

УДК 681.58

**Р.С. ВОЛЯНСКИЙ**, канд. техн. наук, доц., докторант,  
Днепродзержинский государственный технический университет,  
Днепродзержинск,  
**А.В. САДОВОЙ**, д-р техн. наук, проф., проректор по научной  
работе, Днепродзержинский государственный технический  
университет, Днепродзержинск

## НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОГО НАБЛЮДАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Составлено матричное уравнение движения непрерывного и дискретного наблюдающих устройств, восстанавливающих первую производную от сигнала задания. Получены их характеристические уравнения, и определено максимально возможное значение периода дискретизации, при котором замкнутая цифровая система остается устойчивой. Ил.: 1. Библиогр.: 10 назв.

**Ключевые слова:** уравнение движения, наблюдающее устройство, характеристическое уравнение, период дискретизации, устойчивость.

**Постановка проблемы.** Последние достижения микропроцессорной и микроконтроллерной техники в разработке недорогих мощных микроконтроллеров создали предпосылки для модернизации существующих и создания новых систем управления электромеханическими объектами и технологическими процессами. Оптимизация таких систем по различным критериям позволяет улучшить характеристики систем управления и, как следствие, повысить качество выпускаемой продукции при одновременном снижении ее себестоимости. Одним из направлений оптимизации является использование в алгоритмах управления информации о старших производных отклонения регулируемой величины от ее желаемого значения [1]. Причем непосредственное дифференцирование этого отклонения в реальных технических системах осложнено наличием шумовой составляющей. Необходимость фильтрации шумов приводит к появлению в канале обратной связи системы управления инерционных элементов, которые вносят в алгоритм управления дополнительное запаздывание [2, 3] и ухудшают динамические характеристики соответствующей системы управления.

**Анализ литературы.** На практике для определения старших

производных отклонения используются наблюдающие устройства [4, 5]. Вопросам анализа и синтеза систем управления с наблюдающими устройствами посвящено большое количество работ в отечественной [6, 7] и зарубежной печати [8, 9]. Приведенные в этих работах результаты показывают, что использование в алгоритме управления производных высоких порядков улучшает динамические и статические характеристики систем управления электромеханическими объектами. Реализация этих систем на базе современной микроконтроллерной техники [10] создает предпосылки к построению автоматизированных систем управления отдельными технологическими процессами или всем производством в целом. Последнее обуславливает возникновение актуальной научной задачи анализа и синтеза цифровых наблюдающих устройств. Одним из подходов к решению указанной задачи является одновременное использование корневых и сеточных методов [2].

**Целью** настоящей работы является определение необходимых условий устойчивости цифрового наблюдающего устройства.

**Материалы исследования.** Реализация наблюдающих устройств на микроконтроллерах осуществляется путем численного решения соответствующих дифференциальных уравнений. Поскольку такие устройства должны работать в режиме реального времени, то удобным является использование численных методов решения дифференциальных уравнений с постоянным периодом дискретизации, величина которого является одним из факторов, определяющих устойчивость модели.

Для получения аналитических выражений, связывающих период дискретизации с параметрами и переменными состояния наблюдающего устройства, рассмотрим следующий динамический объект второго порядка

$$py_1 = a_{12}y_2; \quad py_2 = m_2U, \quad (1)$$

где  $a_{12}, m_2$  – параметры объекта управления;  $y_1, y_2$  – переменные состояния;  $U$  – управляющее воздействие.

Если подаваемое на объект (1) управляющее воздействие обеспечивает равенство наблюдаемой координаты  $y_1^*$  и координаты  $y_1$ , то тогда переменная состояния  $y_2$  наблюдателя будет пропорциональна искомой производной от наблюдаемой величины. Такой подход за счет наличия интегрирующих звеньев в наблюдающем устройстве не только позволяет определить производную от наблюдаемой величины, но и в результате использования интегрирующих звеньев осуществляет

автоматическую фильтрацию сигнала. При необходимости определения производных более высоких порядков должна быть увеличена размерность объекта управления.

