

Глібо Олена Анатоліївна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-31; e-mail: e_glibko@mail.ru.

Глибо Елена Анатольевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры геометрического моделирования и компьютерной графики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-31; e-mail: e_glibko@mail.ru.

Glibko Elena Anatolievna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Geometrical Modeling and Computer Graphics, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-31; e-mail: e_glibko@mail.ru.

Гречка Ірина Павлівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел. (057) 707-69-01; e-mail: Iri_@mail.ru.

Гречка Ирина Павловна – кандидат технических наук, доцент кафедры теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: Iri_@mail.ru.

Grechka Iryna Pavlivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Theory and Computer Aided Design of Mechanisms and Machines, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-69-01; e-mail: Iri_@mail.ru.

Мінаков Андрій Петрович – студент механіко-технологічного факультету кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-31.

Минаков Андрей Петрович – студент механико-технологического факультета кафедры геометрического моделирования и компьютерной графики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел. (057) 707-64-31.

Minakov Andrei Petrovich – student, Chair of Geometrical Modeling and Computer Graphics, Department of Mechanics and Technology, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-31.

УДК 517.968.519.6

С. В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФРАКЦИИ ТМ-ВОЛНЫ НА ЗАПОЛНЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

Дан вывод сингулярных интегральных уравнений задачи дифракции ТМ-волны на цилиндрической кольцевой антенне, заполненной диэлектриком, внутренняя поверхность которой идеально проводящая, а идеально проводящая внешняя поверхность имеет продольные щели. Дискретная математическая модель построена методом дискретных особенностей и проведен численный эксперимент на ее основе. Построены поперечник полного рассеяния, поля в ближней зоне и диаграммы направленности.

Ключевые слова: метод дискретных особенностей, сингулярный интеграл, антенна.

Введение. В работе рассматривается задача дифракции плоской монохроматической волны на идеально проводящей цилиндрической поверхности, покрытой диэлектрическим цилиндром, на внешней поверхности которого – идеально проводящая цилиндрическая поверхность со щелями.

Задача падения плоской Е-поляризованной волны (ТМ-волны) на «кольцевой волновод» с одной продольной щелью во внешнем цилиндре, находящемся в вакууме, решались *методом парных рядов* [1 – 2], а при отсутствии внутреннего цилиндра – *методами конечных элементов, методом задачи Римана-Гильберта* [3 – 5], однако они реализовывались только для одной продольной щели. Применяемый подход ранее использовался для решения задачи дифракции плоской монохроматической волны и цилиндрической волны на круговом цилиндре с конечным числом продольных щелей, находящемся в однородной среде (предполагался вакуум) [6].

Рассматриваемые в данной работе задачи представляют значительный практический интерес, в связи с необходимостью рассчитывать соответствующие антенные устройства. Эта задача теории дифракции волн приводит к краевой задаче для *уравнений Максвелла*. Эти задачи для уравнений Максвелла служат математическими моделями цилиндрических электродинамических структур, и нашли широкое применение при проектировании и создании апертурных и поверхностных антенн, открытых резонаторов, щелевых волноводов и фильтров на их основе.

Целью работы является создание математической модели для данных структур и анализ некоторых физических характеристик, полученных путем численных вычислений.

Постановка краевой задачи для уравнений Максвелла. Опишем геометрию задачи. Введем обозначения $L = \bigcup_{i=1}^p (\alpha_i, \beta_i)$, $CL = [-\pi, \pi] \setminus L$. Дуги внешней окружности S_{R_2} радиуса R_2 с центром в начале координат обозначим (a_q, b_q) (рис. 1).

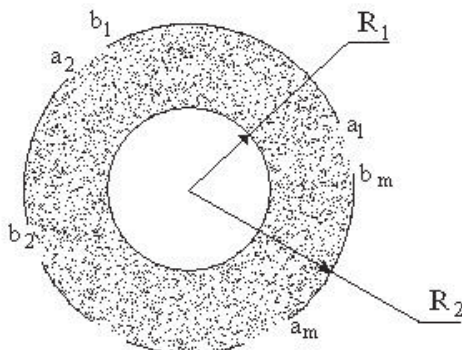


Рис. 1 – Сечение цилиндрического кольца, заполненного диэлектриком, внутренняя часть границы – окружность, внешняя часть – окружность с конечным числом щелей.

