

УДК 539.3

С. І. Марусенко, С. О. Назаренко, Е. А. Сімсон

### **АНАЛІЗ СТАТИКО-ДИНАМІЧНИХ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ЕЛЕМЕНТАХ СТРУКТУРНО ЗВ'ЯЗАНИХ СИСТЕМ**

*Розглядаються проблемні питання розроблення математичних моделей елементів машин з урахуванням реального характеру зовнішнього навантаження різної фізичної природи. Розроблено методи аналізу послідовно зв'язаних, сильно зв'язаних, слабо зв'язаних мультифізичних просторових скінченноелементних моделей елементів машин з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності, які орієнтовані на великі розмірності векторів змінних стану та проектування. Наведено приклади застосування математичного апарату.*

**Постановка проблеми.** Широкий спектр проблем фундаментального і прикладного рівня, особливо характерний для визначення зв'язаних фізико-механічних полів у деформованих тілах, сприяв проведенню важливих досліджень, у яких аналіз ефектів зв'язаності виведено на рівень крайових задач математичної фізики. Одним з головних завдань є прискорення процесів розроблення, проектування і введення в експлуатацію зразків нової техніки і нових технологій, що вимагає впровадження високоточних і адекватних обчислювальних методологій та засобів.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Досягнення науки і техніки в умовах інформаційної фази розвитку ринкової економіки, інтенсифікація робочих процесів у сучасних інноваційних конструкціях, що піддаються впливу теплових, механічних, гідроаеромеханічних, електричних і електромагнітних полів, обумовлюють необхідність інтеграції математичних моделей високого рівня для дослідження життєвого циклу машинобудівних виробів від їх проектування до експлуатації й утилізації [1 – 4]. Для багатьох реальних систем і об'єктів характерним є те, що деформування конструктивних структурно зв'язаних елементів відбувається в умовах статичних, динамічних, теплових і контактних взаємодій в полях різної фізичної природи [2, 5 – 11]. Це вимагає активізації фундаментальних досліджень з розроблення і вдосконалення математичних моделей і нових ефективних методів розв'язування нелінійних статичних і динамічних багатовимірних задач розрахунку складних систем під дією зв'язаних електромагнітних, теплових, статичних і динамічних полів.

Досягнення в області чисельних методів і обчислювальних технологій дозволили створити надійні комп'ютерні системи моделювання, що дають можливість досліджувати і прогнозувати поведінку механічних і технологічних систем [3, 5, 11]. Проте вони не дозволяють повною мірою моделювати особливості поведінки складних структурно зв'язаних механічних систем, які можуть включати взаємодіючі нелінійні елементи різної мірності [2, 5 – 9]. Останнім часом вчені розвинених країн Європи, США і Японією активно проводять зазначені наукові дослідження, які є частиною створення нових прогресивних технологій в автомобільній, аерокосмічній, енергетичній, медичній, транспортній, ультразвуковій та інших областях техніки [3, 4].

**Метою статті** є ознайомлення з результатами проведених досліджень з розроблення на єдиній комплексній науково-методологічній основі мультифізичних скінченноелементних моделей конструкцій під впливом фізичних полів різної природи і ступенів зв'язаності, орієнтованих на великі розмірності векторів змінних стану і проектування.

**Виклад основного матеріалу.** Сучасні машини створюють як комбінацію багатьох взаємодіючих між собою і з зовнішнім середовищем конструктивних елементів, яку описує достатньо складна математична модель. Для адекватного моделювання конструкцій їх розрахункові схеми необхідно представити у вигляді уточнених математичних моделей із взаємодіючими елементами різної мірності багатокомпонентної структури і складної форми в умовах дії зовнішніх полів різної фізичної природи. Задача аналізу, як правило, зводиться до розв'язування систем диференціальних рівнянь в частинних похідних. Узагальнене рівняння руху різних математичних моделей елементів машин (від одновимірної до тривимірної) запишемо таким чином

$$A[\vec{V}] + D[\vec{V}] + C[\vec{V}] - \vec{f} = 0, \quad (1)$$

де  $\vec{V}(\vec{X}, t)$  – узагальнений вектор переміщень (механічні переміщення, температура, потенціали електричного поля і т. д.);  $\vec{X}$  – координатний вектор;  $A$  – оператор зведених “міцностних” характеристик;  $D$  – зведений “інерційний” оператор;  $t$  – час.

Структура і параметри рівнянь залежать від типу досліджуваного явища, складу системи, граничних умов, навантажень і умов сполучення. Для пружного тіла можна записати

$$A[\vec{V}] = K\vec{V}, \quad D[\vec{V}] = M \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2},$$

де  $K, M$  – лінійні додатньо визначені матричні оператори.