Будем считать, что управление объектом (1) осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом управления

$$U = g[k_1(y_1^* - y_1) - k_2 y_2], \quad (2)$$

где  $g$  – общий коэффициент усиления регулятора, который в общем случае может быть переменным;  $k_1, k_2$  – некоторые коэффициенты, определяющие траектории движения объекта (1).

Подстановка управляющего воздействия (2) в уравнения движения объекта (1) позволяет записать следующее матричное уравнение

$$p\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}U^*; \quad (3)$$

$$\mathbf{Y} = (y_1 \quad y_2)^T; \quad \mathbf{B} = (0 \quad m_2 g k_1)^T; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -m_2 g k_1 & -m_2 g k_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

из которого легко может быть получено характеристическое уравнение наблюдающего устройства в непрерывном времени

$$D(\lambda) = \lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица размерности  $2 \times 2$ , или в развернутом виде

$$D(\lambda) = \lambda^2 + m_2 g k_2 \lambda + m_2 g k_1 a_{12} = \lambda^2 + d_{11} \lambda + d_{12} = 0. \quad (6)$$

Анализ уравнения (5) показывает, что назначением коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  можно обеспечить любое желаемое распределение корней характеристического уравнения наблюдающего устройства, а значит сформировать требуемую траекторию его движения, причем коэффициенты характеристического уравнения непрерывного наблюдающего устройства зависят только от его параметров.

Используя  $z$ -преобразование, выполним дискретизацию системы (3) по времени. При этом будем считать, что оператор дифференцирования  $p$  аппроксимируется следующим выражением [2]

$$p \approx \frac{1}{T} \frac{1-z}{z}, \quad (7)$$

где  $T$  – период дискретизации непрерывной системы (3) по времени;  $z$  – оператор сдвига на один шаг назад.

С учетом выражения (7) уравнение (3) примет вид

$$Y = TzAY + zY + TzBY^* \quad (8)$$

или

$$Y = CzY + DzY^*; \quad (9)$$

$$D = (0 \quad Tm_2gk_1)^T; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & Ta_{12} \\ -Tm_2gk_1 & 1 - Tm_2gk_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

По аналогии с характеристическим уравнением (5) запишем характеристическое уравнение для системы (9)

$$D(\lambda) = \lambda E - C = 0 \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \lambda^2 + (-2 + Tm_2gk_2)\lambda + 1 + T^2m_2gk_1a_{12} - Tm_2gk_2 = \\ &= \lambda^2 + d_{21}\lambda + d_{22} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Анализ уравнения (12) показывает, что его коэффициенты зависят от периода дискретизации  $T$ , что позволяет определять его максимальную величину в зависимости от параметров наблюдающего устройства и желаемой траектории движения. Сравнение полиномов (6) и (12) позволяет утверждать, что коэффициенты характеристического полинома дискретной системы связаны с коэффициентами полинома непрерывной системы зависимостями

$$d_{21} = -2 + Td_{11}; \quad d_{22} = 1 + T^2d_{12} - Td_{11}, \quad (13)$$

которые позволяют записать характеристический полином дискретной системы по известному характеристическому полиному непрерывной системы без дискретизации уравнений ее движения.

Максимальное значение периода дискретизации определяется в результате решения уравнений

$$1 + T^2m_2gk_1a_{12} - Tm_2gk_2 = 0; \quad (14)$$

$$-2 + Tm_2gk_2 = 0 \quad (15)$$

следующей зависимостью

$$T = \min(T_1, T_2, T_3), \quad (16)$$

где

$$T_1 = \frac{2}{m_2 g k_2}; \quad (17)$$

$$T_2 = \frac{m_2 g k_2 + \sqrt{m_2 g^2 k_2^2 - 4 m_2 g k_1 a_{12}}}{2 m_2 g k_1 a_{12}}; \quad (18)$$

$$T_3 = \frac{m_2 g k_2 - \sqrt{m_2 g^2 k_2^2 - 4 m_2 g k_1 a_{12}}}{2 m_2 g k_1 a_{12}}. \quad (19)$$