Был рассмотрен стационарный случай $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ (монохроматические волны, ω – угловая частота). Волновой вектор плоской волны направлен перпендикулярно к образующим цилиндров. Во внешнем цилиндре прорезано несколько продольных щелей. Пространство между цилиндрами заполнено диэлектриком.

Поля во внутренней и во внешней частях рассматриваемой электродинамической структуры удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \epsilon \mathbf{E}. \quad (2)$$

Предполагается, что источники электрического поля отсутствуют, так что выполняется условие:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (3)$$

На идеально проводящих поверхностях выполнено граничное условие:

$$\left[\mathbf{E}(r, \phi), \mathbf{n} \right]_{r=R_1}^{\phi \in [0, 2\pi]} = 0, \quad \left[\mathbf{E}(r, \phi), \mathbf{n} \right]_{r=R_2}^{\phi \in CL} = 0. \quad (4)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к цилиндрическим поверхностям.

Рассматривается двумерная задача: электромагнитное поле не зависит от координаты z .

Система уравнений Максвелла (1 – 2), распадается на две независимые подсистемы [3,7], одна из них – сводится к *краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца* (H-поляризация); а вторая – к *краевой задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца* (E-поляризация). В обоих случаях, а именно для нахождения полного поля, необходимо найти единственную функцию – продольную компоненту магнитного поля $H_z(r, \phi)$ или электрического поля $E_z(r, \phi)$, соответственно. По найденным компонентам оставшиеся восстанавливаются однозначно. В данной работе дано решение краевой задачи Дирихле (TM-волна).

Математическая модель задачи Дирихле. Компонента $E_z(r, \phi)$ удовлетворяет следующим условиям: уравнению Гельмгольца

$$\Delta E_z(r, \phi) + k^2 E_z(r, \phi) = 0, \quad (5)$$

где $k^2 = \epsilon \mu \omega^2$;

граничному условию

$$E_z(R_2, \phi) = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in L, \quad (6)$$

где $E_{0z}(r, \phi) = e^{ikr \cos \phi}$, $k = \omega/c$, c – скорость света в вакууме;

условию излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial E_z(r, \phi)}{\partial r} - ik E_z(r, \phi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r \rightarrow \infty; \quad (7)$$

условию Майкснера на ребре

$$\int_{\Omega} \left[k^2 |E_z|^2 + |\nabla E_z|^2 \right] ds < \infty \quad (8)$$

для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$.

Ограничения искомой функции $u(r, \phi)$ на внутренность $R_1 < r < R_2$ и внешность $r > R_2$ кольца, обозначим соответственно $u^+(r, \phi)$ и $u^-(r, \phi)$, при этом для задачи Дирихле $u(r, \phi) = E_z(r, \phi)$, а для задачи Неймана $u(r, \phi) = H_z(r, \phi)$. Если функции $u^+(r, \phi)$, $R_1 < r < R_2$ и $u^-(r, \phi)$, $r > R_2$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены так называемые условия сопряжения:

$$u^+(r, \phi) \Big|_{r=R_2} = u^-(r, \phi) \Big|_{r=R_2}, \quad \phi \in CL, \quad (9)$$

и

$$\frac{\partial u^+(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \frac{\partial u^-(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \quad \phi \in CL, \quad (10)$$

то существует функция $u(r, \phi)$, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца в пространстве $\{r > R_1, \phi \in [0, 2\pi]\}$ без объединения дуг $\bigcup_{q=1}^m [a_q, b_q]$ окружности S_{R_2} , причем $u(r, \phi) = u^+(r, \phi)$, $R_1 < r < R_2$ и $u(r, \phi) = u^-(r, \phi)$, $r > R_2$.

Запишем парный ряд Фурье для компоненты $E_z(r, \phi)$ электрического поля. Действуя так же, как в [8], запишем Фурье-представления для полей:

$$E_z^+(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ V_n^E(k^+ \rho) e^{in\phi}, \quad \rho \in [R_1, R_2], \quad \text{где } V_n^E(k\rho) = \frac{J_n(k^+ R_1) Y_n(k^+ \rho) - Y_n(k^+ R_1) J_n(k^+ \rho)}{J_n(k^+ R_1) Y_n(k^+ R_2) - Y_n(k^+ R_1) J_n(k^+ R_2)}, \quad (11)$$

$$E_z^-(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(k^- \rho) e^{in\phi}, \quad \rho > R_2, \quad (12)$$

где $J_n(z)$, $Y_n(z)$, $H_n^{(1)}(z)$ – функции Бесселя, Неймана и Ханкеля (I-го рода) порядка n .