Моделювання реальних експлуатаційних режимів навантаження  $\vec{f}$  може бути заданим, залежним від взаємодії об’єкта з навколишнім середовищем (газом, рідиною), зовнішнім полем (температурним, електромагнітним) або від контакту з іншими елементами. Якщо для дослідження важливі зовнішні зв’язки розглянутого об’єкта, то можна перейти до вивчення більш широкої системи, у якій ці зв’язки стають внутрішніми, при цьому необхідно, щоб виконувалися умови фізичної замкнутості.

Конкретний вид оператора дисипативних сил  $C$  залежить від прийнятої моделі тертя: лінійної, амплітудно- або частотнезалежної, амплітуднозалежної, гістерезисної. Причини і фізична природа розсіяння енергії у процесі коливань механічних систем надзвичайно різноманітні. Їх можна розділити на дві групи. До першої віднесено зовнішню опірність: тертя в опорах, гідро- і аеродемпфірування, конструктивні демпфери. До другої – внутрішню непружну опірність: недосконала пружність матеріалу, контактне тертя в зчленуваннях. У більшості практично важливих випадків основна частка належить внутрішнім витратам енергії в системі, зокрема, її розсіянню в матеріалі. Як відомо, розсіяння енергії призводить до незбігу гілок навантаження  $\vec{\sigma}(\varepsilon)$  і розвантаження  $\vec{\sigma}(\varepsilon)$  механічного гістерезису. Основним його механізмом у широкому діапазоні амплітуд напружень і частот коливань є процес мікропластичних деформацій. Сформулювати ту або іншу гіпотезу розсіяння енергії означає, перш за все, задати амплітудну залежність для площі петлі гістерезису та описати її форму.

Розв’язок узагальненого рівняння коливань механічних систем з варійованими проектними змінними  $\vec{u}$  під впливом гармонійного збудження або гармонійної складової

$$K(\vec{u})\vec{V} + \vec{C}\left[\vec{u}, \vec{V}, \dot{\vec{V}}\right] + M(\vec{u})\ddot{\vec{V}} = \vec{F}_c \cos \omega t + \vec{F}_s \sin \omega t \quad (2)$$

для випадку простого резонансу (розріджений спектр оцінюється частотним інтервалом між резонуючою і найближчою власною частотами, мале тертя оцінюється частотною шириною резонансної кривої за рівнем половинної потужності) відшукується в рамках постулату Відлера (форма вимушених резонансних коливань співпадає з резонуючою власною формою)

$$\vec{V} = \vec{y} \cdot A \cos \theta = (a \cos \omega t + b \sin \omega t), \quad (3)$$

де  $A$  – амплітуда коливань;  $\theta = \omega t + \varphi$  – фаза;  $\omega$  – частота коливань;  $\vec{y}$  – нормована резонуюча форма коливань

$$\vec{y} \circ M \vec{y} = 1. \quad (4)$$

Знаком “ $\circ$ ” позначено скалярне множення векторів для дискретних моделей ( $K, M$  – скінченноелементні матриці) або векторів-функцій – для диференціальних моделей елементів конструкцій.

Розв’язування рівняння (2) методом енергогармонійного балансу призводить до системи:

$$\pi(\omega_0^2 - \omega^2)a + \int_0^{2\pi} \vec{y} \circ C[a, b, \vec{y}] \cos \omega t d\omega t = P_c \pi;$$

$$\pi(\omega_0^2 - \omega^2)b + \int_0^{2\pi} \vec{y} \circ C[a, b, \vec{y}] \sin \omega t d\omega t = P_s \pi,$$

де  $\omega_0$  – резонансна власна частота.

Ураховуючи (3), запишемо:

$$\pi(\omega_0^2 - \omega^2)A^2 + A \int_0^{2\pi} \vec{y} \circ \vec{C} \cos \theta d\theta = \pi(P_c a + P_s b);$$

$$\pi(\omega_0^2 - \omega^2)A^2 + A \int_0^{2\pi} \vec{y} \circ \vec{C} \sin \theta d\theta = \pi(P_c a - P_s b).$$

Введемо:

$$\Delta W(A, \vec{y}) = A \int_0^{2\pi} \vec{y} \circ C \cos \theta d\theta; \quad N(A, \vec{y}) = A \int_0^{2\pi} \vec{y} \circ C \sin \theta d\theta;$$

$$P_c = \vec{F}_c \circ \vec{y}; \quad P_s = \vec{F}_s \circ \vec{y}; \quad \bar{P} = \sqrt{P_c^2 + P_s^2}.$$

