

В.А.ТИМОФЕЕВ, канд. техн. наук, ХНУРЭ (г. Харьков)

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Розглядається задача ідентифікації динамічного об'єкту в припущенні, що відомим є тільки рівень вади. Досліджено існуючі алгоритми. Розроблено рекуррентний алгоритм ідентифікації, що має супремальні властивості та властивості МНК-оцінок, виконано оцінку його збіжності. Перевагою розробленого алгоритму є простота його використання в задачах контролю та керування.

The problem of dynamical object identification is considered under suggestion that only noise level is known. A survey of existing algorithms is given. Recurrent identification algorithm is developed, having supremal properties of LSM-estimations and it's convergence is analyzed. The dignity of developed algorithm is simplicity it's application to the problems of monitoring and control.

Введение. На сегодня проблема управления техническим объектом в условиях неопределенности – одна из центральных проблем современной теории управления. Адекватным математическим аппаратом для решения этой проблемы является теория адаптивных систем управления, а широкое распространение микропроцессорной техники привело к развитию дискретных адаптивных систем управления [1 – 16].

К настоящему времени сформировался ряд относительно независимых направлений в теории адаптивных систем. Здесь, прежде всего, следует выделить адаптивные регуляторы с минимальной дисперсией (основополагающая работа [17]), адаптивные регуляторы с обобщенной минимальной дисперсией (основополагающие работы [18, 19]), адаптивные системы с требуемым размещением нулей и полюсов (основополагающие работы [19 – 21]), системы с адаптивными упредителями (основополагающая работа [22]).

Во всех этих подходах предполагается, что возмущения, действующие в системе, имеют стохастическую природу, причем это, как правило, белый шум с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией. В практических ситуациях статистические предпосылки являются надуманными, в связи с чем гораздо более реальными представляются допущения лишь об ограниченности шума или его разностей по амплитуде. В этих условиях использование методов идентификации, основанных на квадратичных критериях и, прежде всего, рекуррентного метода наименьших квадратов явно неэффективно. Возникающие затруднения частично могут быть преодолены в рамках адаптивных робастных систем управления [23 – 26], в которых, тем не менее, все равно «спрятаны» определенные статистические предпосылки.

В связи с этим представляется целесообразным осуществить синтез теории адаптивного и критического управления, что приведет к созданию адаптивных супремальных методов контроля, идентификации и управления динамическими объектами, функционирующими в условиях существенной неопределенности о характеристиках объекта и окружающей среды.

Целью настоящей работы и является разработка рекуррентного метода идентификации, обеспечивающего получение оценок, обладающих супремальными свойствами, которые не зависят от статистических характеристик сигналов и помех, и свойствами МНК-оценок.

Постановка задачи. Рассмотрим динамический объект, функционирующий в замкнутой системе управления $S_D(P, C)$, описываемый разностным уравнением

$$A(q)y(k) = q^{-d}B(q)u(k) + w(k), \quad (1)$$

где полиномы $A(q) \in R[q, n]$ с $a_0 = 1$, $B(q) \in R[q, m]$; d – время чистого запаздывания $d \in N^+$; y, u и w – выходной, управляющий и возмущающий сигналы соответственно.

Относительно возмущений предполагается ограниченность их первых разностей.

В случае, если параметры объекта априори известны и неизменны, задача критического управления может быть решена с помощью супремального регулятора, т.е.

$$\Delta F(q)B(q)u(k) = -E(q)y(k), \quad (2)$$

где полиномы $F(q) \in R[q, d-1]$ с $f_0 = 1$ и $E(q) \in R(q, n)$ задаются уравнением

$$\Delta A(q)F(q) + q^{-d}E(q) = 1.$$

В том случае, если параметры объекта неизвестны, можно воспользоваться тем или иным методом идентификации, а затем применить закон управления (2), в котором истинные значения параметров объекта заменены их оценками. В этом и состоит суть адаптивного подхода к проектированию систем управления объектами, функционирующими в условиях неопределенности. Как правило, в качестве процедур идентификации применяются те или иные модификации рекуррентного метода наименьших квадратов либо проекционные алгоритмы, так или иначе связанные с квадратичными критериями. При использовании критериев, отличных от квадратичных, например, модульных, хотя и получают робастные процедуры, статистический смысл задачи идентификации тем не

менее сохраняется. Естественно, что такие алгоритмы идентификации не могут быть использованы в критических системах управления.