Из условия сопряжения (10) и граничного условия (6) получаем соотношения для коэффициентов Фурье:

$$C_n^+ = C_n^- H_n^{(1)}(k^- R_2) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Запишем парный ряд Фурье с введенными коэффициентами C_n

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right) e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in L. \right.$$

Введем новые неизвестные коэффициенты $B_n = C_n \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right)$, $n \in \mathbf{Z}$ и приходим окончательно к парному ряду Фурье:

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \Gamma_n^E e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in L. \right. \quad (13)$$

Здесь $\Gamma_n^E = \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right)^{-1}$, причем $\Gamma_n^E - \frac{A_1}{|n|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, где $A_1 = \frac{k^- R_2}{2}$.

Перепишем второе уравнение из (13) в виде равенства:

$$A_1 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{B_n}{|n|} e^{in\phi} + B_0 \Gamma_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} B_n \left(\Gamma_n - A_1 \frac{1}{|n|} \right) e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in CL. \quad (14)$$

Действуя так же, как в [9 – 10], введем неизвестную функцию $v(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi}$, через которую выражают-

ся все неизвестные коэффициенты $B_n = \frac{1}{2\pi} \int_{CL} v(\phi) e^{-in\phi} d\phi$. Условие Майкснера на ребре (8) будет выполнено, если сужение функции $v(\theta)$ на интервал (α_q, β_q) имеет вид

$$v(\theta)|_{(\alpha_q, \beta_q)} = \frac{w_q(\theta)}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}}, \quad \alpha_q < \theta < \beta_q,$$

где $w_q(\theta)$, $\theta \in [\alpha_q, \beta_q]$ функция непрерывная по Гельдеру.

Используем параметрическое представление интегрального оператора с логарифмическим ядром и учтем, что L является объединением непересекающихся интервалов. Уравнение (14) запишем в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{B}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \ln|\theta - \phi| \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} - \\ & -\frac{B}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \ln \left| \frac{\sin \frac{\theta - \phi}{2}}{\frac{\theta - \phi}{2}} \right| \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} + \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \frac{K(\theta, \phi) w_q(\theta) d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} = -u_0(r, \phi)|_{r=R_2}, \quad \phi \in L. \quad (15) \end{aligned}$$

Действуя далее так же, как в [7], введем отображения:

$$g_q : (-1,1) \rightarrow (\alpha_q, \beta_q) : t \mapsto \theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2}, \text{ при этом } \frac{w_q(\theta)}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} \equiv \frac{2}{\beta_q - \alpha_q} \frac{\gamma_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Выполним замену переменных в каждом из интегралов и перейдем от интегрального уравнения на системе интервалов к системе интегральных уравнений на стандартном интервале $(-1, 1)$:

$$-\frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \tilde{K}_{pq}(t, t_0) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f_q(t_0), \quad q=1, \dots, m, \quad (16)$$

где $\tilde{K}_{pq}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n - B \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(g_p(t) - g_q(t_0)))$, $f_q(t_0) = -u_0(r, g_q(t_0)) \Big|_{r=R_2}$.

Продифференцировав уравнение (16) по параметру t_0 , приходим к сингулярному интегральному уравнению. Дополнительное условие получаем путем домножения на весовую функцию $1/\sqrt{1-t_0^2}$ правой и левой частей уравнения (16) и интегрируя по интервалу $(-1, 1)$ при использовании известного соотношения [11]:

$$\int_{-1}^1 \ln |t - t_0| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\pi \ln 2.$$

Получаем систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{B}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_q(t)}{t - t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{B}{\pi} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{1}{g_p(t) - g_q(t_0)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{B}{2\pi} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \left[\text{ctg} \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2} - \frac{2}{g_p(t) - g_q(t_0)} \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \frac{\hat{K}_{pq}(t, t_0) \gamma_p(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = f'_q(t_0), \quad (17)$$

где $\hat{K}_{pq}(t, t_0) = (\tilde{K}_{pq}(t, t_0))'_{t_0} = \frac{b_q - a_q}{2} \sum n \left(\Gamma_n - B \frac{1}{n} \right) \sin(n(g_p(t) - g_q(t_0)))$, $q=1, \dots, m$,

и дополнительное условие:

$$\frac{B}{\pi} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \int_{-1}^1 \gamma_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\Gamma_0}{2} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{K}_{pq}(t, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^1 f_q(t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}, \quad q=1, \dots, m, \quad (18)$$

причем интеграл $\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{t - t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ нужно понимать в смысле главного значения по Коши.

