right) \right],$$

где  $d = \frac{pH}{kQ}$ ,  $g^2 = \frac{32mp(kQ + pH)^2}{h}$ ,  $u = \frac{F}{2(kQ + pH)}$ ,  $g$  и  $c$  – произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий в начале и конце подъема. При  $x = 0$  ( $u = 1$ ), получаем  $c = 0$ . При  $x = H$  ( $u = 0$ ), получаем

$$g \frac{1-d}{1+d} = \ln(\sqrt{1+g^2} + g) \text{ или } \frac{1-d}{1+d} = \frac{\text{Arsh}g}{g}.$$

Итак, окончательно оптимальное решение имеет вид:

$$x = H \frac{1+d}{2d} \left[ 1 - u + \frac{\sqrt{1 + g^2 u^2}}{g} (\text{Arsh}gu - \text{Arsh}g) \right]. \quad (6)$$

Нахождение решения в форме (5) позволяет построить как оптимальное управление в зависимости от пройденного пути или скорости (эта зависимость показана на рисунке 1), так и зависимость скорости подъема от времени. При расчете было принято, что

$$k = 1.15; Q = 19.6 \cdot 10^4 \text{ H}; r = 15.8 \frac{\text{кг}}{\text{м}}; m = 21848.21 \text{ кг}; H = 869 \text{ м}.$$

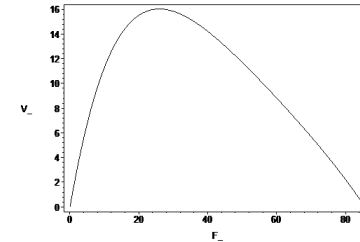


Рис.1 – Зависимость управляющей силы от скорости движения

**2. Минимизация времени подъема/спуска с учетом ограничений на скорость, ускорение и рывок при движении.** Минимизация времени подъема/спуска достигается реализацией движения с максимально

допустимыми ускорениями и скоростями. Заметим, что на начальном и конечном участках, при движении в направляющих кривых, допустимые значения ускорения и скорости являются значительно меньшими, чем при движении в стволе шахты. Выделим семь основных последовательных участков оптимального движения: участок разгона при движении поднимающегося и опускающегося сосудов в направляющих кривых; участок движения с максимальной допустимой скоростью в направляющих кривых; разгон с максимально допустимым ускорением вплоть до достижения максимально допустимой скорости в стволе шахты; движение с максимальной допустимой скоростью в стволе шахты; движение с максимально допустимым торможением вплоть до подхода к разгрузочным кривым; движение с максимальной допустимой скоростью в разгрузочных кривых; торможение в направляющих кривых вплоть до точки полной остановки обоих подъемных сосудов.

Однако, в точках перехода с одного участка на другой скачки ускорения и рывка (определяется как производная от ускорения) приводят к появлению больших динамических нагрузок и возникновению значительных вертикальных колебаний в канате. Это приводит к необходимости введения дополнительных переходных (сглаживающих) участков, которые позволяют существенно уменьшить эти скачки. С учетом последнего замечания окончательно вводятся следующие участки на оптимальной диаграмме движения: 1) разгон в направляющих кривых; 2) движение с максимальной скоростью в направляющих кривых вплоть до выхода из направляющих кривых опускающегося сосуда; 3) сглаживающий участок – переход к движению с максимально допустимым ускорением; 4) разгон с максимально допустимым ускорением; 5) сглаживающий участок – переход к движению с максимальной допустимой скоростью; 6) движение с максимальной допустимой скоростью; 7) сглаживающий участок – переход к движению с максимально допустимым торможением; 8) движение с максимально допустимым торможением вплоть до входа в направляющие кривые поднимающегося сосуда; 9) сглаживающий участок – переход к движению с максимальной допустимой скоростью в направляющих кривых; 10) движение с максимальной допустимой скоростью в направляющих кривых; 11) торможение в направляющих кривых вплоть до точки полной остановки подъемного сосуда.

Для того, чтобы предотвратить возникновение значительных динамических усилий в канате, вводятся нулевых условий для рывка в начале и конце каждого участка. Кроме того, должна быть обеспечена непрерывность функций пути, скорости, ускорения и рывка при переходе с одного участка на другой.