В связи с этим возникает необходимость синтеза адаптивных алгоритмов идентификации, не связанных ни с какими статистическими предпосылками, обладающих высокой скоростью сходимости, вычислительной простотой и пригодных для работы в реальном времени в контуре критической системы управления динамическим объектом.

Алгоритмы идентификации, применяемые в критических системах.
Введем в рассмотрение полином

$$G(q) = 1 - \Delta A(q), \quad (3)$$

где $G(q) = g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \dots + q^{-n-1}$,

и перепишем уравнение объекта (1) в виде

$$y(k) = \Theta^T \psi(k-1) + \Delta w(k), \quad (4)$$

где $\Theta = (g_1, g_2, \dots, g_{n+1}, b_0, b_1, \dots, b_m)^T$;

$$\psi(k-1) = (y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n-1));$$

$$\Delta u(k-d), \Delta u(k-d-1), \dots, \Delta u(k-d-m))^T;$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1);$$

$$\Delta w(k) = w(k) - w(k-1).$$

Тогда задача идентификации с позиции теории критических систем сводится к нахождению оценок неизвестного вектора параметров Θ таких, что

$$\Xi(\hat{\Theta}) = \{ \hat{\Theta} : |y(k) - \hat{\Theta}^T \psi(k-1)| \leq \delta, \forall k \in N \}. \quad (5)$$

Здесь $\hat{\Theta}$ – оценка параметра Θ .

К настоящему времени сложился ряд подходов к задаче идентификации, связанной с неравенством (5). Это, прежде всего, подход Фогеля-Хуанга [27], в основе которого лежат некоторые геометрические построения. Известна также процедура Лозано-Лиладель-Ортеги [28], синтезированная как на геометрических предпосылках, так и исходя из условий устойчивости процесса сходимости. Нельзя не отметить также алгоритм Канудас де Вита-Каррильо [29], являющийся некоторой модификацией экспоненциально взвешенного рекуррентного МНК. Несмотря на эффективность этих процедур, их использование в критических системах наталкивается на серьезные затруднения.

Так, оптимальный алгоритм Фогеля-Хуанга настолько сложен с вычислительной точки зрения, что не может быть и речи о его использовании в режиме реального времени. Эта сложность обусловлена, прежде всего, необходимостью отыскания на каждой итерации глобального минимума многоэкстремальной функции $n+m+2$ переменных, что само по себе является достаточно сложной проблемой.

В алгоритме Лозано-Ли́ла-Ортеги, имеющем вид

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + \frac{\alpha P(k-1)\psi(k-1)}{1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} (|e(k)| - \delta_1 \text{sign } e(k), \alpha \in (0,1); \quad (6)$$

$$P^{-1}(k) = \begin{cases} P^{-1}(k-1) + \frac{\alpha P(k-1)\psi(k-1)}{(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))e(k)} (|e(k)| - S_1) \times \\ \quad \times \text{sign } e(k), & |e(k)| > \delta_1; \\ P^{-1}(k-1), & |e(k)| \leq \delta_1; \end{cases} \quad (7)$$

$$S_1 = \sqrt{1 + \alpha} \delta; \quad (8)$$

$$e(k) = y(k) - \hat{\Theta}^T(k-1)\psi(k-1), \quad (9)$$

априори предполагается ограниченность значения $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)$, из которого следует условие сходимости

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |e(k)| = \sqrt{1 + \alpha} \delta, \quad \alpha \in (0,1),$$

т.е. ошибка идентификации $e(k)$ никогда не может быть по модулю меньше заданных ограничений δ .