Дискретная математическая модель. При дискретизации интегрального уравнения (17) и дополнительного условия (18) неизвестную функцию $\gamma_p(t)$ заменяем ее интерполяционным полиномом, а входящие в уравнение интегралы – интерполяционными квадратурными формулами, предварительно заменив ядра уравнений их интерполяционными полиномами с теми же узлами, как это сделано, например, в [7].

$$\begin{cases} \frac{B}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\gamma_q(t_i^{N_q})}{t_i^{N_q} - t_{0j}^{N_q}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) \gamma_p(t_i^{N_p}) = f'_q(t_{0j}^{N_q}), \\ \frac{B}{N_q} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \sum_{i=1}^{N_q} \gamma_q(t_i^{N_q}) + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} Q_{pq}(t_i^{N_p}) \gamma_p(t_i^{N_p}) = \int_{-1}^1 f_q(t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}, \end{cases} \quad j=1, \dots, N_q - 1, q=1, \dots, m, \quad (19)$$

где

$$G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) = \frac{B\beta_q - \alpha_q}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})}{2} - \frac{2}{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} \right] +$$

$$+ B \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \frac{1}{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} + \widehat{K}_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}), \quad p \neq q,$$

$$G_{qq}(t_i^{N_q}, t_{0j}^{N_q}) = \frac{B\beta_q - \alpha_q}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_{0j}^{N_q})}{2} - \frac{2}{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} \right] + \widehat{K}_{qq}(t_i^{N_q}, t_{0j}^{N_q}),$$

и

$$Q_{pq}(t_i^{N_p}) = -B \int_{-1}^1 \ln \left| g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0) \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{2} - B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 \tilde{K}_{pq}(t_i^{N_p}, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}},$$

$p \neq q,$

$$Q_{qq}(t_i^{N_q}) = -\frac{\Gamma_0}{2} - B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 \tilde{K}_{qq}(t_i^{N_q}, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}},$$

а $t_k^N = \cos \frac{2k-1}{2N} \pi$ – это нули полиномов Чебышева I рода и $t_{0j}^N = \cos \frac{j\pi}{N}$ – это нули полиномов Чебышева II рода.

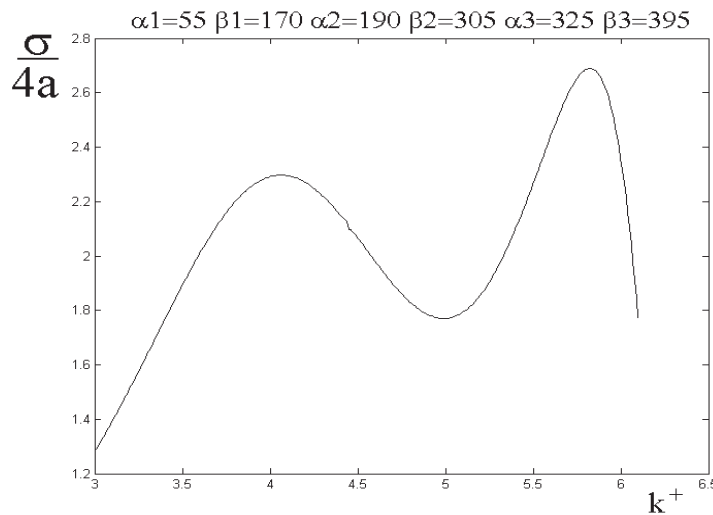


Рис. 2 – Поперечник полного рассеяния в зависимости от волнового числа, случай падения ТМ-волны, три щели.

Решая систему линейных уравнений (19), находим значения интерполяционного полинома в точках t_k^N с наперед заданной точностью. Неизвестные коэффициенты C_n вычисляются по формуле:

$$C_n = B_n \Gamma_n^E = \frac{\Gamma_n^E}{2} \sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^{N_q} \gamma_q(t_k^{N_q}) e^{-i g_q(t_k^{N_q})}.$$

Выведем выражение для мощности ТМ-волны, рассеянной в пространстве:

$$\sigma = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} E_z(r, \phi) H_\phi^*(r, \phi) r d\phi, \tag{20}$$

где r – радиус произвольной цилиндрической поверхности, охватывающей экран.

