

**КОНТАКТ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ:
СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА**

Введение. Многие машиностроительные конструкции содержат элементы, основное функциональное предназначение которых – передача значительных эксплуатационных усилий и движений между отдельными телами (детальями). Это, например, опоры вращения и скольжения, подшипники, зубчатые колеса, кулачки, коленчатые валы, гидрообъемные передачи, механизмы перекачивания и наклона, катки, приводные колеса цепных приводов и гусеничных движителей. Для них характерно, что основные взаимные движения осуществляются перекачиванием (со скольжением или без) сопряженных поверхностей взаимодействующих тел друг с другом, а основным рабочим усилием является нормальная сила контактного взаимодействия. При проектировании таких конструкций, соответственно, возникают две последовательные задачи, связанные логикой и последовательностью проектно-исследовательских работ: геометрический синтез поверхностей этих деталей и анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) образуемых сложнопрофильных тел (СПТ) с учетом контактного взаимодействия. Эти задачи получили частичное решение в работе [1]. При этом в качестве метода геометрического синтеза был использован кинематический метод Литвина, а для анализа напряженно-деформированного состояния взаимодействующих тел привлечены модели Герца, методы конечных элементов (МКЭ) и граничных элементов (МГЭ). В целом была создана достаточно эффективная методология, направленная на последовательно-итерационное решение задач геометрического синтеза и анализа НДС (именно в такой последовательности).

В то же время, как показывает анализ многих конструкций, требования к сопряженным поверхностям, записанные в виде строгих уравнений, допускающих, как правило, единственное решение, оказываются излишне жесткими. Для таких случаев условие кинематического сопряжения могут зачастую быть ослаблены и записаны в виде неравенств, требований выпуклости, соотношения радиусов кривизны и т.д.

Таким образом, возникает некоторая свобода варьирования геометрической формы при синтезе сопряженных в подвижном контакте поверхностей, образующая подмножество G возможных решений. Если теперь принять во внимание, что в соотношения для анализа НДС с учетом контактного взаимодействия входит в качестве исходных данных геометрическая информация о контактирующих поверхностях, то возникает возможность за счет варьирования их геометрической формы провести ее оптимизацию внутри области кинематически допустимых решений G . На этом этапе получаем полностью связанную задачу анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза (теперь в таком порядке в формальной записи). Эта новая задача является предметом рассмотрения в данной работе.

Целью исследований при этом является разработка общего подхода к решению поставленной задачи и одной из возможных ее математических формулировок.

Общая формулировка задачи. Рассмотрим подвижный контакт гладких тел 1 и 2, ограниченных кинематически генерируемыми поверхностями (КГП) [1], по которым эти тела сопрягаются в ходе непрерывного взаимного движения. Как известно, условие реализации такого движения [2] –

$$\mathbf{V}_{12} \times \mathbf{n} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{V}_{12} – скорость относительного движения тел 1 и 2; \mathbf{n} – вектор нормали в точке текущего сопряжения тел по кинематически генерируемым поверхностям, при задании (или фиксировании) формы поверхности одного из тел приводит к формированию системы нелинейных уравнений, из которых по координатам точки заданной КГП можно восстановить координаты точки, ей сопряженной, на искомой КГП. При определенных дополнительных условиях из (1) формируется система двух облаков попарно сопряженных точек кинематически генерируемых поверхностей, обеспечивающих двухпараметрическое взаимное движение тел 1 и 2.

В то же время, изменяя условия задания поверхностей тел 1 и 2, а также требований к их взаимным движениям, можно отойти от чрезмерно жестких условий (1).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. *Случай однопараметрического движения при точечном первоначальном контакте.* В относительном движении тел 1 и 2, занимающие области Ω_1 и Ω_2 , которые ограничены КГП S_1 и S_2 соответственно, совершают перемещения, для которых вектор относительной скорости \mathbf{V} содержит только одну ненулевую компоненту (рис. 1):

$$\mathbf{V} = \{V_1; V_2\}^T, \quad V_1 \neq 0; V_2 \equiv 0. \quad (2)$$

Тогда для реализации такого движения достаточно выполнения условия

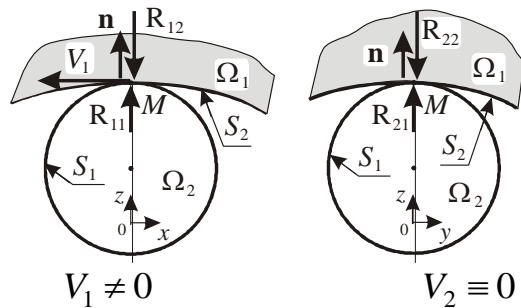


Рис. 1. Случай однопараметрического взаимного движения тел 1 и 2

$$R_{11} < R_{12}, \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \{M\}, \quad (3)$$