Одержимо рівняння резонансної кривої у вигляді:

$$\left[ \pi(\omega_0^2 - \omega^2) + N(A, \vec{y}) \right]^2 + \Delta W(A, \vec{y}) = \pi^2 \bar{P}^2 A^2. \quad (5)$$

Розв'язок рівняння резонансних коливань можна одержати асимптотичним методом у вигляді розкладання за ступенями малого параметра  $\Gamma$

$$K\vec{V} + M \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2} = r \left[ \vec{C}[\vec{V}] + \vec{f}_0(\vec{x}) \cos \omega t \right]. \quad (6)$$

Фізичне розуміння розв'язку у тому, що у разі малого тертя вельми малі амплітуди зовнішніх динамічних дій спричиняють значні амплітуди коливань і, як наслідок, інерційні та пружні сили. Надалі до рівняння (6) застосовується метод Крилова – Боголюбова [6]. Зазначений метод дозволяє будувати скільки завгодно високі наближення, проте сам член, що описує демпфірування, заданий у межах першого наближення. Достовірно (з експерименту) може бути визначена лише його інтегральна характеристика – площа петлі гістерезису. Таким чином, у рішенні логічно обмежитися лише першим наближенням. Проте розв'язок задачі у першому наближенні значно простіше і надійніше можна одержати енергетичними методами [7].

Г. С. Пісаренко [8] застосував енергетичний варіант асимптотичного методу, розроблений Н. Н. Боголюбовим і Ю. А. Мітропольським [9]. Відповідно до методу в першому наближенні запишемо рівняння:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2TA\omega_0} \frac{\delta \bar{W}}{\delta \theta}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - \frac{1}{2TA\omega_0} \frac{\delta \bar{W}}{\delta A},$$

де  $\delta \bar{W}$  – середня за цикл віртуальна робота, яку виконали б узагальнені сили (в даному випадку – сили демпфірування і зовнішні сили) на віртуальних переміщеннях, відповідних змінам амплітуди і фази коливань;  $2T$  – узагальнена маса, подвоєна форма кінетичної енергії на резонуючій власній формі (за умови рівності (4)  $2T=1$ ).

Якщо припустити, що у першому наближенні петля гістерезису представлена залежністю

$\tau_i = \tau_i(\gamma^i)$ , одержимо [8]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{X(A)}{2\pi\omega_0} - \frac{\bar{P} \sin \varphi}{\omega_0 + \omega}; & \frac{d\theta}{dt} &= \omega_0 - \frac{Y(A)}{2\pi\omega_0 A} - \frac{\bar{P} \cos \varphi}{\omega_0 + \omega}; \\ X(A) &= \int \int_{(v) o}^{2\pi} \bar{\tau}_i \bar{\gamma}_i \sin \theta d\theta dv; & Y(A) &= \int \int_{(v) o}^{2\pi} \bar{\tau}_i \bar{\gamma}_i \cos \theta d\theta dv; \\ \Delta W(A) &= A \cdot X(A); & N(A) &= A \cdot Y(A), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де  $\bar{\gamma}_i(\bar{x}) = \max_i \{\gamma_i(\bar{x}, t)\}$  – форма розподілу інтенсивності деформацій зрушення, що відповідає нормованій резонуючій власній формі коливань.

Записуючи рівняння стаціонарності вимушених коливань  $dA/dt = 0$ ,  $d\varphi/dt = 0$  і виключаючи зрушення фази  $\varphi$ , знаходимо рівняння, що неявно задає резонансну криву  $A(\omega)$ :

$$\left[ \frac{\Delta W(A, \bar{y})}{2\pi A \omega_0} \right] + \left[ (\omega_0 - \omega) A + \frac{N(A, \bar{y})}{2\pi A \omega_0} \right] = \frac{\bar{P}^2(\bar{y})}{(\omega_0 - \omega)^2}. \quad (8)$$

Рівняння (8) в зоні біля резонансу  $\omega_0 \approx \omega$  співпадає з (5). Вирази  $\omega_0$ ,  $\Delta W$ ,  $\bar{P}$ ,  $N$  відображають основні характеристики резонансної поведінки системи. Зокрема,  $\Delta W(A)$  – енергія, що розсіюється в конструкції за цикл коливань, у межах згаданих моделей амплітудозалежного внутрішнього тертя може бути одержана прямою інтеграцією густини втрат за об'ємом конструкцій (7),  $\bar{P}$  – коефіцієнт роботи розподіленого навантаження з підтримки резонуючої форми коливань;  $N(A)$  – вираз, що характеризує нелінійну пружність конструкції, обумовлену геометричною, фізичною або конструктивною нелінійністю.

