УДК 517.968.519.6

Ю.В. ГАНДЕЛЬ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков;
С.В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФРАКЦИИ ТЕ-ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Побудована математична модель розсіяння ТЕ-хвиль на дифракційній решітці, розташованій в поперечному перерізі плоско паралельного хвилеводу, на базі гиперсингулярного інтегрального рівняння, відповідного крайовій задачі для рівняння Гельмгольца. Дискретизація проведена чисельним методом дискретних особливостей, з використанням квадратурних формул інтерполяційного типу.

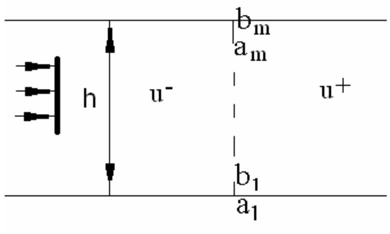
Построена математическая модель рассеяния ТЕ-волн на дифракционной решетке, расположенной в поперечном сечении плоскопараллельного волновода, на базе граничного гиперсингулярного интегрального уравнения, соответствующего краевой задаче для уравнения Гельмгольца. Дискретизация проведена численным методом дискретных особенностей, с использованием квадратурных формул интерполяционного типа.

A mathematical model of TE-wave radiation on diffraction grating placed in a transverse cross-section of the parallel-plate waveguide is built on the basis of boundary hypersingular integral equation, corresponding to the boundary-value problem for the Helmholtz equation. Discretization is carried out with the numerical method of discrete peculiarities, using quadrature formulae of interpolation type.

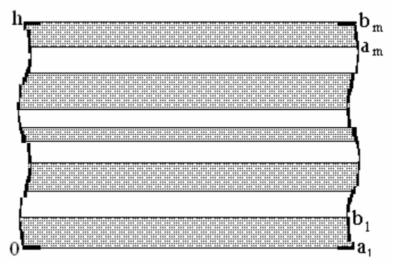
Введение. В работе [1] было выведено граничное сингулярное интегральное уравнение краевой задачи для уравнения *Гельмгольца* в случае рассеяния плоской монохроматической волны на дифракционной решетке, лежащей в сечении плоского волновода. А в работах [2-3] показано, что численный метод, использующий гиперсингулярные интегральные уравнения, в отличие от метода, основанного на сингулярных интегральных уравнениях, дает выигрыш в скорости вычисления результатов при условии достижения одинаковой точности. В связи с этим было решено провести построение математической модели для задачи дифракции в плоскопараллельном волноводе, в сечении которого помещена дифракционная решетка, смотри геометрию задачи, использующей гиперсингулярное интегральное уравнение.

В статье краевые задачи для уравнений *Максвелла* и *Гельмгольца*, сведены к гиперсингулярным интегральным уравнениям. На базе этих граничных интегральных уравнений построены дискретные математические модели для приближенного (с контролируемой точностью) решения рассмотренных краевых задач. Эти задачи служат математическими моделями электродинамических структур и нашли широкое применение при проектировании и создании волноводов с неоднородностями и фильтров на их основе.

Постановка задачи. В рассматриваемых задачах граница – параллельные идеально проводящие плоскости, между плоскостями – дифракционная решетка, содержащая одну или несколько продольных неограниченных, бесконечно тонких лент. Выберем декартовую систему координат так, чтобы дифракционная решетка лежала в плоскости Oyz. На рисунке представлено сечение волновода плоскостью, перпендикулярной к дифракционной решетке.



а



б

Рисунок – Сечения волновода с дифракционной решеткой:
(а) плоскостью, перпендикулярной к дифракционной решетке;
(б) плоскостью, содержащей дифракционную решетку.

Введем обозначения: $L = \bigcup_{i=1}^{m} \left(a_{i,} b_i\right)$ – это сужение металлических лент дифракционной решетки на плоскость сечения, а $CL = \left[0, h\right] \setminus L$ – сужение щели дифракционной решетки на ту же плоскость.