где R_{11}, R_{12} – радиусы кривизны поверхностей 1 и 2 в одной из плоскостей Π_1 (xOz) главных кривизн; π_1, π_2 – профили, образуемые пересечением другой плоскости главных кривизн Π_2 (yOz) с поверхностями S_1 и S_2 соответственно:

$$\pi_1 = \Pi_2 \cap S_1, \quad \pi_2 = \Pi_2 \cap S_2. \quad (4)$$

Точка М в этом случае является *точкой первоначального контакта в ненагруженном состоянии* тел 1 и 2:

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{M\}. \quad (5)$$

Если множеством *первоначального контакта* является линия L , то имеем:

2. *Случай однопараметрического движения при линейчатом первоначальном контакте:*

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{L\}; \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \{L\}. \quad (6)$$

Ограничения – те же, что и для случая 1.

3. *Случай первоначального контакта по поверхности S.* Если

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{S\}, \quad (7)$$

то возможны варианты:

- если S – часть плоскости, возможны три взаимных движения тел 1 и 2;
- если S – цилиндрическая поверхность, то – два;

- если S – произвольная поверхность вращения или винтовая поверхность, то – одно;
- если S – поверхность общего вида, то реализуется неподвижный контакт тел 1 и 2.

Для последнего случая

$$\mathbf{V} \equiv 0, \quad (8)$$

и реализуется контакт по конгруэнтным, совпадающим, согласованным [3] поверхностям.

Уравнения (5)-(7) описывают разные случаи контактного сопряжения. Они определяют вместе с другими соотношениями (2)-(8) условия кинематического сопряжения абсолютно твердых тел 1 и 2 по кинематически генерируемым поверхностям S_1, S_2 . При этом явно или неявно задаваемые ограничения типа (3) или (6), (7) определяют подмножество G , конкретизируемое для того или иного объекта по-разному. Например, это может быть условие отсутствия подрезания в зубчатом зацеплении, недопущения интерференции материала шарового поршня и беговой дорожки в радиальной гидропередаче [4], отсутствие взаимопроникновения опорного материала сегмента механизма наклона плавильной печи в элементы базовой опорной конструкции [5].

Таким образом, формально кинематически генерируемые поверхности S_1, S_2 можно определить как подмножество пар поверхностей, удовлетворяющих кинематическим условиям G сопряжения абсолютно твердых тел Ω_1 и Ω_2 .

Учитывая, что в общем случае поверхности S_1, S_2 имеют сложную форму, то и, соответственно, тела Ω_1 и Ω_2 будут сложнопрофильными. Эти сложнопрофильные тела на этапе расчета напряженно-деформированного состояния с учетом контактного взаимодействия представимы в виде деформируемых гладких тел с непрерывно поварачивающейся нормалью на S_1, S_2 .

Следуя [1, 3, 6], условие непроникновения можно записать в виде (рис. 2):

$$g_N = (x^2 - \hat{x}^1) \cdot \hat{n}_1 \geq 0. \quad (9)$$

Здесь g_N – зазор между поверхностями; \hat{n}_1 – нормаль к Γ_c . Выполнение условия неотрицательности этой функции и обеспечивает отсутствие взаимного проникновения тел (т.е. интерференции материалов тел 1 и 2).

При малых деформациях для геометрически линейной модели деформирования можно записать условие непроникновения в виде:

$$(u^2 - \hat{u}^1) \cdot \hat{n}_1 + g_X \geq 0, \quad (10)$$

где $u^\alpha, \alpha=1,2$ – перемещения тел:
 $x^\alpha = X^\alpha + u^\alpha$, а $g_X = (X^2 - \hat{X}^1) \cdot \hat{N}^1$

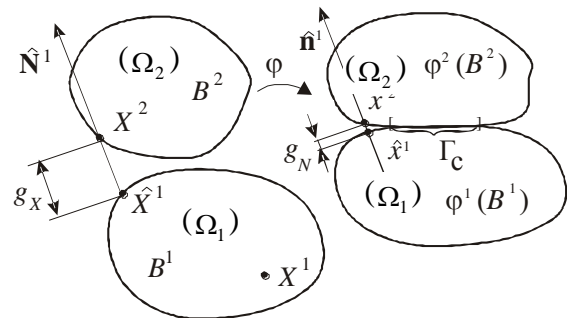


Рис. 2. Кинематика контакта тел 1 и 2 с гладкой границей:

φ – отображение из начальной в актуальную конфигурацию;