Якщо припустити, що дисипативний член описує лише непружні відхилення без спотворення пружної лінії, то  $N = 0$ . Таке допущення прийняте майже завжди. Враховуючи, що вирішального значення для визначення амплітуди вимушених резонансних коливань має площа, а не форма петлі гістерезису, яка достовірно невизначена [7], у резонансній області ( $\omega_0 \approx \omega$ ) рівняння амплітудно-частотної характеристики спрощується:

$$A = \frac{\bar{P}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\Delta W(A)/\pi A^2)^2}}. \quad (9)$$

Рівняння для резонансної амплітуди зводиться до простого балансу енергії

$$\Delta W(A_p) = \pi A_p \bar{P}. \quad (10)$$

Уточнене рівняння можна одержати з досліду на максимум неявної залежності  $A(\omega)$ , що задається рівнянням (8) або перетином резонансної і скелетної кривих

$$\omega^2 = \omega_0^2 + N(A, \bar{y})(\pi A)^{-2}. \quad (11)$$

У простому випадку для гіпотези Давіденкова  $\Delta W = k \varepsilon_0^{n+1}$  одержимо:

$$A_p = \sqrt[n]{\pi \bar{P}(\bar{y}) / \Delta \bar{W}(\bar{y})} \quad (12)$$

де  $\Delta \bar{W}$  – функціонал втрат на нормованій резонуючій формі коливань  $\Delta W(A, \bar{y}) = A^{n+1} \Delta \bar{W}(\bar{y})$ .

Дещо складнішим є розв’язування задачі у випадках, коли одночленного уявлення виявляється недостатньо для опису реальної амплітудної залежності демпфірувальних властивостей матеріалу, наприклад, коли у логарифмічному декременті  $\delta_m(\sigma)$  присутня незалежна частина. Так, для

поліноміального уявлення  $\Delta W = \left( \sum_1^N k_i \varepsilon_0^i \right) W$  одержимо:

$$\sum_{j=2}^{n+1} \Delta \bar{W}_j(\bar{y}) A_p^j = \pi A_p \bar{P}(\bar{y}), \quad \Delta \bar{W}_j = \int_{(v)} k_j \bar{y}_i^j dV. \quad (13)$$

У випадку неявної залежності  $A_p$  від функціоналів  $\Delta \bar{W}_j(\bar{y})$  та  $\bar{P}(\bar{y})$ , не складно знайти вираз для варіації:

$$\delta A_p = \left( \pi \delta \bar{P} - \sum_{j=2}^{n+1} A_p^{j-1} \delta(\Delta \bar{W}_j) \right) / \sum_{j=2}^{n+1} (j-1) \Delta \bar{W}_j A_p^{j-2}. \quad (14)$$

Нелінійно-пружний член  $N(A, \bar{y})$ , що задає вид скелетної кривої (11), з урахуванням геометричної нелінійності за рівнянням Дуффінга набирає вигляду  $Y_{\perp}(A) = A^{-1} N(\bar{y}, A) = \bar{N}(\bar{y}) A^3$ . З урахуванням істотних нелінійно-пружних властивостей матеріалу, що апроксимуються відповідними поліномами, одержимо

$$N(\bar{y}, A) = \sum_{j=0}^n \bar{N}_j(\bar{y}) \cdot A^j. \quad (15)$$

Таким чином, всі вирази, що входять в рівняння резонансної кривої і формули резонансних амплітуд, є функціоналами, залежними від резонуючої власної частоти і форми коливань. Всі характеристики вібраційного і напружено-деформованого станів також виражаються через резонуючу форму коливань.

Можливості класичних методів, що базуються на розв’язуванні системи рівнянь у частинних похідних крайових задач математичної фізики, дуже обмежені. Основні дозволяючі рівняння для процесів, що змінюються за часом, можуть бути безпосередньо отримані з узагальненого варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, до якого входять: кінетична енергія системи, потенційна енергія (найбільш важлива енергетична характеристика довільної системи, виражена через компоненти обраного простору станів, при необхідності може включати, наприклад, енергію електричної індукції для тривимірного п’єзоелектричного тіла), робота прикладених сил. Крайова задача може бути зведена до варіаційної форми за допомогою множення рівняння (1) на довільний віртуальний  $z$  із простору  $Z$  гладких “узагальнених” переміщень, що задовольняють крайовим умовам, і подальшого інтегрування, яке виконується за об’ємом тіла. Варіаційні методи призводять до матричної алгебраїчної проблеми і є зручною основою для побудови теоретично обґрунтованих розрахункових схем.