На рис. приведены результаты математического моделирования отработки единичного ступенчатого воздействия синтезированным наблюдающим устройством, которое реализовано на базе платы Arduino Due, оснащенной микроконтроллером Atmel SAM3X8E Cortex-M3. Параметры наблюдающего устройства приняты следующие:  $m_2 = g = k_1 = 1$ ,  $a_{12} = 2$ ,  $k_2 = 3$ . Значения периодов дискретизации  $T_1 = 2/3$ ,  $T_2 = 1$ ,  $T_3 = 1/2$  вычислены в соответствии с выражениями (16) – (18). Кривые 1 – 3 получены при значениях периодов дискретизации  $T_1 - T_3$  соответственно. На этом же рисунке показаны результаты моделирования непрерывной системы (3) (кривая 4).

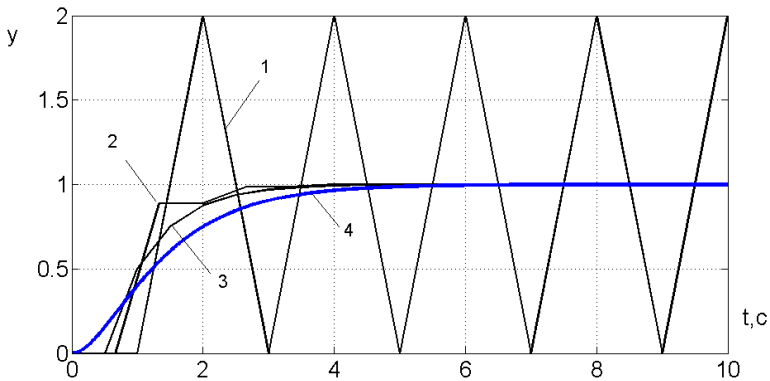


Рис. Переходные функции моделируемой системы

Анализ результатов работы наблюдающего устройства подтверждает, что синтезированная система будет устойчива при значениях периода дискретизации  $T_3 \leq 0.5 \text{ с}$ . В этом случае кривая 3 приближается к эталонной кривой 4; в остальных случаях результаты работы дискретного наблюдающего устройства существенно отличаются от эталонного.

**Выводы.** Приведенные выкладки и результаты экспериментальных исследований синтезированного наблюдающего устройства позволяют сделать вывод, что для наблюдающего устройства, осуществляющего восстановление первой производной от задающего сигнала, выражение (16) является необходимым условием устойчивости. В отличие от коэффициентов характеристического уравнения непрерывной системы, коэффициенты характеристического уравнения дискретной системы зависят от периода дискретизации и метода аппроксимации оператора дифференцирования. Аналогичные условия устойчивости могут быть получены для наблюдающих устройств большой размерности путем численного решения характеристического уравнения соответствующей дискретной системы. Несмотря на то, что в работе исследовалось наблюдающее устройство с линейным регулятором, управляющее воздействие которого не ограничено по модулю, применяемый подход позволяет определять период дискретизации наблюдающего устройства с нелинейной активационной функцией и нелинейными обратными связями. Указанные факторы представляют интерес с точки зрения повышения точности, быстродействия и порядка наблюдающего устройства и определяют направления дальнейших исследований.

