

УДК 539.3

Сало В.А.

**РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ
ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА ЕГО ТОРЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ**

Методам расчета на прочность и жесткость оболочечных элементов конструкций посвящена обширная научная литература, однако проблема создания эффективных методов расчета упругих оболочек произвольной толщины до сих пор сохраняет свою значимость. В работе [1] автором предложен теоретически обоснованный и численно реализованный эффективный численно-аналитический RVR-метод решения пространственных краевых задач определения напряженно-деформированного состояния статически нагруженных ортотропных оболочек. Метод основан на использовании смешанного вариационного принципа Рейсснера, общих уравнений трехмерных задач теории упругости, метода И.Н. Векуа, алгоритма регулярного уточнения сдвиговой модели оболочки, апостериорной двусторонней оценки точности получаемых приближенных решений и математического аппарата R-функций, с помощью которых на аналитическом уровне учитывается геометрическая информация краевых задач и строятся структуры решений, точно удовлетворяющие всем граничным условиям.

В настоящей работе предлагается использование разработанного в монографии [1] RVR-метода для решения пространственной задачи о напряженно-деформированном состоянии толстостенного цилиндра, который находится под действием статической нагрузки при различных граничных условиях на торцах.

Рассмотрим осесимметричную задачу для нетонкого цилиндра длины $2a$ с радиусами $r = R_1$ внутренней и $r = R_2$ внешней лицевых поверхностей. Введем в срединной поверхности Ω_s цилиндра ортогональную криволинейную систему координат $\{s_1, s_2, z\}$, где s_1 – расстояние, измеренное вдоль образующей ($-a \leq s_1 \leq a$), s_2 – длина дуги направляющей, а координатная линия z ($-h/2 \leq z \leq h/2$) перпендикулярна поверхности Ω_s ($z = 0$).

Пусть на кольцевом участке $-c \leq s_1 \leq c$ внешней поверхности цилиндра действует равномерное давление p . Граничные условия на лицевых поверхностях Γ^\pm ($z = \pm h/2$) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{33} = 0; \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = -h/2, \\ \sigma_{33}|_{|s_1| \leq c} = -p; \quad \sigma_{33}|_{|s_1| > c} = 0; \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } z = h/2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для исследуемой осесимметричной (при $u_2 = 0, \sigma_{12} = 0, \sigma_{23} = 0$) задачи рассмотрим следующие однородные граничные условия на торце ($|s_1| = a$) цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \sigma_{11} = 0; \sigma_{13} = 0, \quad \text{b) } \sigma_{11} = 0; u_3 = 0, \\ \text{c) } u_1 = 0; \sigma_{13} = 0, \quad \text{d) } u_1 = 0; u_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Граничные условия (2a) соответствуют свободному краю, (2b) – краю с абсолютно жесткой в своей поверхности диафрагмой, (2c) – скользящей заделке края, (2d) – абсолютно заделанному краю (жесткому закреплению или защемлению).

Для статически нагруженных цилиндрических оболочек в работе [2] представлены общие структуры решений относительно независимых в функционале Рейсснера искомым компонент u_i вектора перемещения u и σ_{ij} тензора напряжений σ . В частности, для рассматриваемой осесимметричной задачи эти структуры решений, точно удовлетворяющих сформулированным условиям (1) и (2), приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sum_{k=0}^{l_1-1} \left[1 + b_{1k} (\omega_a - 1) \right] \sum_{p=0}^{m_1} a_1^{n_1} S_p(s_1) P_k(\zeta); \\ u_3 &= \sum_{k=0}^{l_3-1} \left[1 + b_{3k} (\omega_a - 1) \right] \sum_{p=0}^{m_3} a_3^{n_3} C_p(s_1) P_k(\zeta); \\ \chi \sigma_{11} &= \sum_{k=0}^{l_{11}-1} \left[b_{1k} + \omega_a (1 - b_{1k}) \right] \sum_{p=0}^{m_{11}} a_{11}^{n_{11}} C_p(s_1) P_k(\zeta); \\ \sigma_{22} &= \sum_{k=0}^{l_{22}-1} \sum_{p=0}^{m_{22}} a_{22}^{n_{22}} C_p(s_1) P_k(\zeta); \\ \chi \sigma_{13} &= \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{13}-1} \left[b_{3k} + \omega_a (1 - b_{3k}) \right] \sum_{p=0}^{m_{13}} a_{13}^{n_{13}} S_p(s_1) P_k(\zeta); \\ \chi \sigma_{33} &= \sigma_{33}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sum_{p=0}^{m_{33}} a_{33}^{n_{33}} C_p(s_1) P_k(\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $n_i = k(m_i + 1) + p + 1$ ($n_i \Rightarrow n_{ij}$); $a_i^{n_i}$, $a_{ij}^{n_{ij}}$ – искомые постоянные; $C_p(s_1)$ и $S_p(s_1)$ – четные и нечетные функции координаты s_1 ; $P_k(\zeta)$ – полиномы Лежандра;