Используя представление (12) для компоненты поля $E_z^-(r, \phi)$, получим представление для компоненты поля $H_\phi(r, \phi)$, применяя связь между компонентами из уравнений Максвелла

$$H_\phi(r, \phi) = \frac{1}{i\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k C_n^- H_n^{(1)'}(kr) e^{in\phi}. \quad (21)$$

Подставляя выражения для компонент $H_\phi(r, \phi)$ (21) и $E_z(r, \phi)$ (12) в уравнение для мощности (20), при этом комплексно сопрягаем $H_\phi(r, \phi)$ получаем:

$$\sigma = \frac{4}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_n \Gamma_n}{H_n^{(1)}(ka)} \right|^2, \quad A_n = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m \frac{1}{n_q} \sum_{j=1}^{n_q} \gamma_q(t_j^{n_q}) e^{-ing_q(t_j^{n_q})}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (22)$$

Используя найденные значения интерполяционного многочлена для неизвестной функции $\gamma_p(t)$, находим мощность, рассеянную в пространство.

По найденным значениям строим графики физических характеристик: мощность, диаграмму направленности для компоненты электрического поля, а так же поле в ближней зоне.

Численный эксперимент. На базе построенной дискретной математической модели разработано программное обеспечение. Это позволило провести широкий численный эксперимент при различных параметрах задачи (варьировались радиусы кольца, угол раскрытия щели, диэлектрическая проницаемость заполнителя, волновые числа первичного поля). Приведем некоторые из полученных результатов.

На рис. 2 показан поперечник полного рассеяния задачи дифракции Е-поляризованной волны на антенне с тремя щелями $L = (35^\circ, 55^\circ) \cup (170^\circ, 190^\circ) \cup (305^\circ, 325^\circ)$. Для экстремальных значений $k^+ = 4.06$ и $k^- = 5.82$ построены модули компоненты поля (E_z) в ближней зоне (рис. 3, а; 4, а) и диаграммы направленности (рис. 3, б; 4, б).

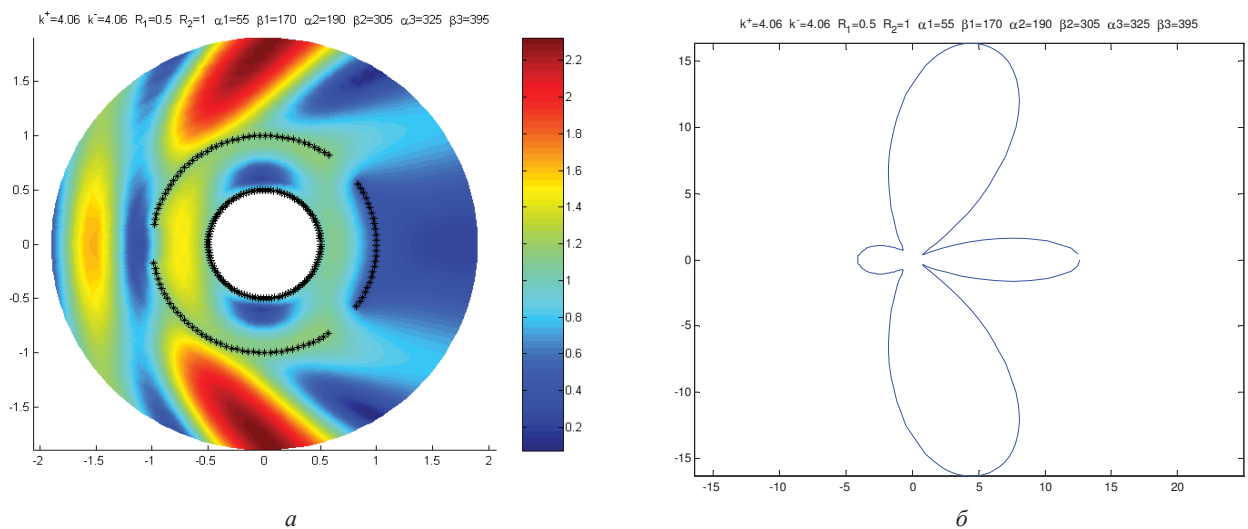


Рис. 3 – Результаты численного эксперимента для значений $k^+ = 4.06$, $k^- = 4.06$, $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1$:

а – модуль поля в ближней зоне; б – диаграмма направленности.