Задача дифракции TE-волны в 2–D случае сводится ко второй краевой задаче для *уравнения Гельмгольца*.

Искомая функция $u\left(x, z\right)$ (то есть искомое «поле») удовлетворяет следующим условиям:

- *уравнению Гельмгольца*:

$$\Delta u(x,z) + k^2 u(x,z) = 0\,, \tag{1}$$

в области $\left\{\left(x, z\right) \middle| x \in \left(-\infty, \infty\right),\ z \in \left(0, h\right)\right\} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} \left[a_i, b_i\right]\right)$;

- граничному условию:

$$\left.\frac{\partial u(x,z)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\left.\frac{\partial u_0\left(x,z\right)}{\partial x}\right|_{x=0}, \qquad z \in L\,, \tag{2}$$

- *условию излучения Зоммерфельда*:

$$\frac{\partial u\left(x,z\right)}{\partial x} - iku\left(x,z\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),\ x \to \infty\,, \tag{3}$$

- *условию Майкснера* на ребре:

$$\int_{\Omega}\left[k^2|u|^2+|\nabla u|^2\right]ds<\infty, \tag{4}$$

для любой ограниченной области $\Omega\subset R^2$.

В работе рассматриваются стационарные задачи, зависимость полей от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$, $u_0(x,z)=e^{-ikx}$, $k=\omega/c$, c – скорость света в вакууме.

Сужения искомой функции $u(x,z)$ на «левую» $x<0$ и «правую» $x>0$ полуплоскость, обозначим соответственно $u^-(x,z)$ и $u^+(x,z)$. Если функции $u^-(x,z)$, $x<0$ и $u^+(x,z)$ $x>0$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены «условия сопряжения»:

$$u^+(x,z)\big|_{x=0}=u^-(x,z)\big|_{x=0}, \qquad z\in CL, \tag{5}$$

и

$$\left.\frac{\partial u^+(x,z)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u^-(x,z)}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad z\in CL, \tag{6}$$

то существует функция $u(x,z)$, удовлетворяющая уравнению *Гельмгольца* во всем пространстве без объединения лент $\bigcup_{q=1}^{m}\left[a_{q,}b_q\right]$, причем $u(x,z)=u^-(x,z)$, $x<0$ и $u(x,z)=u^+(x,z)$, $x>0$.

Парное сумматорное и гиперсингулярное интегральное уравнения. Представления Фурье для функций $u^-(x,z)$, $x<0$ и $u^+(x,z)$, $x>0$, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца, ищем в виде рядов (сходимость которых понимается в смысле обобщенных функций):

$$u^+=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^+\cos(\lambda_n z)e^{-\Gamma_n x},$$

$$u^-=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^-\cos(\lambda_n z)e^{\Gamma_n x};$$

здесь $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{h}$, $\Gamma_m=\sqrt{\left(\dfrac{\pi n}{h}\right)^2-k^2}$, а ветвь радикала выбирается так, чтобы $\operatorname{Re}\Gamma_n>0$ при $n>\dfrac{kh}{\pi}$ и $\operatorname{Im}\Gamma_n<0$ при $n<\dfrac{kh}{\pi}$, h – расстояние между плоскостями. Тогда условия (5), (6) принимают вид

$$
\begin{cases}
\sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \cos\left(\lambda_n z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^- \cos\left(\lambda_n z\right), \ \ z \in CL, \\
\sum_{n=0}^{\infty} -\Gamma_n C_n^+ \cos\left(\lambda_n z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n C_n^- \cos\left(\lambda_n z\right), \ \ z \in CL.
\end{cases} \tag{7}
$$