Задачі теорії поля (теплопровідність, гідромеханіка, розрахунок електричних чи магнітних полів і т. д.) зводяться до системи рівнянь, аналогічній співвідношенням методу скінченних елементів (МСЕ) для задач механіки деформованого твердого тіла, що є найбільш могутнім, універсальним і поширеним методом розрахунку. Розглянемо спочатку дворівневі мультифізичні скінченноелементні моделі, які є комбінацією аналізів різних наукових дисциплін і розрахункових схем, взаємодіючих з

метою розв'язання загальної інженерної задачі:

– послідовна (однобічна дія)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22}(\bar{\mathbf{y}}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2(\bar{\mathbf{y}}_1) \end{Bmatrix}; \quad (16)$$

– слабка, з урахуванням зворотних зв'язків (двостороння взаємодія)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}(\bar{\mathbf{y}}_2) & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22}(\bar{\mathbf{y}}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1(\bar{\mathbf{y}}_2) \\ \bar{\mathbf{F}}_2(\bar{\mathbf{y}}_1) \end{Bmatrix}; \quad (17)$$

– сильна (повна)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1 \\ \bar{\mathbf{F}}_2 \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

де  $\mathbf{K}_{11}$ ,  $\mathbf{K}_{21}$ ,  $\mathbf{K}_{22}$  – узагальнені матриці жорсткості;  $\bar{\mathbf{y}}_1$  і  $\bar{\mathbf{y}}_2$  – вектори узагальнених переміщень,  $\bar{\mathbf{F}}_1$  і  $\bar{\mathbf{F}}_2$  – вектори узагальнених навантажень.

Основною відмінністю моделей послідовного (слабкого) ступеня зв'язаності від сильного є відсутність позадіагональних блоків зв'язку глобальних матриць  $\mathbf{K}_{21}$  стану різних фізичних задач. Відзначимо, що властивості моделі не є сумою властивостей чи елементів підмоделей. Завжди з'являються нові якості та функціональні можливості. До однакового формального запису може призводити розв'язування таких зв'язаних задач, як міцність у випадку теплового навантаження, вплив магнітних полів на міцність конструкції, тепломасоперенесення в електромагнітному полі і т.д.

Прикладами конструкцій, для яких важливо враховувати вплив сильнозв'язаних фізичних полів різної природи, є п'єзоелектричні пристрої акустоелектроніки. Відмінність польових рівнянь п'єзоелектричного середовища від аналогічних рівнянь класичної теорії пружності обумовлена необхідністю введення в розгляд нових термодинамічних змінних, що характеризують електричний стан середовища. У результаті замість 15 змінних, що описують пружне поле (переміщення, деформації і напруження), використовують 22 змінні (додатково до пружного поля – вектори напруженості та індукції електричного поля, електростатичний потенціал). Співвідношеннями стану для такої задачі є рівняння п'єзоелектричного середовища, що описують електромеханічне перетворення, квазістатичні рівняння Максвела, рівняння руху елемента середовища, а також співвідношення Коші.

Після застосування варіаційного принципу і скінченноелементної дискретизації співвідношення для задачі про власні коливання в матричній формі для п'єзоелемента набирають вигляд:

$$\mathbf{K}_{yy}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_{y\phi}\bar{\phi} - \omega^2\mathbf{M}_{yy}\bar{\mathbf{y}} = 0; \quad \mathbf{K}_{y\phi}\bar{\mathbf{y}} + \mathbf{K}_{\phi\phi}\bar{\phi} = 0,$$

де  $\mathbf{K}_{yy}$ ,  $\mathbf{K}_{y\phi}$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  – відповідно матриці жорсткості, п'єзоелектричного зв'язку, діелектричної проникності;  $\mathbf{M}$  – матриця мас системи;  $\bar{\mathbf{y}}$ ,  $\bar{\phi}$  – вектори вузлових переміщень і потенціалів електричного поля в п'єзоелектриці.

Відзначимо, що матриці  $\mathbf{K}_{yy}$ ,  $\mathbf{K}_{y\phi}$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  обчислюють одночасно, як “узагальнену” матрицю жорсткості, при цьому в кожному вузлі об'ємного ізопараметричного скінченного елемента вважаються невідомими три переміщення і потенціал електричного поля.

Для перевірки вірогідності розробленого математичного апарату була розглянута задача розрахунку п'єзоелектричного датчика-перетворювача. П'єзокерамічний перетворювач являв собою куб з довжиною грані 10 мм, виготовлений із матеріалу PZT4 з поляризацією уздовж осі Z. Електроди розміщувалися на поверхнях, ортогональних осі поляризації. Розглядали групи частот коливань, що відповідають короткозамкненому ланцюгу (резонанс) і розімкненому ланцюгу (антирезонанс).