Γ_c – область контакта тел в актуальной конфигурации; Ω_1, Ω_2 – области, занимаемые телами 1 и 2

Основными сложностями при включении условий (9), (10) в модели контакта является их нелинейность. Контактное взаимодействие является односторонним ограни-

чением [3, 6-10]. Величина нормальных контактных давлений p_N (т.е. действующих по нормали к поверхности контакта) определяется как реакция в зоне контакта S и вычисляется по активным ограничениям в системе. Контактные давления в случае без адгезии должны быть сжимающими: $p_N = p_N^1 = p_N^2 \leq 0$. Таким образом, следуя [1], обобщая оба возможных случая: контакта, когда $g_N = 0$ и $p_N < 0$, и отрыва, когда $g_N > 0$ и $p_N = 0$, можно записать следующие соотношения на границе:

$$g_N \geq 0; p_N \leq 0; p_N g_N = 0. \quad (11)$$

Они известны как условия Герца-Синьорини для нормального контакта тел без трения. Эта запись используется в различных постановках контактных задач как задач минимизации с ограничениями. Соотношения (11) естественным образом повторяют условия Каруши-Куна-Таккера в задачах выпуклого программирования. При этом следует отметить их недифференцируемость, в результате чего многообразие допустимых состояний в слабых (вариационных) постановках контактных задач также является недифференцируемым.

Кинематическая модель контакта деформируемых тел приводит к соотношениям, относящимся лишь к границам S_1 и S_2 тел 1 и 2. Для построения замкнутой математической модели напряженно-деформированного состояния тел 1 и 2 с учетом контакта необходимо использовать уравнение состояния в самих телах. В случае контакта линейно упругих тел система соотношений теории упругости для каждого из тел имеет вид [11] (индексы 1 и 2 опускаются):

$$Div \sigma + \mathbf{f} = 0, X \in B; \quad (12)$$

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) / 2; \quad (13)$$

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (14)$$

где σ, ε, E – тензоры напряжений, деформаций и модулей упругости.

На границе тел 1 и 2 будем рассматривать три типа граничных условий:

- кинематические (типа Дирихле) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma, X \in \Gamma_u; \quad (15)$

- силовые (типа Неймана) $\sigma \mathbf{n} = \mathbf{t}_\Gamma, X \in \Gamma_\sigma; \quad (16)$

- условия контакта (10),

где $u_N = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ – нормальное смещение точек поверхности, t_Γ – заданное внешнее давление на поверхностях тел.

Условия (10) задают вместе с классическими граничными условиями (15), (16) подмножество K допустимых распределений перемещений \mathbf{u} . На этом множестве $\mathbf{u} \in K$ ищется решение задачи (\mathbf{u}, p_N) . В частности, с применением теории вариационных неравенств [12-14] можно локальную постановку задачи анализа НДС с учетом контактного взаимодействия тел 1 и 2 свести к вариационному неравенству:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in K, \mathbf{u} \in K. \quad (17)$$

Здесь $a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha); L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)$, т.е. a и L суть суммы билинейной и линейной форм для каждого из тел 1 и 2:

$$a_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{\Omega_\alpha} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\Omega; \quad (18)$$

$$L_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{(\Gamma_\alpha)} t_\Gamma(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma. \quad (19)$$

(здесь индексы α в \mathbf{u}, \mathbf{v} опущены).

В свою очередь вариационное неравенство (17) имеет решением аргумент функционала I , на котором он достигает минимума

$$I(\mathbf{u}) = 1/2 a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min, \mathbf{u} \in K. \quad (20)$$

Итак, описывая геометрическую форму взаимодействующих тел 1 и 2 в начальной конфигурации обычными или обобщенными параметрами $\bar{p}_1, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{N_p}$, которые формируют вектор $\bar{\mathbf{P}}$, получаем из условия кинематического сопряжения абсолютно твердых тел подмножество G , которое можно идентифицировать в виде системы ограничений

$$G(\bar{\mathbf{P}}) \geq 0. \quad (21)$$

При этом подразумевается справедливость прямого и обратного соответствий:

$$S_1 = S_1(\bar{\mathbf{P}}); \quad S_2 = S_2(\bar{\mathbf{P}}); \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}(S_1, S_2). \quad (23)$$

Тогда (21) можно представить в виде:

$$G(\bar{\mathbf{P}}(S_1, S_2)) \geq 0. \quad (24)$$

В актуальной конфигурации деформируемые твердые тела удовлетворяют условию минимума функционала

$$I(\mathbf{u}, S_1, S_2) \rightarrow \min, \mathbf{u} \in K(S_1, S_2), \quad (25)$$

где S_1, S_2 можно рассматривать как параметры, неявно присутствующие в определении форм a и L (через $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(S_\alpha); \Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(S_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$), а также K (через ограничения (10), записанные для функций \mathbf{u}_α , определенных на S_α , $\alpha = 1, 2$).