В алгоритме Канудас де Вита-Каррильо

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + \frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)}{\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} (|e(k)| - \delta) \text{sign } e(k); \quad (10)$$

$$P(k) = \lambda^{-1} (P(k-1) - \frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)P(k-1)}{\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} (1 - \frac{\delta}{|e(k)|})); \quad (11)$$

$$\lambda \in (0,1];$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} 1, & |e(k)| > \delta \quad \text{или} \quad \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1) = 0; \\ 0, & |e(k)| \leq \delta, \end{cases} \quad (12)$$

где $e(k)$ определяется соотношением (9),

$$e(k) = y(k) - \hat{\Theta}^T(k-1)\psi(k-1).$$

В ситуации, когда $|e(k)| > \delta$ и значение $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)$ близко к нулю, возникает режим неустойчивости, поскольку компоненты вектора

$$P(k-1)\psi(k-1)(\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))^{-1}$$

могут неограниченно возрастать. Кроме того, в случае, когда $\alpha(k) = 0$, невозможно гарантировать выполнение условия $|e(k)| \leq \delta$ в предположении, что $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)$ ограничено.

Модифицированный алгоритм идентификации и оценивание его сходимости. Объединяя достоинства рассмотренных процедур, можно ввести комбинированный алгоритм, являющийся своеобразной комбинацией рекуррентного МНК и процедур (6) – (8) и (10) – (12).

Рассмотрим алгоритм вида

$$\hat{\Theta}(k) = \hat{\Theta}(k-1) + \frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)}{1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} (|e(k)| - \delta) \text{sign } e(k); \quad (13)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)P(k-1)}{|e(k)| + (2|e(k)| - \delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} (|e(k)| - \delta); \quad (14)$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } |e(k)| > \delta, \\ 0, & \text{если } |e(k)| \leq \delta. \end{cases} \quad (15)$$

где $e(k)$ определяется в соответствии с (9) и проанализируем его сходимостью.

Введем в рассмотрение вектор уклонений оценок от истинных значений параметров

$$\tilde{\Theta}(k) = \Theta - \hat{\Theta}(k)$$

и функцию Ляпунова

$$V(k) = \tilde{\Theta}^T(k)P^{-1}(k)\tilde{\Theta}(k).$$

Объединяя (4) с (13) – (15), получаем

$$V(k) = V(k=1) + \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)}{(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|} \times \quad (16)$$

$$\times (\Delta w^2(k) - \frac{(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|^3}{|e(k)| + (2|e(k)| - \delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}).$$

С учетом ранее введенного условия $w \in D(0, \delta)$ несложно переписать (16) в виде неравенства

$$\begin{aligned}
 V(k) &\leq V(k-1) + \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)}{(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|} \times \\
 &\times \left(\delta^2 - \frac{(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|^3}{|e(k)| + (2|e(k)| - \delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} \right) = \\
 &= V(k-1) - \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)}{(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|} \times \\
 &\times \frac{(|e(k)|^3 - 2|e(k)|\delta^2 + \delta^3)(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)) + (|e(k)| - \delta)\delta^2}{|e(k)| + (2|e(k)| - \delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} \leq \\
 &\leq V(k-1) - \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)(|e(k)|^3 - 2|e(k)|\delta^2 + \delta^3)}{(|e(k)| + 2|e(k)| - \delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)|e(k)|},
 \end{aligned}$$

которое справедливо в случае $|e(k)| \geq \delta$. Кроме того, поскольку в этом случае

$$e^2(k) - 2\delta^2 + \frac{\delta^3}{|e(k)|} \geq |e(k)|(|e(k)| - \delta),$$

несложно видеть, что

$$V(k) \leq V(k-1) - \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)^2}{2(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))}, \quad (17)$$

откуда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(k)(|e(k)| - \delta)^2}{1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} = 0, \quad (18)$$

что свидетельствует о критериальной сходимости алгоритма (13) – (15).

