

**Д. Г. КОЛИУШКО**, канд. техн. наук, с.н.с., НТУ «ХПИ»;  
**С. С. РУДЕНКО**, асп., м.н.с., НИПКИ «Молния» НТУ «ХПИ»

## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ В ВИДЕ ЧЕТЫРЕХСЛОЙНОГО ГЕОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

### Постановка проблемы

Одной из основных задач первого этапа электромагнитной диагностики состояния заземляющих устройств (ЭМД ЗУ) электроустановок различных классов напряжения является проведение вертикального электрического зондирования (ВЭЗ) грунта [1]. Точность определения геоэлектрической структуры грунта и учет ее неоднородности в значительной степени влияет на точность определения нормируемых параметров ЗУ, таких как сопротивление ЗУ, напряжение прикосновения и напряжение на ЗУ. В [2] показано, что представление грунта в виде двухслойной модели приводит к погрешности определения сопротивления ЗУ на 30-60%. В [3] установлено, что при эквивалентировании трехслойного грунта двухслойным погрешность определения потенциала на поверхности грунта, что соответствует определению величины напряжения прикосновения, может достигать 80%.

На основании анализа экспериментальных кривых ВЭЗ, а также результатов их интерпретации в [3] было получено статистическое распределение грунтов по числу слоев в местах расположения энергообъектов Украины. Установлено, что абсолютное большинство грунтов в местах размещения электрических станций и подстанций имеет трехслойную структуру (72,7%), однако значительная часть (19%) имеет число слоев более трех (как правило, четыре слоя).

**Целью данной работы** является разработка математической модели для интерпретации результатов ВЭЗ в виде четырехслойной геоэлектрической структуры.

### Материалы исследований

ВЭЗ осуществляется путем инжектирования генератором испытательного тока и измерения падения напряжения на определенном участке поверхности грунта. При этом длина разноса токовых и потенциальных электродов обуславливается типом установки и требуемой глубиной зондирования. Наиболее широкое применение в рамках проведения ЭМД ЗУ получила четырехэлектродная симметричная установка, или т. н. установка Веннера (см. рис.1). К ее достоинствам следует отнести:

- слабая чувствительность к профильным включениям;
- прямая зависимость между разносом электродов и глубиной зондирования;
- достаточно простые выражения для расчета кажущегося удельного электрического сопротивления за счет равенства межэлектродного расстояния между токовыми и потенциальными электродами.

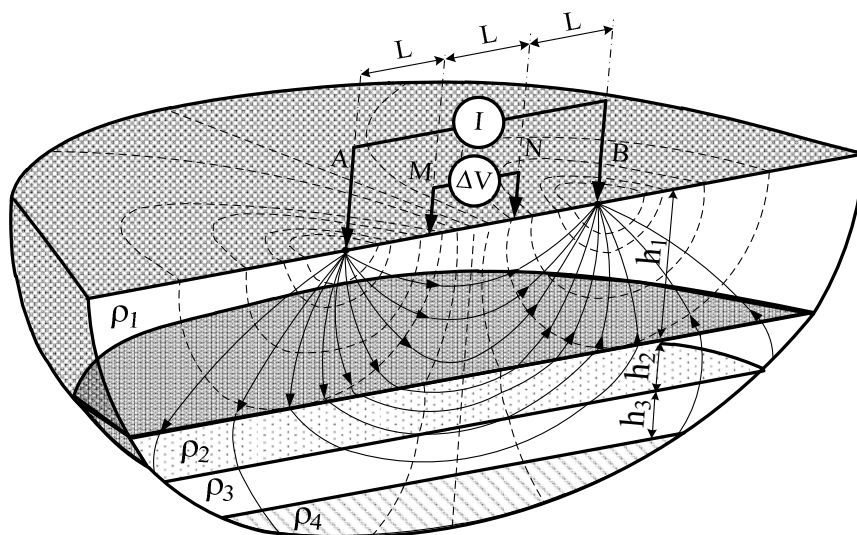


Рис. 1 – Проведение ВЭЗ установкой Веннера

В установке используется питающая цепь, образованная генератором и токовыми электродами А и В, а также измерительная цепь, образованная вольтметром и потенциальными электродами М и N. Токвые электроды рассматриваются как два точечных источника тока, а величина кажущегося удельного электрического сопротивления ( $УЭС$ ) равна произведению измеренного сопротивления на геометрический коэффициент уста-

новки:  
 © Д. Г. Колиушко, С. С. Руденко, 2015

$$\rho_k = \frac{U}{I} k, \quad (1)$$

где  $U$  – падение напряжения на потенциальных электродах  $M$  и  $N$  (см. рис. 1),  $I$  – ток протекающий через токовые электроды  $A$  и  $B$ ,  $k$  – геометрический коэффициент установки, который для установки Веннера равен  $k = 2\pi L$ .