Из второго условия сопряжения (6) и граничного условия (2) следует, что:

$$
-C_n^+ = C_n^- \equiv C_n, \quad n \in \mathbb{N}.
$$

Действуя так же, как в [2], и используя первое соотношение системы (7) и граничное условие (2), получаем парное сумматорное уравнение:

$$
\begin{cases}
\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n C_n \cos \lambda_n z = -\frac{\partial u_0}{\partial x}, \ \ z \in L, \\
\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \lambda_n z = 0, \ \ z \in CL.
\end{cases}, \tag{8}
$$

При этом Γ_n можно представить в виде:

$$
\Gamma_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 - k^2} = \frac{\pi n}{h}\sqrt{1 - \left(\frac{kh}{\pi n}\right)^2} = B_1 n + \frac{B_2}{n} + K_n,
$$

где B_1, B_2 – известные константы, $K_n = \Gamma_n - B_1 n - \frac{B_2}{n}$.

Перепишем первое уравнение в системе (8), используя представление для Γ_n:

$$
C_0 \Gamma_0 + B_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n |n| \cos \lambda_n z + B_2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{|n|} \cos \lambda_n z +
$$

$$
+\sum_{n=1}^{\infty} K_n C_n \cos \lambda_n z = -\frac{\partial u_0(0,z)}{\partial x}, \qquad z \in L. \tag{9}
$$

Введем новую неизвестную функцию:

$$
v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \lambda_n z; \qquad v(z) = 0, \ \ z \in CL. \tag{10}
$$

через значения которой выражаются все искомые коэффициенты C_n:

$$
C_0 = \frac{1}{h}\int_0^h v(\zeta)\, d\zeta; \quad C_n = \frac{1}{h}\int_L v(\zeta) \cos \lambda_n \zeta\, d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}
$$

Параметрические представления гиперсингулярного и логарифмического интегральных операторов на интервале $(0,h)$ получим, используя соответствующие представления интегралов [5]:

$$\begin{cases} v(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\lambda_n\zeta, \\ \frac{1}{2h} a.f.p.\int_0^h \frac{v(\zeta)d\zeta}{2\sin^2\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}}+\frac{1}{2h}\int_0^h \frac{v(\zeta)d\zeta}{2\sin^2\lambda_1\frac{\zeta+z}{2}}=-\sum_{n=1}^{\infty} nC_n\cos\lambda_n z, \end{cases} \tag{11}$$

здесь интеграл понимается в смысле *конечной части по Адамару* ($a.f.p.$),

$$\begin{cases} v(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\lambda_n\zeta, \\ \frac{1}{h}\int_0^h v(\zeta)\ln|\sin\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}|d\zeta+ \\ +\frac{1}{h}\int_0^h v(\zeta)\ln|\sin\lambda_1\frac{\zeta+z}{2}|d\zeta=-2C_0\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n}\cos\lambda_n z. \end{cases} \tag{12}$$

Применяя параметрические представления (11-12) к уравнению (9) и учитывая свойство (10), получаем гиперсингулярное интегральное уравнение на системе отрезков в виде:

$$-\frac{B_1}{2h} a.f.p.\int_0^h \frac{v(\zeta)d\zeta}{2\sin^2\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}}-\frac{B_1}{2h}\int_0^h \frac{v(\zeta)d\zeta}{2\sin^2\lambda_1\frac{\zeta+z}{2}}-$$

$$-\frac{B_2}{h}\int_L v(\zeta)\ln|\sin\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}|d\zeta-\frac{B_2}{h}\int_L v(\zeta)\ln|\sin\lambda_1\frac{\zeta+z}{2}|d\zeta-$$

$$-\frac{B_2\ln 2}{h}\int_L v(\zeta)d\zeta+\frac{1}{2h}\int_L K(\zeta,z)v(\zeta)d\zeta+\frac{\Gamma_0}{2h}\int_L v(\zeta)d\zeta=f(z) \quad , \tag{13}$$

где $K(\theta,z)=\sum_{n=1}^{\infty} K_n\cos(\lambda_n z)\cos(\lambda_n\zeta)$; $f(z)=-\partial_x u_0(0,z)$.