Таким образом, задачу определения напряженно-деформированного состояния тел 1 и 2 с учетом контактного взаимодействия по кинематически генерируемым поверхностям S_1, S_2 можно представить как связанную задачу (25), (24). Ее можно сформулировать как задачу поиска \mathbf{u} , доставляющего минимум некоторому функционалу I на выпуклом множестве K при варьируемых в пределах подмножества G КГП S_1 и S_2 .

Гранично-элементная формулировка связанной задачи. Сложность решения связанной задачи (24), (25) состоит, прежде всего, в трудностях при оперировании с геометрической информацией (т.е. определении S_1, S_2 , подмножества G , а также способа варьирования S_1 и S_2). В общем случае это можно осуществлять путем варьирования параметров $\bar{p}_i \in \bar{\mathbf{P}}$. Тогда S_1 и S_2 изменяются, влияя на напряженно-деформированное состояние. Однако при таком способе варьирования трудно контролировать локальные и глобальные свойства поверхностей S_1 и S_2 . Наоборот, оперируя ими, сложно подчинять поверхность условиям кинематического сопряжения.

В то же время при некоторых условиях можно предложить способ прямого сопряжения геометрических данных и полевых распределений искоемых компонент НДС. Так, например, если форма и размеры взаимодействующих тел удовлетворяют условиям гладкости S_1 и S_2 , а также возможности интерпретации Ω_1, Ω_2 как полупространств, можно использовать один из вариантов метода граничных интегральных уравнений (МГИУ), описанный в [1]. В соответствии с [1] для описания зазора между контактирующими телами 1 и 2 вводится система координат, центр которой (точка O) традиционно располагается на линии действия прижимающей силы P (рис. 3). Оси z_1 и z_2 имеют направление вовнутрь тел 1 и 2. Тогда уравнения каждой из поверхностей можно записать как $z_i = z_i(x, y)$, $i = 1, 2$, а зазор – соответственно как $h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y)$.

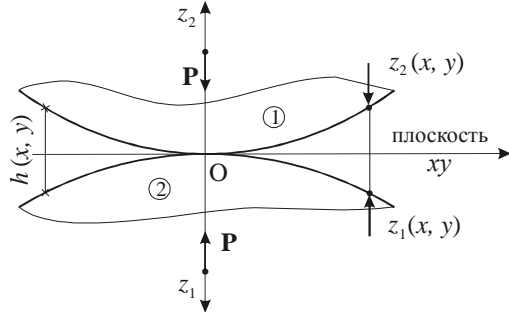


Рис.3. Представление локального зазора между контактирующими телами

В деформированном состоянии оба тела 1 и 2 приводятся в контакт по некоторой площадке. При этом перемещение произвольной точки поверхностей S_i каждого из тел в направлении оси z складывается из смещения тела как жесткого – δ_i и отклонения u_{z_i} (рис. 4) от недеформированной формы соответствующей поверхности (соответствует деформациям, которые вызваны действием искомого контактного давления). Тогда приходим к следующей общепринятой записи нелинейных соотношений для нормального контакта:

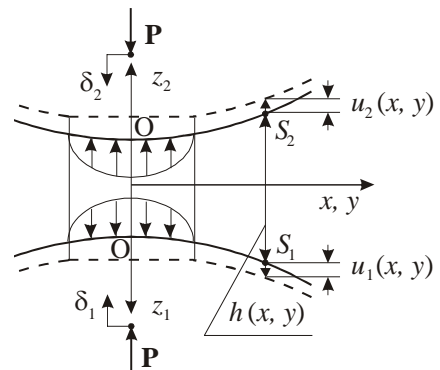


Рис.4. Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте,} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (26)$$

При этом для упругого полупространства известно интегральное соотношение между нормальным давлением и нормальными перемещениями точек границы (рис. 5) [11]:

$$u_z(x, y) = \frac{(1 - \nu^2)}{\pi E} \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta, \quad (27)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Выражая перемещения $u_{z_1}(x, y)$ и $u_{z_2}(x, y)$ через единую функцию распределения давления $p(x, y)$, получаем:

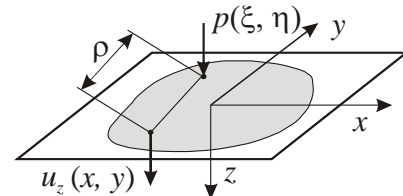


Рис.5. Перемещение границы полупространства под действием нормального усилия

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \times \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \quad (28)$$