Перенеся в левую часть (13) $\hat{\Theta}(k-1)$ и возведя обе части полученного выражения в квадрат, получаем

$$\begin{aligned}
 \left\| \Theta(k) - \hat{\Theta}(k-1) \right\|_{V(k)}^2 &= \frac{\alpha(k)\psi^T(k-1)P^2(k-1)\psi(k-1)}{(1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))^2} (|e(k)| - \delta^2) \leq \\
 &\leq \frac{\alpha(k)\lambda_{\max}(P(k-1))}{1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} (|e(k)| - \delta^2),
 \end{aligned} \quad (19)$$

где $\lambda_{\max}(P(k-1))$ – максимальное собственное значение матрицы $P(k-1)$.

Из (14) очевидно следует условие

$$\lambda_{\max}(P(k)) \leq \lambda_{\max}(P(k-1)) \leq \dots \leq \lambda_{\max}(P(0)),$$

позволяющее переписать (19) в виде

$$\left\| \hat{\Theta}(k) - \hat{\Theta}(k-1) \right\|_{V(k)}^2 \leq \alpha(k) \lambda_{\max}(P(0)) \frac{(|e(k)| - \delta)^2}{1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)},$$

который вместе с выражением (18) свидетельствует об аргументной сходимости алгоритма.

Далее, используя лемму об обращении матриц, запишем

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \frac{\alpha(k)\psi(k-1)\psi^T(k-1)}{1 + \psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)} \left(1 - \frac{\delta}{|e(k)|}\right),$$

откуда следует неравенство

$$\lambda_{\min}(P^{-1}(k)) \geq \lambda_{\min}(P^{-1}(k-1)) \geq \dots \geq \lambda_{\min}(P^{-1}(0)),$$

где $\lambda_{\min}(P^{-1}(k))$ – минимальное собственное значение матрицы $P^{-1}(k)$.

Это неравенство совместно с (17) приводит к тому, что

$$V(k) \leq V(0)$$

и

$$\lambda_{\min}(P^{-1}(0)) \left\| \tilde{\Theta}(k) \right\|_{V(k)}^2 \leq \lambda_{\max}(P^{-1}(k)) \left\| \tilde{\Theta}(0) \right\|_{V(k)}^2,$$

откуда можно записать выражение

$$\left\| \tilde{\Theta}(k) \right\|_{V(k)}^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(P^{-1}(k))}{\lambda_{\min}(P^{-1}(0))} \left\| \tilde{\Theta}(0) \right\|_{V(k)}^2,$$

определяющее скорость сходимости введенного алгоритма.

Выводы. В работе предложена модификация рекуррентного МНК, обладающая супремальными свойствами. Так как основой данного алгоритма является рекуррентный МНК, трудностей с его практической реализацией не возникает. Полученная оценка скорости сходимости предложенного алгоритма свидетельствует о том, что эта скорость в значительной мере определяется свойствами ковариационной матрицы наблюдений $P^{-1}(k)$ соотношением ее максимального и минимального собственных чисел). Кроме того, входящая в алгоритм величина δ зачастую известна лишь приближенно, поэтому необходимо в процессе идентификации осуществлять оценивание

(уточнение) этой величины и подставлять полученные оценки в алгоритм идентификации.