Представим подынтегральную функцию для первого интеграла уравнения (13) в виде:

$$\frac{1}{2\sin^2\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}}=\frac{2}{\lambda_1^2(\zeta-z)^2}+\left[\frac{1}{2\sin^2\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}}-\frac{2}{\lambda_1^2(\zeta-z)^2}\right]= \\ =\frac{1}{2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{\left(\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}-k\pi\right)^2} \quad , \tag{14}$$

а во втором интеграле этого уравнения «ядро» преобразуем так:

$$\ln|\sin\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}|=\ln|\lambda_1\frac{\zeta-z}{2}|+\ln\left|\frac{\sin\lambda_1\dfrac{\zeta-z}{2}}{\lambda_1\dfrac{\zeta-z}{2}}\right|. \qquad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (13), перепишем уравнение в виде:

$$-\frac{B_1}{h\lambda_1^2}*a.f.p.\int_L\frac{v(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{B_2}{h}\int_L v(\zeta)\ln|\zeta-z|d\zeta+$$

$$+\left[-\frac{B_1}{2h}\int_L v(\xi)\left\{\frac{1}{2\sin^2\lambda_1\dfrac{\zeta-z}{2}}-\frac{2}{\lambda_1^2(\zeta-z)^2}\right\}d\zeta-\frac{B_2}{h}\int_L v(\zeta)\ln\left|\frac{\sin\lambda_1\dfrac{\zeta-z}{2}}{\lambda_1\dfrac{\zeta-z}{2}}\right|d\zeta-\right.$$

$$-\frac{B_2\ln\lambda_1}{h}\int_L v(\zeta)d\zeta-\frac{B_1}{2h}\int_L\frac{v(\zeta)d\zeta}{2\sin^2\lambda_1\dfrac{\zeta+z}{2}}-\frac{B_2}{h}\int_L v(\zeta)\ln\left|\sin\lambda_1\frac{\zeta+z}{2}\right|d\zeta+$$

$$\left.+\frac{\Gamma_0}{2h}\int_L v(\zeta)d\zeta+\frac{1}{h}\int_L K(\zeta,z)v(\zeta)d\zeta\right]=f(z).$$

Условие Майкснера на ребре (4) будет выполнено, если сужение функции $v(\zeta)$ на интервал (a_q,b_q) представить в таком виде:

$$v(\zeta)\Big|_{(a_q,b_q)}=w_q(\zeta)\sqrt{(b_q-\zeta)(\zeta-a_q)},\ a_q<\zeta<b_q.$$

Таким образом получим сумму интегралов по каждому интервалу (a_q,b_q):

$$-\frac{B_1}{h\lambda_1^2}\sum_{q=1}^{m}a.f.p.\int_{a_q}^{b_q}\frac{w_q(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\sqrt{(b_q-\zeta)(\zeta-a_q)}d\zeta-$$

$$-\frac{B_2}{h}\sum_{q=1}^{m}\int_{a_q}^{b_q}w_q(\zeta)\ln|\zeta-z|\sqrt{(b_q-\zeta)(\zeta-a_q)}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{h}\sum_{q=1}^{m}\int_{a_q}^{b_q}w_q(\zeta)G(\zeta,z)\sqrt{(b_q-\zeta)(\zeta-a_q)}d\zeta=f(z),\qquad z\in L. \qquad (16)$$

где $G(\zeta,z)=-\dfrac{B_1}{2}\left\{\dfrac{1}{2\sin^2\lambda_1\dfrac{\zeta-z}{2}}-\dfrac{2}{\lambda_1^2(\zeta-z)^2}\right\}-$

$$-B_2 \ln \left| \frac{\sin \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}}{\lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} \right| - B_2 \ln \lambda_1 - \frac{B_1}{2} \frac{1}{2 \sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2}} -$$

$$-B_2 \ln \left| \sin \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2} \right| + \frac{\Gamma_0}{2} + K(\zeta, z).$$