Здесь $\nu_i, E_i, i = 1, 2$ – упругие параметры материалов каждого из контактирующих тел. Площадка контакта S и распределение давлений $p_N = p(\xi, \eta)$ (здесь и ниже $p \geq 0$ с учетом принятых на рис. 4-6 направлений), фигурирующие в правой части равенства, являются искомыми неизвестными. Для дискретизации разрешающих соотношений используется кусочно-линейное представление распределения действующих усилий, которому отвечают непрерывные и гладкие смещения точек поверхности, что характерно для контакта сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями. Искомая функция контактных давлений $p_N = p(x, y)$ аппроксимируется суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений с вершинами в узлах регулярной сетки с шагом c , состоящей из равносторонних треугольников (рис. 6, 7). При этом она полностью определяется дискретным набором конечного числа узловых значений давлений p_n : $p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n$.

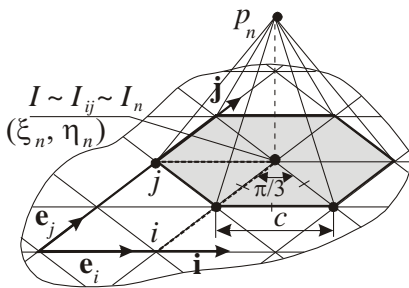


Рис. 6. Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления

Для нахождения искомых величин усилий в узлах сетки, которые наилучшим образом удовлетворяют условиям на границе, применимы различные подходы [1], в частности, вариационный метод (принцип Калькера). При его использовании в качестве действительных принимаются такие узловые значения контактных давлений, которые минимизируют функционал энергии [15]. При этом требуется способ вычисления нормальных смещений (28) для используемого типа аппроксимирующих давлений. Такая задача эквивалентна

определению перемещений u_z , которые отвечают каждой из базисных нагрузок. В работе [1] описан способ аналитического вычисления коэффициентов такого представления.

Для узловых точек с некоторым индексом n , соответствующим паре номеров (i, j) :

$$u_n = \sum_m C_{nm} p_m, \quad (29)$$

где C_{nm} – компоненты матрицы коэффициентов влияния C , которая связывает узловые значения перемещений точек границы S с узловыми значениями контактных давлений.

Согласно принципа Калькера [15], для истинных областей контакта и контактного давления, действующего в сопряжении тел 1 и 2, достигается минимум функционала полной дополнительной работы Φ на множестве всех возможных неотрицательных распределений давлений p . Вид этого функционала:

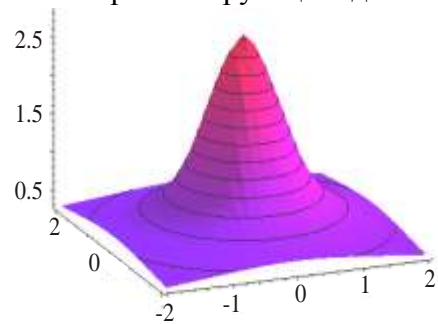


Рис.7. Распределение перемещений точек поверхности полупространства от действия давления (см. рис. 6)

$$\left\{ \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; \quad p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S. \right.$$

Из этого условия с учетом (29) получаем:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n - \text{ в контакте,} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n - \text{ вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (30)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарное сближение тел как жестких; $h_n = h(x_n, y_n)$ – узловые значения первоначального зазора.

Условие неотрицательности контактных давлений накладывает на искомые узловые значения следующие ограничения:

$$p_m \geq 0, \quad m = 1, N. \quad (31)$$

Кроме того, вне зоны контакта контактные давления должны быть нулевыми, откуда

$$p_m = 0, \quad J_m - \text{ вне зоны контакта.} \quad (32)$$

Интегральное соотношение для p_m :

$$\sum_m \sqrt{3} c^2 p_m / 2 = P. \quad (33)$$

Система соотношений (30)-(33) разрешается единственным образом относительно искомых неизвестных $\{p_m\}_{m=1}^N$ и δ . При их определении форма и размеры области контакта S обычно неизвестны. Поэтому для начала обычно строится сетка и делается начальное предположение о текущем (начальном) приближении области контакта S таким образом, чтобы принадлежащие ей узлы заведомо покрывали настоящую область контакта. В ходе последующей итерационной процедуры одновременно уточняются как форма области контакта, так и значения контактных узловых давлений. На каждом шаге итерационного уточнения имеется множество N_c , состоящее из текущих индексов n_c тех узлов, которые предположительно входят в контакт. Для этих узлов должны выполняться уравнения из системы (30), а также равенство (33):