**Список литературы:** 1. Садовой А.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / А.В. Садовой, Б.В. Сухинин, Ю.В. Сохина. – К.: ИСИМО, 1996. – 298 с. 2. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры / Г. Лэм. – М.: Мир, 1982. – 589 с. 3. Волянский Р.С. Линеаризация обратными связями уравнений динамики обобщенного электромеханического объекта с дифференциальным уравнением наблюдаемости / Р.С. Волянский, А.В. Садовой // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Механико-технологические системы и комплексы. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2014. – № 60 (1102). – С. 52-57. 4. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Линейные системы / Д.П. Ким. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с. 5. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Н.Т. Кузовков. – М.: Машиностроение. – 1976. – 184 с. 6. Горячев О.В. Синтез наблюдателя состояния силовой системы привода наведения и стабилизации / О.В. Горячев, Е.С. Иванова, Д.И. Степанчиков // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – Тула: ТулГУ. – 2011. – № 5-1. – С. 332-341. 7. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы / А.Г. Александров. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с. 8. Trentelman H.L. Observer-Based Control / H.L. Trentelman, P. Antsaklis // Encyclopedia of Systems and Control. – London: Springer. – P. 1-6. 9. Sakthivel R. Observer-based control for switched networked control systems with missing data / R. Sakthivel, Santra Srimanta // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. – 2015. – Vol. 6. – Is 4. – P. 677-

686. **10.** Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Sadovoj A.V. Sistemy optimal'nogo upravlenija precizionnymi jelektroprivodami / A.V. Sadovoj, B.V. Suhinin, Ju.V. Sohina. – K.: ISIMO, 1996. – 298 p. **2.** Ljem G. Analogovye i cifrovye fil'try / G. Ljem. – M.: Mir, 1982. – 589 p. **3.** Voljanskij R.S. Linearizacija obratnymi svjazjami uravnenij dinamiki obobshhennogo jelektromehaničeskogo ob'ekta s differencial'nym uravneniem nabljudaeмости / R.S. Voljanskij, A.V. Sadovoj // Vestnik NTU "HPI". Serija: Mehaniko-tehnologičeskie sistemy i kompleksy. – Har'kov: NTU "HPI". – 2014. – № 60 (1102). – P. 52-57. **4.** Kim D.P. Teorija avtomatičeskogo upravlenija. Linejnye sistemy / D.P. Kim. – M.: Fizmatlit, 2003. – 288 p. **5.** Kuzovkov N.T. Modal'noe upravlenie i nabljudajushhie ustrojstva / N.T. Kuzovkov. – M.: Mashinostroenie. – 1976. – 184 p. **6.** Gorjachev O.V. Sintez nabljudatelja sostojanija silovoj sistemy privoda navedenija i stabilizacii / O.V. Gorjachev, E.S. Ivanova, D.I. Stepanichev // Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tehničeskie nauki. – Tula: TulGU. – 2011. – № 5–1. – P. 332-341. **7.** Aleksandrov A.G. Optimal'nye i adaptivnye sistemy / A.G. Aleksandrov. – M.: Vysshaja shkola, 1989. – 263 p. **8.** Trentelman H.L. Observer-Based Control / H.L. Trentelman, P. Antsaklis // Encyclopedia of Systems and Control. – London: Springer. – P. 1-6. **9.** Sakhivel R. Observer-based control for switched networked control systems with missing data / R. Sakhivel, Santra Srimanta // International Journal of Machine Learning and Cybernetics. – 2015. – Vol. 6. – Is. 4. – P. 677-686. **10.** Kuo B. Teorija i proektirovanie cifrovyh sistem upravlenija / B. Kuo. – M.: Mashinostroenie, 1986. – 448 p.

*Поступила (received) 30.06.2015*

*Статью представил д.т.н., проф. Института электромеханики, энергосбережения и систем управления Черный А.П.*

Voliansky Roman, PhD Tech, doctorant,  
Dniprodzerzhynsk State Technical University  
Str. Dniprobudivska, 2, Dniprodzerzhinsk, Ukraine, 51918  
tel/phone: (0569)-55-20-05, E-mail: voliansky@ua.fm  
ORCID ID: 0000-0001-5674-7646

Sadovoy Alexander, Dr. Tech, vice-rector in science,  
Dniprodzerzhynsk State Technical University  
Str. Dniprobudivska, 2, Dniprodzerzhinsk, Ukraine, 51918  
tel/phone (0569)-55-12-87, E-mail: sadovoy@dstu.dp.ua  
ORCID ID: 0000-0003-0347-6322