Сделав замену переменных в (16), переходим от интервала (a_q, b_q) к стандартному интервалу $(-1,1)$:

$$g_q : (-1,1) \to (a_q, b_q) : t \mapsto \zeta = \frac{b_q - a_q}{2} t + \frac{b_q + a_q}{2},$$

$$w_q(\zeta)\Big|_{(a_q, b_q)} \equiv \sqrt{1-t^2}\,\gamma_q(t).$$

И гиперсингулярное интегральное уравнение примет вид:

$$-\frac{B_1}{h\lambda_1^2} \left(a.f.p.\int_{-1}^{1} \frac{\gamma_p(t)}{(t-t_0)^2} \sqrt{1-t^2}\,dt \right) - \frac{B_2}{h} \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^{1} \gamma_p(t) \ln|t - t_0| \sqrt{1-t^2}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^{m} \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^{1} G_{pq}(t_0, t)\, \gamma_q(t) \sqrt{1-t^2}\,dt = f_p(t_0), \qquad (17)$$

где $$G_{pq}(t_0, t) = \begin{cases} G\big(g_p(t_0), g_p(t)\big) - B_2 \ln \dfrac{b_p - a_p}{2}, \quad p = q, \\ G\big(g_p(t_0), g_q(t)\big) - \dfrac{B_1}{\lambda_1^2 \big(g_p(t_0) - g_q(t)\big)^2} - \\ \quad - B_2 \ln \big| g_p(t_0) - g_q(t) \big|, \quad p \neq q, \end{cases}$$

$$f_p(t_0) = \frac{2}{b_p - a_p} f\big(g_p(t_0)\big).$$

Дискретная математическая модель. Для дискретизации системы интегральных уравнений (14) введем в рассмотрение неизвестную функцию $\gamma_p^{n_p - 2}(t)$ – полином степени $n_p - 2$.

Также заменим гладкие ядра уравнений их интерполяционными полиномами по каждой из переменных с узлами $t_{oj}^{n_p}$, $j = 1, \ldots, n_p - 2$ – нулями *полинома Чебышева II рода* $U_{n_p - 2}(t_0)$.

Точные квадратурные формулы для дискретизации интегральных операторов с весовой функцией $\sqrt{1-t^2}$ имеют вид [5]:

- интегральный оператор с гладким ядром

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} P_{n-2}[K(t_{0j}^{n_p},t)]\gamma_q^{n_q-2}\left(t\right)\sqrt{1-t^2}\,dt \equiv \frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q-1}(1-\left(t_{0k}^{n_q}\right)^2)K(t_{0j}^{n_p},t_{0k}^{n_q})\gamma_q^{n_q-2}(t_{0k}^{n_q})\ ,$$

- интегральный оператор с логарифмическим ядром

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\,t_{0j}^{n_q}-t\,|\,\gamma_q^{n_q-2}(t)\sqrt{1-t^2}\,dt \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{n_q}\sum_{k=1}^{n_q-1}\gamma_q^{n_q-2}(t_{0k}^{n_q})(1-\left(t_{0k}^{n_q}\right)^2)\left(\ln 2+2\sum_{r=1}^{n_q-1}\frac{1}{r}T_r(t_{0k}^{n_q})T_r(t_{0j}^{n_q})+\frac{(-1)^k T_n(t_{0j}^{n_q})}{2n_q}\right),$$

- гиперсингулярный интегральный оператор

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma_q^{n_q-2}(t)}{(t_{0j}^{n_q}-t)^2}\sqrt{1-t^2}\,dt \equiv \frac{1}{n_q}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_q-1}\gamma_q^{n_q-2}\left(t_{0k}^{n_q}\right)(1-\left(t_{0k}^{n_q}\right)^2)\frac{1-(-1)^{j+k}}{(t_{0j}^{n_q}-t_{0k}^{n_q})^2}-\frac{n_q}{2}\gamma_q^{n_q-2}(t_{0j}^{n_q})\ ,$$

где $P_{n-2}[*]$ – полином степени $n-2$ и квадратурные формулы с узлами $t_{0j}^{n}=\cos\dfrac{j\pi}{n}$ и $t_{0k}^{n}=\cos\dfrac{k\pi}{n}$ (нулями полиномов Чебышева II рода [5]).