Глубина зондирования установки Веннера оценивается как расстояние между двумя ближайшими электродами [4] ( $L$  на рис. 1), которое выбирается исходя из размеров ЗУ.

Электрофизические характеристики грунта (количество слоев, их удельное сопротивление и мощность) определяют исходя из экспериментальных данных результатов ВЭЗ с использованием различных средств интерпретации: палеток или специальных расчетных программ [3].

В настоящее время известен ряд специализированных компьютерных программ для 1-D, 2-D и 3-D интерпретации ВЭЗ. Основой для их построения является аналитическое или основанное на методе оптической аналогии решение задачи о поле точечного источника тока (ТИТ), расположенного на поверхности геоэлектрической структуры. Однако, математический аппарат и специальные программы, определяющие структуру многослойного грунта на основании данных ВЭЗ, предназначены для решения узконаправленных геологических задач и не адаптированы к применению при ЭМД ЗУ, а использование существующих универсальных палеток является трудоемким и неоднозначным [1]. В рамках же проведения ЭМД ЗУ применяются программы для интерпретации ВЭЗ в виде двух- и трехслойных геоэлектрических структур [5, 6].

Для построения математической модели по интерпретации результатов ВЭЗ четырехслойной моделью следует решить частную задачу о поле ТИТ, который, как и точка наблюдения, расположен в первом слое четырехслойного грунта.

Следует отметить, что в [2] рассмотрена математическая модель ТИТ, расположенного в первом слое четырехслойного грунта. Однако указанная модель требует уточнения в виду отсутствия выражения для определения функции характеризующей многослойную среду (ФМС) и неточности записи самого выражения для определения потенциала ТИТ. Поэтому необходимо решить задачу о поле ТИТ с учетом указанных недостатков.

Пусть ТИТ  $j$  расположен в первом слое четырехслойной земли. Сделаем следующие допущения: через границу земли и атмосферы ток не проходит, границы раздела слоев – плоскопараллельные и в пределах каждого из них удельное электрическое сопротивление  $\rho_i$  однородно. Электрические сопротивления первого, второго, третьего и четвертого слоев обозначим  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  и  $\rho_4$  соответственно. Глубины границ разделов первого и второго слоев –  $h_1$ , второго и третьего –  $h_2$ , третьего и четвертого –  $h_3$ . Требуется найти электрический потенциал  $\varphi$  в любой точке проводящего полупространства.

Электрическое поле ТИТ в четырехслойной среде обладает осевой симметрией. Поэтому целесообразно применить криволинейную ортогональную цилиндрическую систему координат  $(r, z, \psi)$  с осью  $z$ , перпендикулярной к границе полупространства и проходящей через точечный источник (см. рис. 2).

Формулировка рассматриваемой задачи состоит из уравнения Лапласа и дополнительных условий. Потенциал не зависит от координаты  $\psi$ , поэтому уравнение Лапласа принимает вид [7]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2)$$

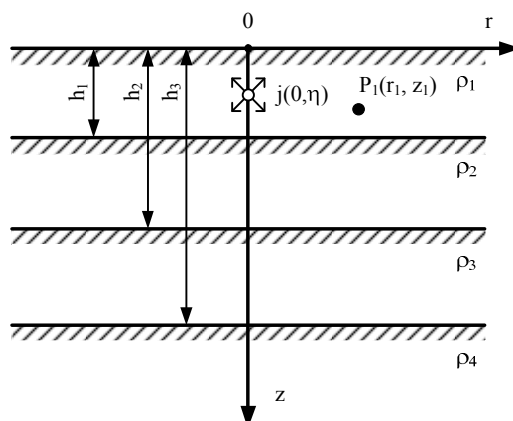


Рис. 2 – Точечный источник тока  $j$ , размещенный в первом слое четырехслойной структуры;  
 $P_1(r_1, z_1)$  – точка наблюдения

Применяя метод Фурье для разделения переменных [7], общее решение (2) представим как интеграл по параметру  $\lambda$  в пределах от нуля до бесконечности:

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \cdot (a_i e^{\lambda z} + b_i e^{-\lambda z}) d\lambda, \quad (3)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  – постоянные, определяемые параметрами грунта, координатами ТИТ и точки наблюдения,  $\lambda$  – параметр разделения переменных,  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка первого рода.