Анализ полученных данных показал следующее.

На рис. 4, а амплитуда достигает своих локальных максимумов вблизи «задних» щелей в точках с координатами $\rho = 0.7$, $\phi = 74.4^\circ$ и $\rho = 0.7$, $\phi = 285.6^\circ$, при этом значение $A = 3.4379$. Со стороны передней щели, на расстоянии 0.3 от внешней части поверхности кольца, лежит полоса локальных максимумов со средним значением $A = 1.5$.

На рис. 4, б главный лепесток имеет направление угла $\phi_0 = 0^\circ$ и значение амплитуды $|D_E(\phi_0)| = 36.798$. Ширина по нулям напряженности для главного лепестка равна $2\theta = 40^\circ$. Боковые лепестки лежат в направлении углов $\phi_1 = 36^\circ$, $\phi_2 = 324^\circ$, $\phi_3 = 84^\circ$, $\phi_4 = 276^\circ$. Уровни боковых лепестков равны

$$\frac{|D_E(\phi_{1,2})|}{|D_E(\phi_0)|} \approx 0.267 \quad \text{и} \quad \frac{|D_E(\phi_{3,4})|}{|D_E(\phi_0)|} \approx 0.59.$$

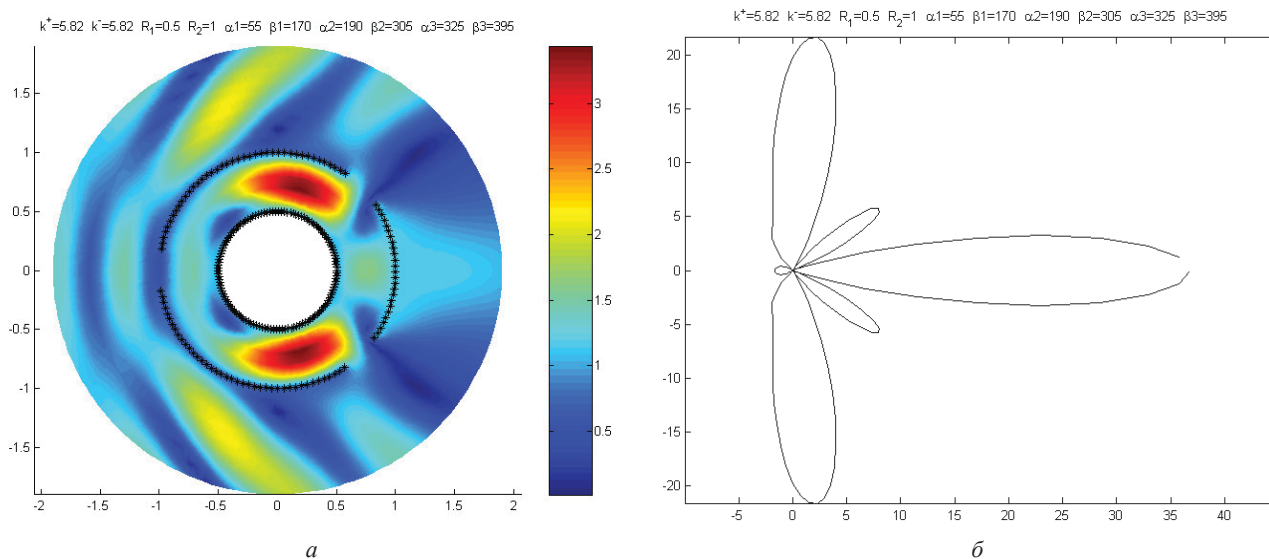


Рис. 4 – Результаты численного эксперимента для значений $k^+ = 4.06$, $k^- = 4.06$, $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1$:

a – модуль поля в ближней зоне; b – диаграмма направленности.

Выводы. В работе построена математическая модель дифракции ТМ-волн круглыми цилиндрическими антеннами, с известным числом щелей, и вложенным идеально проводящим круговым цилиндром. Щелевые цилиндрические структуры, для которых построена математическая модель, используются в качестве приемных антенн, фильтров, зондов.

На основе этих моделей рассчитаны поперечники полного рассеяния для различных вариантов геометрии структуры и различных волновых чисел. В ходе анализа найдены локальные максимумы поперечника полного рассеяния. Для некоторых волновых чисел, в которых поперечник полного рассеяния достигает локального максимума, построены диаграммы рассеяния и поля в ближней зоне. Возможность проводить расчеты для нескольких щелей показала, что увеличение числа щелей в структуре может повлечь за собой уменьшение количества боковых лепестков, а также уменьшение уровня их напряженности.