Условия:

$$1) \text{ в начале 1-го участка } x(0) = v(0) = a(0) = r(0) = 0;$$

- 2) в конце 1-го участка и в начале 2-го  
 $x(t_1) = x_1; v(t_1) = v_{1\max}; a(t_1) = r(t_1) = 0;$
- 3) в конце 2-го участка и в начале 3-го  
 $x(t_2) = x_2; v(t_2) = v_{1\max}; a(t_2) = r(t_2) = 0;$
- 4) в конце 3-го участка и в начале 4-го  
 $x(t_3) = x_3; v(t_3) = v_3; a(t_3) = a_{\max}; r(t_3) = 0;$
- 5) в конце 4-го участка и в начале 5-го  
 $x(t_4) = x_4; v(t_4) = v_4; a(t_4) = a_{\max}; r(t_4) = 0;$
- 6) в конце 5-го участка и в начале 6-го  
 $x(t_5) = x_5; v(t_5) = v_{\max}; a(t_5) = r(t_5) = 0;$
- 7) в конце 6-го участка и в начале 7-го  
 $x(t_6) = x_6; v(t_6) = v_{\max}; a(t_6) = r(t_6) = 0;$
- 8) в конце 7-го участка и в начале 8-го  
 $x(t_7) = x_7; v(t_7) = v_7; a(t_7) = -a_{\max}; r(t_7) = 0;$
- 9) в конце 8-го участка и в начале 9-го  
 $x(t_8) = x_8; v(t_8) = v_8; a(t_8) = -a_{\max}; r(t_8) = 0;$
- 10) в конце 9-го участка и в начале 10-го  
 $x(t_9) = x_9; v(t_9) = v_{2\max}; a(t_9) = r(t_9) = 0;$
- 11) в конце 10-го участка и в начале 11-го  
 $x(t_{10}) = x_{10}; v(t_{10}) = v_{2\max}; a(t_{10}) = r(t_{10}) = 0;$
- 12) в конце 11-го участка  
 $x(t_{11}) = H; v(t_{11}) = a(t_{11}) = r(t_{11}) = 0.$

Здесь и далее  $r$  – это рывок (то есть, производная от ускорения);  $t_i$  – время движения на участке с номером  $i$ ;  $x_i$  и  $v_i$  – соответственно пройденные путь и скорость в конце участка с номером  $i$ ;  $H$  – это полная длина спуска/подъема;  $v_{\max}$  – это максимально допустимая скорость движения сосуда;  $v_{1\max}$  – максимально допустимая скорость движения сосуда в направляющих кривых при разгоне;  $v_{2\max}$  – максимально допустимая скорость движения в направляющих кривых при торможении;  $a_{\max}$  – максимально допустимое ускорение движения;  $-a_{1\max}$  – максимально допустимое значение торможения. Величины  $x_i, t_i$  определяются в ходе решения задачи, однако  $x_2$  – это известное расстояние, которое должен пройти сосуд в направляющих кривых при разгоне; кроме того, величина  $(H - x_9)$  – это известный путь движения в направляющих кривых при торможении.

Для построения оптимальной диаграммы и удовлетворения приведенным выше условиям задаем следующие выражения зависимости пути от времени на соответствующих участках движения:

- 1)  $x = a_4 t^4 + a_5 t^5 + a_6 t^6$ ;
- 2)  $x = x_1 + v_{1\max} t$ ;
- 3)  $x = x_2 + v_{1\max} t + b_4 t^4 + b_5 t^5$ ;
- 4)  $x = x_3 + v_3 t + \frac{a_{\max} t^2}{2}$ ;
- 5)  $x = x_4 + v_4 t + \frac{a_{\max} t^2}{2} + c_4 t^4 + c_5 t^5$ ;
- 6)  $x = x_5 + v_{\max} t$ ;
- 7)  $x = x_6 + v_{\max} t + d_4 t^4 + d_5 t^5$ ;
- 8)  $x = x_7 + v_7 t - \frac{a_{1\max} t^2}{2}$ ;
- 9)  $x = x_8 + v_8 t - \frac{a_{1\max} t^2}{2} + e_4 t^4 + e_5 t^5$ ;
- 10)  $x = x_9 + v_{2\max} t$ ;
- 11)  $x = x_{10} + v_{2\max} t + f_4 t^4 + f_5 t^5 + f_6 t^6$ .

Все коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ , которые присутствуют в выражениях для пути, определяются в ходе решения задачи при удовлетворении приведенным выше условиям в начале и конце каждого участка движения.