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = h_{n_c}, n_c \in N_c; \quad \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{aligned} \right. \quad (34)$$

Последнее равенство в полученной системе записано с учетом условия (32): $p_m = 0, m \notin N_c$. Соотношения (34) образуют систему линейных алгебраических уравнений из $(N_c + 1)$ -го уравнения относительно такого же числа неизвестных. Матрица этой системы формируется из коэффициентов матрицы влияния C_{nm} и весовых множителей из равенства (33). Данная система имеет единственное решение. Полученные как ее текущее решение узловые значения $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$ могут быть такими, что будут нарушать условие (31). Это будет означать, что текущие размеры зоны контакта завышены. Тогда индексы узлов, в которых это нарушение зафиксировано, исключаются из множества N_c , и производится следующий шаг итерации. Так происходит до той поры, пока решение системы (34) даст неотрицательные искомые узловые давления в зоне контакта.

В большинстве случаев этот результат является окончательным. Однако при этом требуется дополнительная проверка на выполнение второго типа из условий, представленных в (30). Вне зоны контакта S не должно наблюдаться взаимного проникновения взаимодействующих тел. Если же в части узлов, не вошедших в текущее приближение области контакта, не будут соблюдаться указанные неравенства, то их индексы включаются во множество N_c и повторяется итерационная процедура.

Анализ представленных соотношений дает основание для следующих выводов.

1. Формально уравнения (34) объединяют в прямом «сконденсированном» виде:

- физико-механические характеристики исследуемой системы (они представлены матрицей коэффициентов влияния C_{nm});
- компоненты напряженно-деформированного состояния (в виде распределенных контактных давлений p_m , через которые по известным соотношениям восстанавливаются все компоненты векторов перемещений, напряжений и деформаций на границах и внутри областей Ω_1, Ω_2);
- интегральное усилие P ;
- сближение тел как жестких – δ ;
- геометрическая форма сопряженных поверхностей (натянуты на дискретное множество ординат h_1, h_2 в узловых точках).

2. Полученная система уравнений является формально линейной по узловым контактным давлениям p , суммарным зазорам h , смещениям δ и силе P .

3. Формально решение (p_m, δ) не зависит от распределения узловых значений расстояний до поверхности S_1 и S_2 (т.е. h_1, h_2 соответственно), а только от их суммы $h = h_1 + h_2$. Таким образом, при предложенном подходе система не отражает индивидуальность каждой из сопряженных поверхностей, а только суммарность зазора между ними. Иными словами, распределение контактного давления «индифферентно» по отношению к условному «переносу» тонкого поверхностного слоя из одного тела на другое. В частности, одну из поверхностей (S_1 или S_2) можно «уплосщить» за счет такой процедуры, отнеся все их суммарные отступления от плоской формы на другую.

4. Система уравнений (34) относительно искомых (p_m, δ) хотя и выглядит идентично линейным алгебраическим уравнениям, не является по сути линейной в силу ограничений на неотрицательность p_m внутри области контакта, их обнуление вне этой зоны, а также в силу недопустимости контакта вне этой области.

5. Формально систему (34) можно «инвертировать», т.е. трактовать ее как уравнения относительно неизвестных (p_m, δ) , доставляющих системе заданное сближение δ и навязанное распределение p_m .

Последний из выводов отображает свойство обратимости и связанности, выраженное в системе уравнений (34) в явном виде. Действительно, при анализе напряженно-деформированного состояния (т.е. когда искомыми являются (p_m, δ) при заданных (h_m, P)) геометрическую форму поверхностей (в смысле интегральную функцию зазора, см. вывод 3) задает набор h_m , при этом варьирование геометрической формы осуществляется путем покомпонентного изменения h_m . С другой стороны, при определении формы зазора в сопряжении контактирующих тел (т.е. когда искомые и заданные величины меняются местами) можно задавать желательное распределение контак-

ного давления p_m путем назначения его узловых значений, а также варьировать его, просто меняя покомпонентно массив этих узловых контактных давлений. При этом следует заметить, что и прямая (см. вывод 4), и обратная трактовка системы уравнений (34) не позволяет оперировать с ними как с линейными, поскольку действует, кроме них, еще и множество ограничений (30)-(32).