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{2z}{h}; \quad \omega_\zeta = 1 - \zeta^2; \quad \omega_a = 1 - \frac{s_1^2}{a^2}; \quad \omega_c = 1 - \frac{s_1^2}{c^2}; \\ \sigma_{33}^* &= -\frac{p}{4} (1 + \zeta) \left(1 + \frac{h}{2R} \right) \left(1 + \frac{\omega_c}{|\omega_c|} \right); \quad \chi = 1 + \frac{h\zeta}{2R}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы в каждой записи граничных условий на торце цилиндра не встречались взаимно соответственные величины из перемещений и напряжений постоянные b_{ik} принимают значения единицы (задано перемещение) либо нуля (задано напряжение). Таким образом, граничным условиям (2abcd) соответствуют комбинации значений ($b_{1k} = 0, b_{3k} = 0$); ($b_{1k} = 0, b_{3k} = 1$); ($b_{1k} = 1, b_{3k} = 0$) и ($b_{1k} = 1, b_{3k} = 1$).

Введенные в структуры решений (3) числа l_i, l_{ij} аппроксимаций перемещений u_i и напряжений σ_{ij} по толщине оболочки определяют ее сдвиговую модель, выбор которой для структуры (3) соответствует заданию комбинации величин $(l_1, l_3, l_{11}, l_{13}, l_{33})$ при $i = 1, 2$. После подстановки (3) в вариационное уравнение Рейсснера [1] и численного интегрирования соответствующих интегралов краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно иско-

мых постоянных $a_i^{n_i}$, $a_{ij}^{n_{ij}}$, по найденным значениям которых определяются все характеристики напряженно-деформированного состояния расчетной области.

Численная реализация задачи выполнена для изотропного цилиндра при $a = 0.0135$ м ; $c = 0.00458$ м ; $R_1 = 0.022$ м ; $R_2 = 0.0335$ м ; $E = 191$ ГПа ; $\nu = 0.225$; $p = 652$ МПа. В зависимости от выбранной сдвиговой модели, заданной комбинацией чисел $(l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33})$, в табл. 1 при $m_i = m_{ij} = 14$ представлены результаты вычислений в сечении $s_1 = 0$ радиальных напряжений $\sigma_{33}/10^8$ и перемещений $u_3 \cdot 10^5$ для различных значений радиуса r .

Таблица 1 – Значения искомых величин для различных моделей оболочки

Модель оболочки	$\sigma_{33}/10^8$ Па				$u_3 \cdot 10^5$ м			
	$r = 0.024$	$r = 0.026$	$r = 0.029$	$r = 0.032$	$r = 0.024$	$r = 0.026$	$r = 0.029$	$r = 0.032$
[3]	<u>-0.75</u> -0.70	<u>-1.98/-2.65</u> -2.03	<u>-4.50</u> -4.47	<u>-6.02</u> -6.32	<u>-4.78</u> -4.91	<u>-4.87</u> -5.01	<u>-5.25</u> -5.37	<u>-5.86</u> -5.96
(6,6,6,6,6)	-0.647	-1.902	-4.233	-6.074	-4.751	-4.860	-5.248	-5.857
(5,5,5,5,5)	-0.624	-1.901	-4.238	-6.069	-4.750	-4.858	-5.245	-5.855
(4,3,4,3,2)	-0.625	-1.955	-4.279	-6.064	-4.743	-4.876	-5.256	-5.851
(4,2,4,2,1)	-1.200	-2.364	-4.059	-5.709	-4.761	-5.030	-5.433	-5.836
(2,2,2,2,1)	-0.934	-1.977	-3.695	-5.551	-4.901	-5.122	-5.452	-5.783

В первой строчке таблицы приведены результаты работы [3], полученные методом Шварца с использованием гибридных аппроксимаций (в числителях) и полученные (в знаменателях) с использованием НМГЭ – непрямого метода граничных элементов. Для значения $r = 0.026$ в числителе приведены два числа напряжения $\sigma_{33}/10^8$: первое число получено методом конечных элементов, второе – НМГЭ.

Результаты вычислений искомых величин существенно зависят от выбранной сдвиговой модели $(l_1, l_3, l_{ii}, l_{13}, l_{33})$ оболочки. В табл. 1 варианту (4,3,4,3,2) соответствует прикладная теория оболочек В.А. Родионовой, Титаева Б.Ф. и К.Ф. Черных [4]; варианту (4,2,4,2,1) – прикладная теория В.В. Пикуля [5]; варианту (2,2,2,2,1) – уточненная модель анизотропных оболочек Я.М. Григоренко [6].