Піделектродна область є еквіпотенціальною поверхнею, тому спеціальний образ не моделювався. Для короткозамкнутого ланцюга верхній і нижній електроди заземлювали (напруга на електродах дорівнювала нулю). Для випадку розімкненого ланцюга заземлювали тільки верхній електрод. Випадок короткозамкнутого ланцюга являє собою збурювання перетворювача прикладеним до електродів потенціалом, а розімкненого ланцюга – збурювання зарядом. Перетворювач змодельований чвертю куба з прикладеними граничними умовами симетрії по поверхнях розподілу.

Порівняння результатів експерименту [10] і розрахунку показало, що розходження на перших 3-х частотах не більше 4 %. Формою ілюстрації результатів для п'єзоелектричного перетворювача обране тонування поверхні (рис. 1, 2). Світлими тонами показана зона близьких до нуля інтенсивностей напружень, темними – екстремальних.

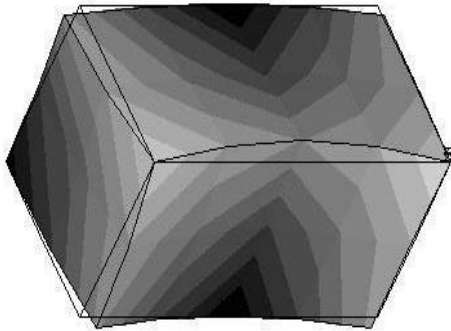


Рис. 1. Третя власна форма.  
Короткозамкнений ланцюг

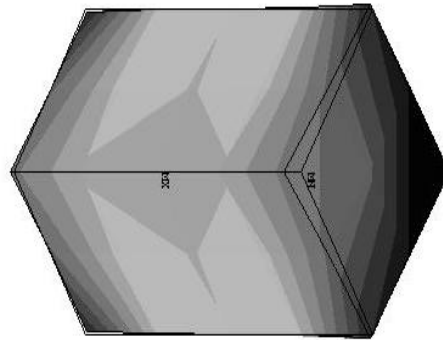


Рис. 2. П'ята власна форма.  
Розімкнений ланцюг

Прикладами конструкцій, для яких важливе врахування впливу послідовно зв'язаних фізичних полів різної природи, є пристрої радіоелектронної апаратури, схильні до механічних і теплових дій. Загальний вигляд основних рівнянь зв'язаної динамічної задачі термопружності у векторній формі з урахуванням змін температурного поля, що спричинені переміщеннями, такий:

$$c_{ij}\rho_{ij}\left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + k_1 \bar{U}_j \nabla T_i\right) = \nabla(\lambda_{ij} \nabla T_i) - k_2(3\lambda_i^* + 2\mu_i^*)\alpha_{T_i} T_{0_i} \operatorname{div} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + k_3 Q_i^{\text{ИС}} + Q_i^y;$$

$$\rho_{ij} \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial t^2} = \mu_i^* \nabla^2 \bar{V}_i + (\lambda_i^* + \mu_i^*) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{V}_i - (3\lambda_i^* + 2\mu_i^*) \alpha_{T_i} \operatorname{grad}(T_i - T_{0_i}),$$

де  $T_i$  – температурне поле пристроїв;  $\bar{V}_i$  – векторне поле переміщень у процесі деформацій пристроїв;  $\bar{U}_j$  – векторне поле швидкостей;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа;  $c_{ij}$ ,  $\rho_{ij}$ ,  $\lambda_{ij}$ ,  $\alpha_{T_i}$  – теплофізичні параметри матеріалів теплоємності, густини, теплопровідності, коефіцієнт лінійного розширення;  $T_{0_i}$  – номінальна температура;  $\lambda_i^*$ ,  $\mu_i^*$  – коефіцієнти Ляме;  $Q_i^{\text{ИС}}$ ,  $Q_i^y$  – зведені потужності джерел тепловиділяючих (виробляючих холод) елементів;  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  – коефіцієнти (0 або 1), що відображають зв'язаний характер процесів у пристроях.

До систем рівнянь, які відображують характер процесів, необхідно додати початкові та граничні умови з урахуванням особливостей кріплення і зовнішнього теплообміну в пристроях.

Розглянемо сталий режим, за якого температурне поле можна вважати стаціонарним. Він встановлюється після достатньо тривалого прогрівання постійною зовнішньою температурою і є основним робочим режимом.

Після декомпозиції – поділу системи (моделі) на підсистеми (підмоделі) зі збереженням структур і приналежності одних елементів і підсистем іншим, задачу комплексного аналізу можна розділити на два етапи.

1. Задача теплопровідності

$$\Lambda \vec{T} = \vec{Q},$$

де  $\Lambda$  – матриця теплопровідності;  $\vec{Q}$  – вектор узагальненого теплового навантаження.