Таким образом, предложенная система соотношений дает возможность, оперируя в основном только с ней, организовать решение связанной задачи анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза. При этом в качестве исходной информации задается кинематическое ограничение G . Например, для случая однопараметрического движения без проскальзывания тела вращения 2 по беговой направляющей радиуса R_1 (рис. 8):

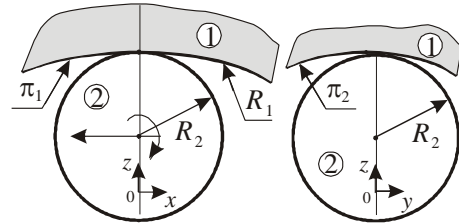


Рис. 8. Частный случай сопряжения тел

$$h \approx \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{R_1 - R_2} + \frac{y^2}{\pi_2'' \Big|_{y=0} - R_2} \right), \quad (35)$$

где $\pi_2(y)$ – профиль тела 1 в сечении плоскостью zOy .

Тогда задавая изначально R_1, R_2 и зафиксировав в дальнейшем $R_2 = const > 0$, подмножество G определяем как указано на рис 9:

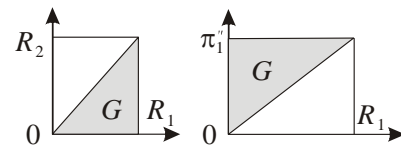


Рис. 9. Ограничения на геометрические параметры

$$\{ R_1 > R_2; \pi_2'' \Big|_{y=0} > R_2 \} \quad (36)$$

В терминах дискретных величин имеем:

$$\begin{cases} \frac{h(i+1, j) - 2h(i, j) + h(i-1, j)}{2\Delta_x^2} = \frac{1}{R_1 - R_2} = const > 0; \\ \frac{h(i, j+1) - 2h(i, j) + h(i, j-1)}{2\Delta_y^2} = \frac{1}{\pi_2'' - R_2} > 0 \quad \forall i, j. \end{cases} \quad (37)$$

Первые из этих соотношения задают согласованное изменение h , вторые – произвольные, но с сохранением знака второй частной производной. В результате в качестве варьируемых в цикле геометрического синтеза можно принять величину $R_1 > R_2$ и профиль $\pi_2(y)$, причем $\pi_2''(y) > R_2$. Кроме того, естественным условием выступает $h_\mu = 0$, где индекс μ соответствует узлу-точке первоначального контакта тел 1 и 2. При этом

$$\delta = \sum_m C_{\mu m} p_m. \quad (38)$$

Таким образом, задавая некоторое ограничение или критерий (по напряжениям, контактному давлению, перемещениям), можно непосредственно из той же разрешающей системы уравнений, что и для задачи анализа напряженно-деформированного состояния, определять решение задачи геометрического синтеза.

Заклучение. Предложенный в статье подход объединяет в едином цикле, причем на базе одной и той же системы разрешающих соотношений, процедуры анализа напряженно-деформированного состояния и геометрического синтеза сложнопрофильных тел, контактирующих с возможностью взаимного движения или без него. Эти особенности отличают данную постановку от традиционных, обеспечивая большую эффективность численных исследований.

В дальнейшем планируется применить предложенный подход к решению ряда прикладных задач для элементов конкретных машиностроительных конструкций.

Литература: 1. Ткачук М.М. *Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями*: дисс. ... кандидата техн. наук: 05.02.09 / Ткачук Микола Миколайович. – Харків, 2010. – 203 с. 2. Литвин Ф.Л. *Теория зубчатых зацеплений* / Ф.Л. Литвин. – М.: Наука, 1968. – 584 с. 3. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия* / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 4. *Объемная гидropередача с шариковыми поршнями ГОП-900: характеристики и технический уровень* / Аврунин Г.А., Кабаненко И.В., Хавиль В.В., Истратов А.В., Богачев С.В., Лизунов К.М. // *Механіка та машинобудування*. – 2004. – №1. – С.14-21. 5. Ткачук Н.А. *Контактное взаимодействие элементов конструкций с кинематически генерируемыми поверхностями* / Н.А. Ткачук, Н.Н. Ткачук, Т.В. Полищук // *Вісник НТУ „ХПІ”*. Тем. вип.: „Транспортне машинобудування”. – 2007. – №33. – С. 176–183. 6. (90) Wriggers P. *Computational Contact Mechanics* / P. Wriggers. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 518 p. 7. Greenwood J.A. *The contact of normally-flat surfaces* / J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson. // *Proceedings of the Royal Society of London*. – 1966. – Vol. 295. – P. 300-379. 8. Kragelsky I.V. *Tribology – Lubrication, Friction, and Wear* / I.V. Kragelsky // *Alisin Professional Engineering Publishing*. – 2001. – P. 521-529. 9. Childs T.H.C. *The persistence of asperities in indentation experiments* // T.H.C. Childs. – *Wear*, 1973. – Vol. 25. – P. 3-11. 10. Mikic B.B. *Analytical studies of contact of nominally flat surfaces and effect of previous loading* // B.B. Mikic. // *Journal of Lubrication Technology*. – 1971. – Vol. 93. – P. 451-459. 11. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела* / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с. 12. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике*. – М.: Наука, 1980. – 383 с. 13. Гловински Р. *Численное исследование вариационных неравенств* / Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979 – 574с. 14. Кравчук А.С. *К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров* // *Прикладная математика и механика*. – Том 41. – 1977.- с. 329-337. 15. Kalker J.J. *Variational principles of contact elastostatics*. – *J. Inst. Math. and Appl.* – 1977. – Vol. 20. – 199 p.