Применяя квадратурные формулы интерполяционного типа к гиперсингулярному интегральному уравнению (17), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно «приближений» неизвестных функций $\gamma_p^{n_p-2}\left(t\right)$, $p=0,...,m$:

$$\frac{B_1\pi}{\lambda_1^2 hn_p}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n_p-1}\gamma_p^{n_p-2}\left(t_{0k}^{n_p}\right)\left(1-\left(t_{0k}^{n_p}\right)^2\right)\frac{1-\left(-1\right)^{j+k}}{\left(t_{0j}^{n_p}-t_{0k}^{n_p}\right)^2}-\frac{B_1\pi}{\lambda_1^2 h}\frac{n_p}{2}\gamma_p^{n_p-2}\left(t_{0j}^{n_p}\right)-$$

$$-\frac{B_2\pi}{hn_p}\left(\frac{b_p-a_p}{2}\right)^2\sum_{k=1}^{n_p-1}\gamma_p^{n_p-2}\left(t_{0k}^{n_p}\right)\left(1-\left(t_{0k}^{n_p}\right)^2\right)*$$

$$*\left[\ln 2+2\sum_{r=1}^{n_p-1}\frac{1}{r}T_r\left(t_{0k}^{n_p}\right)T_r\left(t_{0j}^{n_p}\right)+\frac{\left(-1\right)^{k+j}}{2n_p}\right]-$$

$$-\sum_{q=1}^{m}\left(\frac{b_q-a_q}{2}\right)^2\frac{\pi}{hn_q}\sum_{k=1}^{n_q-1}\gamma_q\left(t_{0k}^{n_q}\right)\left(1-\left(t_{0k}^{n_q}\right)^2\right)G_{pq}\left(g_p\left(t_{0j}^{n_p}\right),g_q\left(t_{0k}^{n_q}\right)\right)=$$

$$=-f_p(t_{0j}^{n_p-2})\qquad j=1,...,n_p-1,\qquad p=0,...,m\,. \tag{18}$$

При решении системы линейных алгебраических уравнений (18) мы находим значения неизвестных функций $\gamma_p^{n_p}(t)$ в узлах $t_{0j}^{n_p}$, а затем по полученным значениям, восстанавливаем $\gamma_p^{n_p-2}\left(t_{0k}^{n_p}\right)$ как интерполяционный полином.

Выводы. В работе построены математические модели, адекватные соответствующей физической задаче. Краевая задача для уравнения Гельмгольца с границей, образованной параллельными идеально проводящими плоскостями и размещённой между плоскостями дифракционной решеткой, содержащей одну или несколько продольных лент, сведена к гиперсингулярному интегральному уравнению на системе отрезков. На базе этого граничного интегрального уравнения построена дискретная математическая модель (18) для приближенного (с контролируемой точностью) решения указанной краевой задачи. Построенная дискретная математическая модель, позволяет проводить численные эксперименты по определению технических характеристик рассмотренных волноведущих структур.

Список литературы: **1.** *Гандель Ю.В., Стрельченко В.А.* Сингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на ленточных диафрагмах в волноводе.// Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Зб. наук. праць. - Київ: НАН України, вип.9, 1995. – С. 154 – 161. **2.** *Духопельников С.В.* Математические модели для расчета технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями / Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 68. – С. 76–86. **3.** *Гандель Ю.В., Духопельников С.В.* Математические модели для расчета технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями в случае те-волн / Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 13. – С. 33–39. **4.** *Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145с. **5.** *Гандель Ю.В.* Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие, часть I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. / Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2001. – 92 с.

Поступила в редколлегию 15.09.2011