Для числового расчета задавались следующие параметры движения:

$$H = 942\text{ м}; x_2 = 5\text{ м}; H - x_9 = 11.5\text{ м}; v_{\max} = 11 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_{1\max} = 0.6 \frac{\text{м}}{\text{с}}; v_{2\max} = 0.55 \frac{\text{м}}{\text{с}}; a_{\max} = 0.65 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; a_{1\max} = 0.65 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Заданные параметры отвечают реальным ограничениям, которые накладываются на процесс движения техническими условиями подъема в стволе.

Далее полученное оптимальное решение сравнивается с реальными диаграммами подъема, которые реализуются на Запорожском железорудном комбинате, где установлены машинами типа БЦК с переменным радиусом навивки, эксплуатирующиеся в зоне сдвижения горных пород [7]. В настоящее время по техническим условиям скорость подъема ограничена диапазоном  $10.5 - 11 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

На рисунках 2–4 приведены реальные диаграммы линейной скорости, ускорения, рывка и упругих усилий в канате. Видно, что при подъеме резкие изменения скорости и ускорения возбуждают значительные вертикальные колебания сосуда на упругом канате практически на всем цикле подъема.

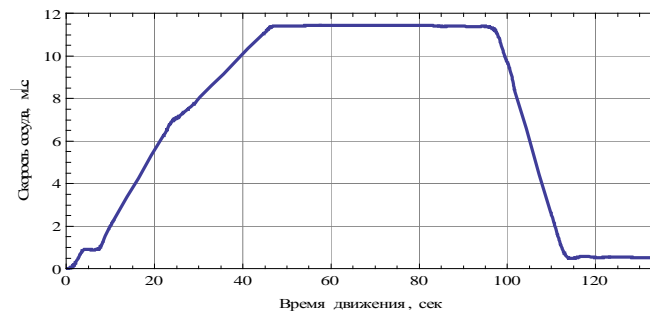


Рис.2

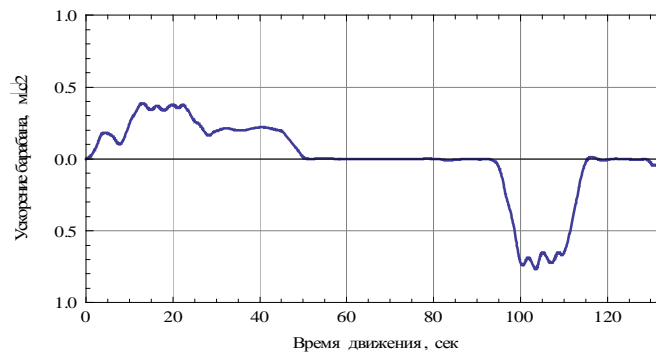


Рис.3

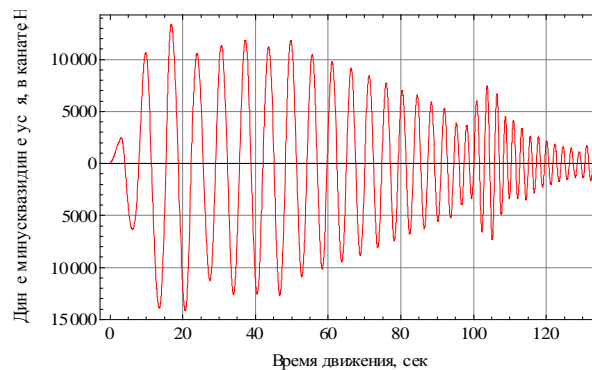


Рис.4

На рисунках 5–8 приведены оптимальные диаграммы скорости, ускорения, рывка, а также динамических нагрузок в канате.