Bibliography (transliterated) : 1. Tkachuk M.M. *Analiz kontaktної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями*: diss. ... кандидата техн. наук: 05.02.09 / Tkachuk Mikola Mikolajovich. – Harkiv, 2010. – 203 s. 2. Litvin F.L. *Teorija zubchatykh zaceplenij* / F.L. Litvin. – M.: Nauka, 1968. – 584 s. 3. Dzhonson K. *Mehanika kontaktnogo vzaimodejstvija* / K. Dzhonson. – M.: Mir, 1989. – 509 s. 4. *Ob#emnaja gidropereдача s sharikovymi porshnjami GOP-900: harakteristiki i tehničeskij uroven'* / Avrunin G.A., Kaba-nenko I.V., Havil' V.V., Istratov A.V., Bogachev S.V., Lizunov K.M. // *Mehanika ta mashinobudu-vannja*. – 2004. – №1. – S.14-21. 5. Tka-chuk N.A. *Kontaktное vzaimodejstvie jelementov konstruk-cij s kinematicheski generiruemyimi poverhnost-jami* / N.A. Tkachuk, N.N. Tkachuk, T.V. Poliwuk // *Visnik NTU „HPI”*. Тем. вип.: „Транспортне машинобудування”. – 2007. – №33. – S. 176–183. 6. (90) Wriggers P. *Computational Contact Mechanics* / P. Wriggers. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. – 518 p. 7. Greenwood J.A. *The contact of normal-ly-flat surfaces* / J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson. // *Proceedings of the Royal Society of London*. – 1966. – Vol. 295. – P. 300-379. 8. Kragelsky I.V. *Tribology – Lubrication, Friction, and Wear* / I.V. Kragelsky // *Alisin Professional Engineering Publishing*. – 2001. – R. 521-529. 9. Childs T.H.C. *The persistence of asperities in inden-tation experiments* // T.H.C. Childs. – *Wear*, 1973. – Vol. 25. – P. 3-11. 10. Mikic B.B. *Analytical stud-ies of contact of nominally flat surfaces and effect of previous loading* // B.B. Mikic. // *Journal of Lubri-cation Technology*. – 1971. – Vol. 93. – P. 451-459. 11. Rabotnov Ju.N. *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela* / Ju.N. Rabotnov. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. – 712 s. 12. Djuvo G., Lions Zh.-L. *Neravenstva v mehanike i fizike*. – M.: Nauka, 1980. – 383 s. 13. Glovinski R. *Chis-lennoe issledovanie variacionnyh neravenstv* / R. Glovinski, Zh.L. Lions, R. Tremol'er. – M.: Mir,

1979 – 574s. 14. Kravchuk A.S. *K zadache Gerca dlja linejno- i nelinejno-uprugih tel ko-nechnyh razmerov// Prikladnaja matematika i mehanika. – Tom 41. – 1977. s. 329-337.* 15. Kalker J.J. *Variational principles of contact elastostatics. – J. Inst. Math. and Appl. – 1977. – Vol. 20. – 199 p.*

Ткачук М.М., Ткачук М.А.

**КОНТАКТ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ТІЛ: ЗВ'ЯЗАНА ЗАДАЧА АНАЛІЗУ
НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТА ГЕОМЕТРИЧНОГО СИНТЕЗУ**

У статті описано новий підхід до розв'язання зв'язаної задачі аналізу напружено-деформованого стану та геометричного синтезу складнопрофільних тіл. Зокрема, для опису контактної взаємодії залучається метод граничних елементів. Ці розв'язувальні співвідношення служать також для визначення геометричної форми контактуючих тіл.

Tkachuk N.N., Tkachuk N.A.

**CONTACT OF GEOMETRICALLY COMPLEX BODIES: COUPLED PROBLEM OF
STRAIN-STRESS STATE ANALYSIS AND GEOMETRIC SYNTHESIS**

The article describes a new approach to solving of coupled problem of stress-strain state analysis and geometric synthesis of geometrically complex bodies. In particular, the boundary element method is involved to describe a contact interaction. These resolving relations are also used to determine the contacting bodies geometry.