Из анализа табл. 1 следует, что для исследуемой нетонкой (при $h / R = 0.414$) цилиндрической оболочки из рассмотренных известных в научной литературе уточненных теорий оболочек предпочтительнее использовать прикладную теорию четвертого приближения [4].

Таблица 2 – Значения искомых величин для разных граничных условий (2)

Искомая величина	E_{22}/E_{11}						
	5	4	2	1	0.5	0.25	0.2
$u_3^- \cdot 10^5$	<u>-24.25</u> -20.48	<u>-25.59</u> -23.83	<u>-54.40</u> -34.90	<u>-100.6</u> -44.40	<u>-190.3</u> -49.56	<u>-367.6</u> -48.45	<u>-456.1</u> -46.38
$u_3^0 \cdot 10^5$	<u>-21.05</u> -17.47	<u>-27.08</u> -21.65	<u>-53.79</u> -35.33	<u>-101.4</u> -47.11	<u>-191.9</u> -53.81	<u>-369.7</u> -53.29	<u>-458.1</u> -51.09
$u_3^+ \cdot 10^5$	<u>-22.00</u> -18.88	<u>-28.99</u> -24.22	<u>-58.01</u> -40.91	<u>-107.1</u> -54.84	<u>-198.4</u> -62.83	<u>-376.5</u> -62.66	<u>-465.0</u> -60.27
$\sigma_{22}^- / 10^8$	<u>-9.891</u> -8.664	<u>-9.498</u> -7.894	<u>-8.248</u> -5.168	<u>-7.224</u> -2.507	<u>-6.560</u> -0.476	<u>-6.215</u> 0.804	<u>-6.166</u> 1.075
$\sigma_{22}^0 / 10^8$	<u>-12.80</u> -11.84	<u>-11.94</u> -10.70	<u>-9.677</u> -7.348	<u>-8.095</u> -4.559	<u>-7.110</u> -2.589	<u>-6.518</u> -1.433	<u>-6.370</u> -1.229
$\sigma_{22}^+ / 10^8$	<u>-18.16</u> -17.39	<u>-16.23</u> -15.66	<u>-13.02</u> -11.23	<u>-10.84</u> -8.132	<u>-9.666</u> -6.211	<u>-9.233</u> -5.356	<u>-9.269</u> -5.349

На рис. 1 для различных граничных условий на торцах показано распределение радиального перемещения u_3 по толщине ($|\zeta| \leq 1$) в сечении $s_1 = 0$ и вдоль образующей нагруженной внешней ($\zeta = 1$) лицевой поверхности цилиндра. Цифры 1,2,3,4 возле графиков соответствуют граничным условиям (2a), (2b), (2c), (2d).

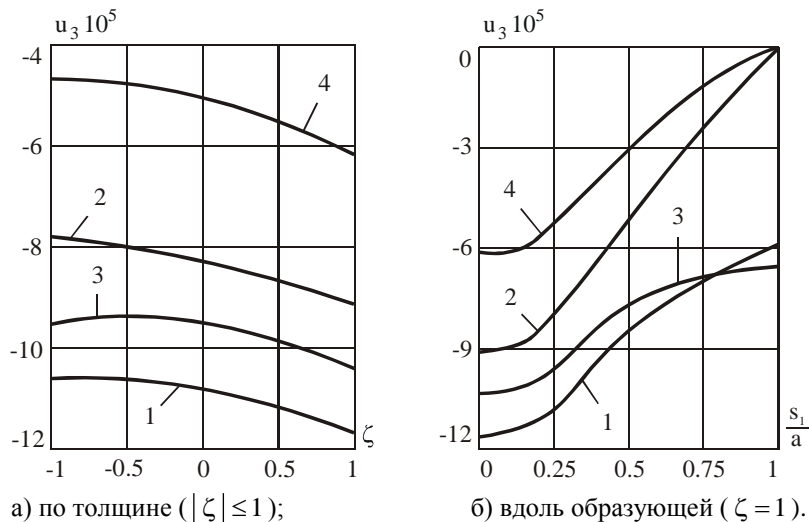


Рисунок 1 – Распределение радиального перемещения u_3

Рассмотрим ортотропный цилиндр с параметрами: $E_1 = E_3 = 20$ ГПа ; $G_{13} = 1$ ГПа ; $\nu_{ij} = 0.3$. В зависимости от значения соотношения E_2 / E_1 при использовании сдвиговой модели $l_i = l_{ij} = 6$ ($m_i = m_{ij} = 14$) уточненной теории оболочек шестого приближения в табл. 2 представлены результаты вычислений искомых перемещений и напряжений в точках $\zeta = -1, 0, +1$ сечения $s_1 = 0$ цилиндра. В числителях представлены результаты для цилиндра со свободными торцевыми поверхностями (2a), в знаменателях – с жестко закрепленными торцами (2d).