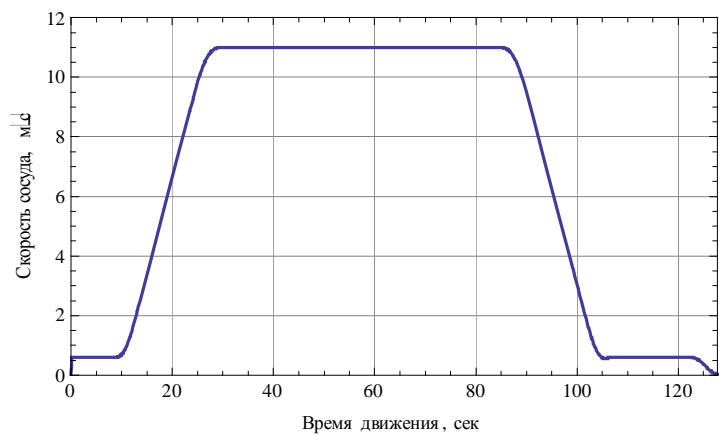


Рис. 5

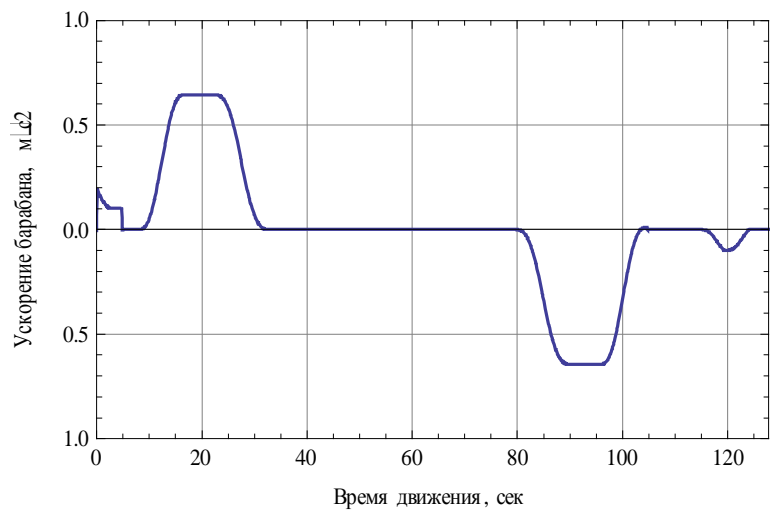


Рис. 6

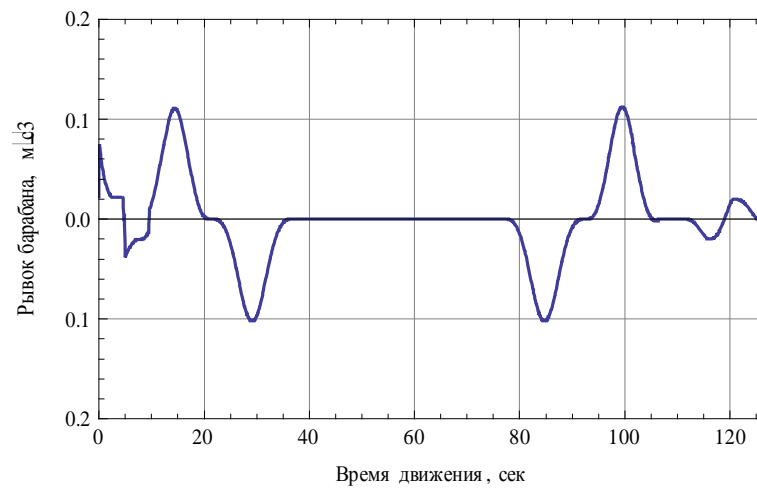


Рис. 7

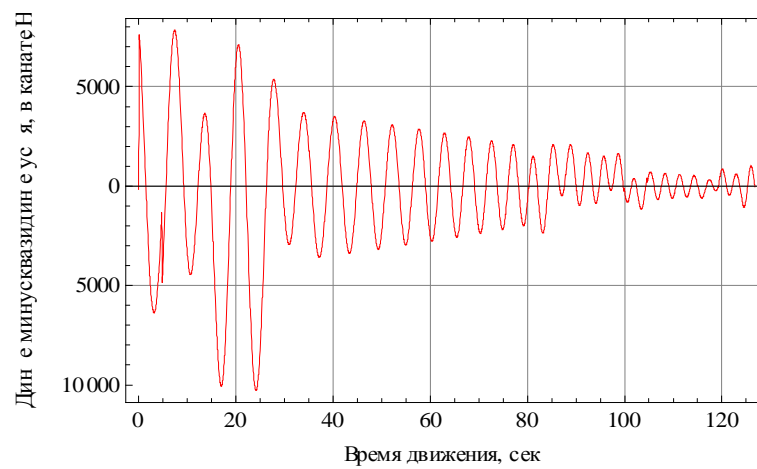


Рис. 8

По виду графиков на рисунках 5–8 видно, что при решении указанной выше задачи оптимизации время движения снизилось на 7–10 с по сравнению с фактически реализуемыми в настоящее время режимами движения, а интенсивность колебаний сосуда на упругом канате существенно уменьшилась, снижая тем самым горизонтальные нагрузки на армировку ствола. В свою очередь, снижение нагрузок до уровня ниже максимально допустимого за счет оптимизации процесса движения позволяет разрешить дальнейшее повышение скорости для увеличения производительности подъема.