2. Задача термопружності

$$K \vec{Y} = \vec{F}_{t_0},$$

де  $\vec{Y}$  – узагальнений вектор термопружних переміщень.

Розв’язок задачі теплопровідності визначає навантаження для задачі термопружності. Задачу аналізу резонансного стану в полі теплових навантажень можна записати у вигляді:

$$[K_{yy} + G(\vec{y}_s) - \lambda M_{yy}] \vec{y}_d = 0,$$

де  $G(\vec{y}_s, \vec{u})$  – матриця “геометричної” жорсткості (зведених початкових напружень  $\sigma_{kl}$ ), сформована на розв’язку  $\vec{y}_s$  статичної задачі;  $\lambda$  – квадрат власної частоти;  $\vec{y}_d$  – власна форма коливань.

Тепловий аналіз у випадку перехідних режимів може бути і нелінійним, тоді як розрахунок напружень може виконуватися в лінійній постановці. Температурне навантаження має двояку дію: спричинює додаткові статичні напруження, зв’язані з градієнтом температур, і призводить до змін фізико-механічних характеристик матеріалу. Спільне розв’язання задачі теплофізики і механіки дозволяє, з одного боку, економити час (наприклад, за рахунок генерації єдиної СЕ сітки), а з іншого – більш точно задавати навантаження. Часто послідовний зв’язок виявляється не тільки більш ефективним ніж сильний, а й більш зручним, оскільки є можливість виконувати розрахунки незалежно. Температурні напруження, що виникають у платі радіоелектронної апаратури, призводять до її руйнування унаслідок наявності температурного градієнта, скованого теплового розширення окремих частин плати або неможливості цього (фіксація плати в направляючих штирях) і детально досліджені в роботі [11]. У процесі розрахунку плату представляють у вигляді кусково-однорідної пластини. Для дослідження був вибраний КЕ shell63, у якого шість степенів вільності в кожному з 4 вузлів, та КЕ mass21, тобто зосереджені маси, які замінюють різні елементи плати. На рис. 3 наведені форми коливань та інтенсивності напружень плати бортового комп’ютера.

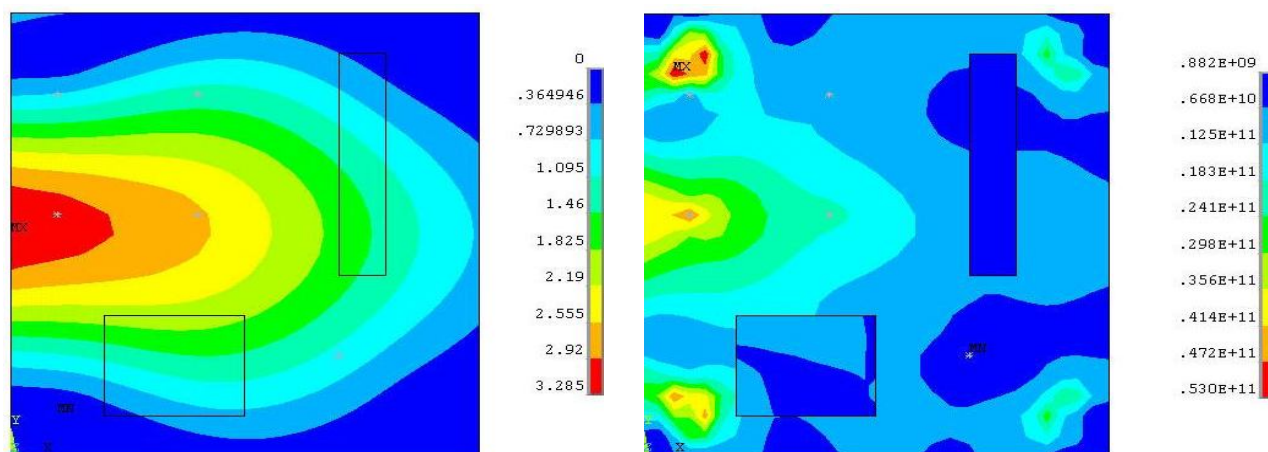


Рис. 3. Перша власна частота

Прикладами конструкцій, для яких важливо враховувати вплив слабо зв’язаних фізичних полів різної природи, є резонансні прилади. Особливістю таких задач є урахування зворотних зв’язків (у випадку двосторонньої взаємодії) і необхідність декількох ітерацій у процесі розв’язування нелінійної задачі. Ультразвукові коливання високої інтенсивності є причиною істотного розігріву системи. Відповідна зв’язана нелінійна математична модель включає стаціонарні рівняння



теплопровідності, у яких функція теплових джерел будується за формою резонансних динамічних напружень як частка інтенсивності гістерезисних втрат, і рівняння власних коливань

$$\Lambda \bar{T}^0 = \bar{Q}(\bar{\sigma}(\bar{y})); \quad \left[ K(\bar{T}^0) - \omega^2 M(\bar{T}^0) \right] \bar{y} = 0,$$

що включають залежність фізико-механічних характеристик і геометрії елемента від розподілу температури:

$$E = E(T, \bar{x}); \quad \rho = \rho(T, \bar{x}).$$

Ітерації між різними дисциплінарними аналізами виконують доти, поки не буде досягнутий бажаний рівень збіжності.