Проведен сравнительный анализ результатов, полученных на основе построенных дискретных математических моделей, с результатами, приведенными в литературе, полученными другими методами для простейших структур, где имеется одна продольная щель. Анализ показал совпадение, причем как поля в ближней зоне, так и диаграмм рассеяния.

Получены результаты использования дискретных математических моделей для структур, имеющих одинаковую геометрию, но при различных числах узлов интерполяции. Это позволило провести внутреннюю проверку метода на устойчивость и сходимость. Численный анализ показал необходимость использования одного узла интерполяции на два градуса металлической поверхности, чтобы получить точность результата до пятой значащей цифры в интервале изменения волновых чисел от 0 до 10. При этом увеличение количества щелей не требует добавления узлов интерполяции.

Проведенный анализ дает возможность утверждать, что построенные математические модели позволяют оптимизировать уже существующие приборы и создавать новые в случае, когда входящие в них структуры имеют несколько продольных щелей.

Список литературы: 1. Richard W. Ziolkowski, J. Brian Grant Scattering from Cavity-Backed Apertures: The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-35, №5. – 1987. – С. 504 – 528. 2. Johnson W.A., Ziolkowski R.W. The scattering of an H-polarized plane wave from an axially slotted infinite cylinder: a dual series approach. // Radio Sci., vol. 19, no.1, pp. 275 – 291, – 1984. 3. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / Назарчук З.Т., отв. ред. Саверук М.П.; АН УССР. Физ.-мех. ин-т им. Г.В. Карпенко. – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с. – ISBN 5-12-000912-3. 4. Носич А.И. О влиянии резонансных режимов на характеристики рассеяния незамкнутого цилиндра. – Радиотехника и электрон., 1978, 23, №8, с. 1733 – 1737. 5. Goldstone L.O., Oliner A.A. Leaky wave antennas II: Circular waveguides, IRE Trans. Antennas Propagat., vol. 9, pp. 280 – 290, May 1961. 6. Духонельников С.В. Математические модели для расчета излучения из продольных щелей в волноводе кругового сечения. // Вестник Харк. нац. ун-та., 2005. – № 661. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 4. – С. 104 – 113. 7. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Х.: ХГУ, 1992. – 145 с. 8. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функцион. анализ. и их прилож., вып. 38, Х.: Вища школа, 1982. – С. 15 – 18. 9. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К.: НАН Украины, 1995. – С. 65 – 66. 10. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований в аксиально-симметричных краевых задачах математической физики. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: НАН Украины, ин-т математики, 1996. – С. 72 – 73. 11. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2001. – 92 с. 12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. Пер. с англ. / Под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной – М.:

Наука, 1979. – 832 с., с ил. **13.** Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equation and Their Applications. – London: Teilor and Francis, 2003. **14.** Носич А.И., Шестопалов В.П. Свободные и вынужденные электромагнитные колебания кругового цилиндра с продольной щелью. Препринт ИРЭ АН УССР № 78, Харьков, 1977, – 52 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Richard, W. Ziolkowski, and J. Brian Grant. "Scattering from Cavity-Backed Apertures: The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. Vol. AP-35. №5. 1987. 504–528. Print. **2.** Johnson, W. A., and R. W. Ziolkowski. "The scattering of an H-polarized plane wave from an axially slotted infinite cylinder: a dual series approach." *Radio Sci.* Vol. 19. No. 1. 1984. 275–291. Print. **3.** Nazarchuk, Z. T. *Chislennoe issledovanie difrakcii voln na cilindricheskikh strukturah*. Kiev: Nauk. dumka, 1989. Print. **4.** Nosich, A. I. "O vlijanii rezonansnykh rezhimov na karakteristiki rassejanija nezamknutogo cilindra." *Radio-tehnika i jelektron.* No. 8. 23. 1978. 1733–1737. Print. **5.** Goldstone, L. O., and A. A. Oliner. "Leaky wave antennas II: Circular waveguides." *IRE Trans. Antennas Propagat.* Vol. 9. 1961. 280–290. Print. **6.** Duhopel'nikov, S. V. "Matematicheskie modeli dlja rascheta izlucheniya iz prodol'nykh shhelej v volnovode krugovogo secheniya." *Vestnik Kharkov. nac. un-ta. Ser.: Matematicheskoe modelirovanie. Informacionnye tehnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravlenija.* No. 661. 2005. 104–113. Print. **7.** Gandel', Ju. V., S. V. Eremenko and T. S. Poljanskaja. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Obosnovanie chislennogo metoda diskretnykh osobennostej reshenija dvumernykh zadach difrakcii jelektromagnitnykh voln. Uchebnoe posobie.* Kharkov: HGU, 1992. Print. **8.** Gandel', Ju. V. "O parnykh rjadah Fur'e nekotorykh smeshannykh kraevykh zadach matematicheskoy fiziki." *Teorija funkcij, funkcion. anal. i ih prilozh.* Vol. 38. Kharkov: Vishha shkola, 1982. 15–18. Print. **9.** Gandel', Ju. V. "Parametricheskie predstavlenija singuljarnykh integral'nykh preobrazovanij i kraevye zadachi matematicheskoy fiziki." *Nelinejnye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki i ih prilozhenija.* Kiev: NAN Ukrainy, 1995. 65–66. Print. **10.** Gandel', Ju. V. "Parametricheskie predstavlenija singuljarnykh integral'nykh preobrazovanij v aksial'no-simmetrichnykh kraevykh zadachah matematicheskoy fiziki." *Nelinejnye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki i ih prilozhenija.* Kiev: NAN Ukrainy, in-t matematiki, 1996. 72–73. Print. **11.** Gandel' Ju. V. *Vvedenie v metody vychislenija singuljarnykh i gipersinguljarnykh integralov.* Kharkov: HNU im. V.N. Karazina, 2001. Print. **12.** *Spravochnik po special'nykh funkcijam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami.* Ed. M. Abramovic, and I. Stigan. Per. s angl. Ed. V. A. Ditkin, and L. N. Karmazina. Moscow: Nauka, 1979. Print. **13.** Lifanov, I. K., L. N. Poltavskii and G. M. Vainikko. *Hypersingular Integral Equation and Their Applications.* London: Teilor and Francis, 2003. Print. **14.** Носич, А. И., and В. П. Шестопалов. "Свободные и вынужденные электромагнитные колебания кругового цилиндра с продольной щелью." *Preprint IRJe AN USSR.* No. 78. Kharkov. 1977. Print.

Поступила (received) 30.09.2015

Духопельников Сергей Владимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

Духопельников Сергей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

Dukhopelnykov Sergey Vladimirovich – Candidate of Engineering Science, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Kharkov; tel.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

УДК 517.98

А. В. КОРОБСКАЯ

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Изучен оператор, который является линейной комбинацией модельного оператора интегрирования и его сопряженного. Показано, что данный оператор ограничен, и найден сопряженный к нему оператор. Для исследуемого несамосопряженного оператора построен локальный узел, вычислена характеристическая функция этого узла. Получена полугруппа, которую порождает изучаемый оператор, при этом возникает задача Коши для уравнения второго порядка. Отметим, что изучаемый в работе оператор не всегда является диссипативным, а характеристическая функция узла, соответствующего данному оператору, имеет ряд особенностей, которые изучены в работе. Предложены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: оператор интегрирования, узел, характеристическая функция, полугруппа оператора.

Введение. Одним из активно развивающихся направлений функционального анализа является теория модельных представлений несамосопряженных операторов, которая играет важную роль в решении задач теории спектральных представлений, а также при конструировании некоторых классов неоднородных случайных полей. Многие из аспектов данного направления функционального анализа получили свое развитие в научных исследованиях по теории характеристических функций и треугольных моделей [1, 2], функциональных моделей [3], аналитических функций [4], треугольных представлений линейных операторов [5], спектральных представлений несамосопряженных операторов [6, 7], линейных операторов в гильбертовом пространстве [8, 9], в задачах базисности и полноты [10], в вопросах управляемости и наблюдаемости [11]. В связи с этим возникает необходимость в изучении различных типов линейных операторов средствами спектрального анализа.

Анализ предыдущих исследований. Основу спектрального анализа несамосопряженных операторов составляет теория характеристических функций и треугольных моделей, представленная в работах [1, 2]. Для несамосопряженного оператора аналогом спектрального разложения принято считать треугольную или функцио-

© А. В. Коробская, 2015