**Выводы.** В задаче оптимизации движения шахтных подъемных установок получены диаграммы, позволяющие либо существенно уменьшить расход энергии, либо заметно уменьшить время подъема. В последнем случае удается также ограничить величины ускорения и рывка при движении подъемного сосуда, что приводит к уменьшению колебаний подъемного сосуда и каната.

**Список литературы:** 1. *Масляный А. С.* Оптимальная динамика статически уравновешенных подъемных установок / *А. С. Масляный* // Применение вычислительной техники и математических методов в автоматизации горнорудного и металлургического производства. – К.: Техніка. – 1968. – С. 20–29. 2. *Масляный А. С.* Оптимальная динамика статически неуравновешенных подъемных установок / *А. С. Масляный* // Применение вычислительной техники и математических методов в автоматизации горнорудного и металлургического производства. – К.: Техніка. – 1968. – С. 29–44. 3. *Масляный А. С.* Синтез оптимального управления шахтными подъемными установками / *А. С. Масляный, Ю. В. Михлин, Г. И. Малецкая* // Ордена Ленина институт кибернетики АН УССР. – К.: ПРЕПРИНТ–77–26, – 1977. – 32 с. 4. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе [и др.]*. – М.: Наука. – 1983. – 393 с. 5. *Ильин С. Р.* Об устойчивости движения грузов в упругих проводниках при пространственном расположении точек крепления канатов для многоканатного подъема / *С. Р. Ильин* // Publ. Techn. Univ. Heavy Ind. – Miskolc. – Ser. A – Vol. 35, Fasc. 3–4. – 1981.– P. 197–204. 6. *Ильин С. Р.* Влияние параметров диаграмм скорости вращения подъемных машин на динамические усилия в канатах и усталостные явления в элементах армировки ствола / *С. Р. Ильин* // Стальные канаты № 8. Экология. – Одесса. – 2010. – С. 56–68. 7. *Белобров В. И.* Динамика шахтных подъемных установок / *В. И. Белобров, В. А. Дзензерский, В. И. Самуся [и др.]* – Днепропетровск : Изд. Днепропетровского университета. – 2000. – 380 с.

*Надійшла до редколегії 15.09.2011*

УДК 62-526

**В. Я. КОПИ**, д-р техн. наук, проф., зав. каф. АПС СевНТУ, г. Севастополь;

**Ю. А. ОСИНСКИЙ**, доц. каф. АТПП СевНТУ, г. Севастополь;

**О. В. ФИЛИПОВИЧ**, канд. техн. наук, доц. каф. АПС СевНТУ, г. Севастополь;

**М. И. ГАРМАТЮК**, инженер каф. АПС СевНТУ, г. Севастополь

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ШАГОВОГО ПНЕВМОПРИВОДА ПОВОРОТНОГО ДЕЙСТВИЯ

Розглянуті структура, параметри, конструкція та основні принципи функціонування експериментальної установки для дослідження динамічних характеристик коливального крокового пневматичного приводу поворотної дії. Наведені приклади порівняння експериментальних даних з даними, які отримані в результаті моделювання динаміки приводу.

Рассмотрены структура, параметры, конструкция и основные принципы функционирования экспериментальной установки для исследования динамических характеристик колебательного шагового пневматического привода поворотного действия. Приведены примеры сравнения экспериментальных данных с данными, полученными в результате моделирования динамики привода.

The structure, parameters, design and main principles of functioning of experimental station for research of dynamic characteristics of an oscillatory step-by-step rotary pneumodrive are considered. Examples of comparison of experimental data with the data received as a result of modeling of dynamics of a drive are given.

**Введение.** Рассматриваемая экспериментальная установка, разработанная на кафедре автоматизированных приборных систем Севастопольского национального технического университета, предназначена для исследования динамических характеристик колебательного шагового пневматического привода поворотного действия (далее – КШПП). КШПП имеют ряд преимуществ перед другими типами пневмоприводов, осуществляющих позиционирование в большом числе фиксированных положений, например, большее число точек позиционирования и большую жесткость при фиксации достигнутого положения, а также возможность осуществления контурного управления при необходимости перемещения исполнительного органа по заданной траектории с заданной скоростью. Целью данной работы является описание конструкции и принципов функционирования установки, методики проведения исследований, а также сравнительный анализ эмпирических и теоретических результатов.

**Описание принципов функционирования установки.** Общий вид установки показан на рис. 1.