Для випадку двосторонньої взаємодії (18) у аналізі складної взаємодії “рідина – конструкція” (Fluid Structure Interaction, FSI) необхідно враховувати деформації конструктивних елементів і повторити розрахунок параметрів руху середовища для нової геометрії. Загальна розрахункова схема може мати нестационарний характер, а тимчасові кроки бути різними. Схеми рішення вибирають з урахуванням збалансованого поєднання точності, повноти, строгості і витрат ресурсів. За таким методом розв’язують задачі флатеру несучих поверхонь, вібрацій лопаток в машинах, вібрацій штучних серцевих клапанів і т. ін.

Після складання моделі із заданих або визначуваних підмоделей, структурно зв’язаних і стійких, можлива побудова багаторівневих ієрархічних систем. Так, для випромінювача з п’єзоактивного матеріалу, що працює на великій глибині в рідині, для досягнення необхідної відповідності математичної моделі реальному процесу функціонування конструкції необхідно враховувати зв’язок напружено-деформованого і електричного полів у конструкції:

$$[K_{yy}] \bar{y}_s = \bar{F}_s; \quad \{ [K_{yy}] + [G(y_s)] - \omega^2 [M_{yy}] \} \bar{y} + [K_{y\phi}] \bar{\phi} - [R]^T \bar{p} = 0;$$

$$[K_F] \bar{p} - \omega^2 [M_F] \bar{p} - \omega^2 \rho [R] \bar{y} = 0; \quad [K_{\phi y}] \bar{y} + [K_{\phi\phi}] \bar{\phi} = 0,$$

де  $[M_F]$ ,  $[K_F]$  – матриці мас і жорсткості рідини;  $[R]$  – матриця взаємозв’язку “тиск – переміщення”, визначувана з умови спільності на межі конструкції з рідиною;  $\bar{p}$  – вузловий тиск.

### Висновки

Проведене дослідження дозволяє класифікувати задачі аналізу мультифізичних скінченоелементних моделей різного ступеня зв’язаності й успішно апробувати розроблений математичний апарат на практиці. Використання єдиної розрахункової моделі для мультифізичного моделювання мінімізує час, який зазвичай витрачають на підготовку безлічі розрахункових моделей, перетворення і передавання даних від однієї розрахункової моделі в одній системі до іншої моделі в іншій системі. Подальшим напрямком досліджень може бути застосування розробленого математичного апарата для вивчення життєвого циклу сучасних конструкцій.

### Список використаних джерел

1. Piegl L. A. Ten challenges in computer-aided design / L. A. Piegl // Computer-aided design. – 2005. – № 37. – р. 461–470.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. / под общ. ред. А. Н. Гузя. – К. : Наук. думка, 1987 – 1989.
3. Електронний ресурс. Режим доступу: <http://www.cimdata.com/>.
4. Кунву Ли. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / Ли Кунву. – С Пб. : Питер, 2004. – 560 с.
5. Назаренко С. А. Анализ чувствительности конечномерных и континуальных моделей структурно связанных систем / С. А. Назаренко // Вестник НТУ “ХПИ”. – 2007. – № 22. – С. 127 – 131.

6. Крылов Н. М. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – К. : Изд. АН УССР, 1934. – 142 с.
7. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – Л. : Машиностроение, 1976. – 320 с.
8. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материалов / Г. С. Писаренко. – К. : Наук. думка, 1979. – 379 с.
9. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М. : Наука, 1974. – 503 с.
10. Allik H. Finite Element for Piezoelectric Vibration / H. Allik, J. R. Hughes // International Journal Numerical Methods of Engineering. – 1970. – № 2. – p. 151 – 157.
11. Щемелинин Д. А. Проблемы моделирования механических и тепловых процессов в блоках и печатных платах электронных приборов и пути их решения на основе 3D моделей / Д. А. Щемелинин // Объединенный научный журнал. Российское агентство научной печати. – 2007. – № 17 (205). – С. 57 – 65.

*Стаття надійшла до редакції 05.05.2010 р.*