Список литературы: 1. *Isermann R.* Practical aspects of process identification // *Automatica*. – 1980. – 16. – P. 575–597. 2. *Evans R. J., Betz R. E.* New results and applications of adaptive control to classes of nonlinear systems // *Ricerche di Automatica*. – 1982. – 13. – № 2. – P. 277–297. 3. *Тыпкин Я. З.* The theory of adaptive and learning systems // *Cybern.: Theory and Appl.* – Washington, D. C., 1983. – P. 59–89. 4. *Aström K. J.* Theory and Applications of adaptive control – a survey // *Automatica*, 1983. – 19. – № 5. – P. 471–486. 5. *Цыпкин Я. З., Кельманс Г. К.* Дискретные адаптивные системы управления // *Итоги науки и техники. Техн. кибернетика*. – Т. 17. – М.: ВИНТИ, 1984. – С. 3–73. 6. *Navendra K. S., Annaswamy A. M.* Recent trends in adaptive control theory // *J. Soc. Instrum. and Control Eng.* – 1984. – 23. – № 5. – P. 27–34. 7. *Kumar P. R.* A survey of some results in stochastic adaptive control // *SIAM J. Control and Optim.* – 1985. – 23. – № 3. – P. 329–380. 8. *Unbehauen H.* Theory and application of adaptive control // *Proc. 7th IFAC/ IMACS Conf.* – Vienna. – 1985. – P. 1–17. 9. *Иванов В. А., Шанировский М. П.* Адаптивные системы управления с моделями // *Итоги науки и техники. Техн. кибернетика*. – Т. 18. – М.: ВИНТИ, 1986. – С. 210–240. 10. *King-Sun Fu.* Learning control systems – Review and outlook // *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intel.* – 1986. – 8. – № 3. – P. 327–342. 11. *De Keyser R. M. C.* Applying adaptive control problems and solutions // *Journal A.* – 1986. – 27. – № 3. – P. 111–119. 12. *Martin Sanchez J. M.* Adaptive control for time – variant processes // *Int. J. Contr.* – 1986. – 44. – № 2. – P. 315–329. 13. *Кунцевич В.М.* Адаптивное управление: алгоритмы, системы, применение. – К.: Выща шк., 1988. – 64 с. 14. *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высш. шк., 1989. – 263 с. 15. *Романенко В. Д., Пенатенко Б. В.* Адаптивное управление технологическими процессами на базе микроЭВМ. – К.: Выща шк., 1990. – 334 с. 16. *Aström K. J., Wittenmark B.* On self-tuning regulators // *Automatica*. – 1973. – 9. – P.185–199. 17. *Clarke D. W., Gawthrop P. J.* Self-tuning controller // *Proc. IEE.* – 1975. – 122. – P. 929–934. 18. *Wellstead P. E., Edmunds M. J., Prager D., Zanker P.* Self-tuning pole / zero assignment regulators // *Int. J. Contr.* – 1979. – 30. – № 1. – P. 1–26. 19. *Wellstead P. E., Prager D., Zanker P.* Pole assignment self-tuning regulator // *Proc. DEE.* – 1979. – 126. – D. – P. 781–787. 20. *Astrom K. J., Wittenmark B.* Self-tuning controllers based on pole-zero placement // *Proc. IEE.* – 1980. – 127. – D. – P. 120–130. 21. *Kreisselmeier G., Narendra K. S.* Stable MRAC in the presence of bounded disturbances // *IEEE Trans. on Autom. Contr.* – 1982. – 27. – P. 1169–1175. 22. *Clarke D. W., Mohiadi C., Tuffs P. S.* Generalized predictive control. Tue basis algorithm // *Automatica*. – 1987. – 22. – № 2. – P. 137–148. 23. *Samson C.* Stability analysis of adaptively controlled systems subject to bounded disturbances // *Automatica*. – 1983. – 19. – P. 81–89. 24. *Narendra K. S., Annaswamy A. M.* Robust adaptive control in the presence of bounded disturbances // *IEEE Trans. on Autom. Contr.* – 1986. – 31. – № 4. – P. 306–315. 25. *Ortega R., Lozano-Leal R.* A note on direct adaptive control of systems with bounded disturbances // *Automatica*. – 1987. – 23. – № 2. – P. 253–254. 26. *Fogel E., Huang Y. F.* On the value of information in system identification – bounded noise case // *Automatica*. – 1982. – 18. – № 2. – P. 229–238. 27. *Lozano-Leal R., Ortega R.* Reformulation of the parameter identification problem for system with bounded disturbances // *Automatica*. – 1987. – 23. – № 2. – P. 245–257. 28. *Canudas de Wit C.C., Carrilo J.* A modified EW – RLS algorithm for systems with bounded disturbances // *Automatica*. – 1990. – 26. – P. 599–606. 29. *Фомин В. Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. – Л.: Изд. ЛГУ, 1976. – 235 с.

Поступила в редакцию 17.04.04