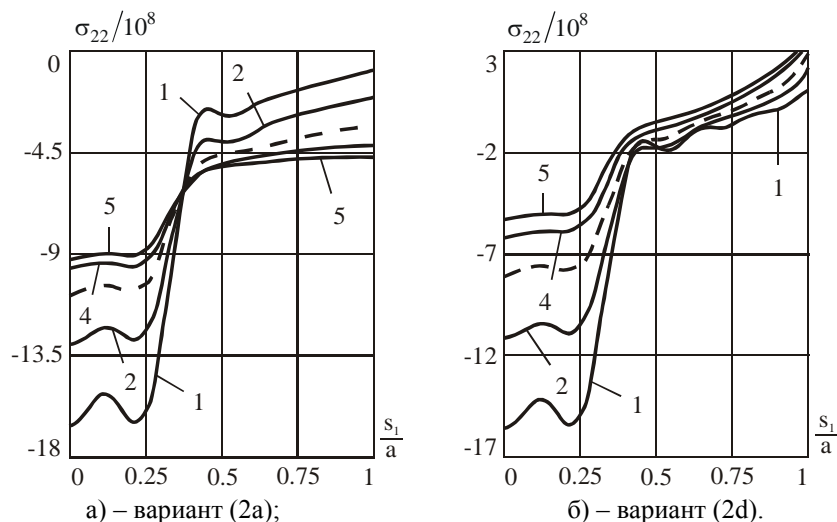


Рисунок 2 – Распределение напряжения σ_{22} вдоль образующей ($\zeta = 1$)

На рис. 2 для ортотропного цилиндра по его толщине в сечении $s_1 = 0$ и вдоль образующей ($\zeta = 1$) показаны графики распределения напряжения σ_{22} в зависимости

от анизотропии материала и условий на торцах. Цифры 1, 2, 3, 4, 5 возле графиков рис. 2 соответствуют значениям соотношения $E_2/E_1 = 4, 2, 1, 0.5, 0.25$, а штриховой линией показан график для трансверсально-изотропной ($E_2/E_1 = 1$) оболочки.

Как следует из рис. 2, увеличение в интервале $0.25 \div 4$ соотношения E_2/E_1 , характеризующего жесткость материала, приводит в рассмотренных примерах к существенному изменению величины окружного напряжения σ_{22} .

Выполненное численное исследование подтверждает возможность эффективно-го использования предложенного научно обоснованного численно-аналитического RVR-метода [1] при расчете нетонких анизотропных оболочек. В полученных структурах решений, учитывающих изменение метрики оболочки по толщине, сформулированным граничным условиям задачи однозначно соответствуют определенные комбинации значений введенных в структуры исходных параметров b_{ik} , задание которых позволяет использовать созданную алгоритмическую программу для решения краевой задачи с различными вариантами граничных условий.

Из опыта решения многочисленных задач различной сложности следует отметить, что в случае программной реализации апостериорной интегральной оценки численных результатов процесс сходимости решения имеет устойчивый характер, а сам метод двусторонних оценок точности приближенных решений [1] – эффективное средство проверки достоверности получаемых численных результатов.

Литература

1. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с.
2. Сало В.А., Слесар Е.П. Исследование напряженно-деформированного состояния упругих цилиндров произвольной толщины // Научно-практичний журнал “Інтегровані технології та енергозбереження”. – Харків: НТУ (ХПІ), 2003. – № 4. – С. 82-87.
3. Березюк Т.Б., Григоренко А.Я., Дыак И.И. Решение задачи о напряженном состоянии цилиндра конечной длины методом Шварца с использованием гибридных аппроксимаций // Прикладная механика. – Киев, 2003. – Т. 39, № 10. – С. 69-74.
4. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. – СПб.: Изд-во С. Петербург. Ун-т, 1996. – 278 с.
5. Пикуль В.В. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1989. – 221 с.
6. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – К.: Наукова думка, 1987. – 216 с.

УДК 539.3

Сало В.А.

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННОГО ЦИЛІНДРА ДЛЯ РІЗНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ЙОГО ТОРЦЕВИХ ПОВЕРХНЯХ

Запропоновано підхід до визначення напружено-деформованого стану пружних оболонок довільної товщини. Використовуваний RVR-метод заснований на варіаційному принципі Рейсснера, теорії R-функцій, загальних рівнянь тривимірної теорії пружності, методу И.Н. Векуа й алгоритму двосторонньої оцінки точності наближених рішень змішаних варіаційних задач. Ефективність методу показана на прикладах.