Если ТИТ и точка наблюдения расположены в  $k$ -том слое, то к выражению (3) должна быть добавлена величина потенциала ТИТ в однородном проводящем пространстве  $\varphi_0$  [7]:

$$\varphi_0 = \frac{I\rho_k}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - \eta)^2}}, \quad (4)$$

где  $\eta$  – координата ТИТ по оси  $z$ .

Вид функции (3) является общим для всех слоев проводящего полупространства. Однако в каждом слое, в зависимости от взаимного расположения ТИТ и точки наблюдения, постоянные принимают свои частные значения. Поэтому, для каждого слоя четырехслойной электрической структуры необходимо определить свои постоянные  $a_i$  и  $b_i$ :

Для нахождения постоянных  $a_i$  и  $b_i$  в первом слое воспользуемся дополнительными условиями:

– при неограниченном возрастании координаты  $z$ , потенциал  $\varphi$  стремится к нулю, следовательно

$$a_4 = 0; \quad (5)$$

– в соответствии с принципом непрерывности электрического тока, на границе раздела  $i$ -того и  $(i+1)$ -го слоя нормальные составляющие векторов плотности электрического тока равны между собой:

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \frac{1}{\rho_{i+1}} \frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial z}; \quad (6)$$

– из условия равенства тангенциальных составляющих вектора напряженности поля на границах смежных слоев, на границе раздела  $i$ -того и  $(i+1)$ -го потенциалы равны:

$$\varphi_i = \varphi_{i+1}; \quad (7)$$

– условие на границе проводящего полупространства имеет вид

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Исходя из выражений (5)-(8), составляется система алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) 7-го порядка относительно неизвестных коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ :

$$\begin{cases} a_1 - b_1 + \frac{I\rho_1}{4\pi} e^{-\lambda\eta} = 0; \\ \frac{1}{\rho_1} \left( a_1 e^{\lambda h_1} - b_1 e^{-\lambda h_1} - \frac{I\rho_1}{4\pi} e^{-\lambda(h_1-\eta)} \right) = \frac{1}{\rho_2} \left( a_2 e^{\lambda h_1} - b_2 e^{-\lambda h_1} \right); \\ \frac{1}{\rho_2} \left( a_2 e^{\lambda h_2} - b_2 e^{-\lambda h_2} \right) = \frac{1}{\rho_3} \left( a_3 e^{\lambda h_2} - b_3 e^{-\lambda h_2} \right); \\ \frac{1}{\rho_3} \left( a_3 e^{\lambda h_3} - b_3 e^{-\lambda h_3} \right) = -\frac{b_4 e^{-\lambda h_3}}{\rho_4}; \\ a_1 e^{\lambda h_1} + b_1 e^{-\lambda h_1} + \frac{I\rho_1}{4\pi} e^{-\lambda(h_1-\eta)} = a_2 e^{\lambda h_1} + b_2 e^{-\lambda h_1}; \\ a_2 e^{\lambda h_2} + b_2 e^{-\lambda h_2} = a_3 e^{\lambda h_2} + b_3 e^{-\lambda h_2}; \\ a_3 e^{\lambda h_3} + b_3 e^{-\lambda h_3} = b_4 e^{-\lambda h_3}; \end{cases}$$

После решения СЛАУ полученные значения  $a_i$  и  $b_i$  подставляются в (2). С помощью преобразования Вебера-Липшица выражение для определения потенциала в первом слое будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}(r, z) = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left[ \alpha_1 + \alpha_2 + K_{2,1} \sum_{n=0}^m K_n (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) + \right. \\ \left. + K_{3,2} \sum_{n=0}^m K_n (\alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \alpha_{10}) + K_{4,3} \sum_{n=0}^m K_n (\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14}) \right]; \quad (9) \end{aligned}$$

где коэффициенты  $\alpha_i$ :

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \mp \eta)^2}}; \quad \alpha_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \pm \eta \pm 2h_1 \pm H_n)^2}};$$

$$\alpha_{5,6} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \mp \eta \pm 2h_1 \pm H_n)^2}}; \quad \alpha_{7,8} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \pm \eta \pm 2h_2 \pm H_n)^2}};$$

$$\alpha_{9,10} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \mp \eta \pm 2h_2 \pm H_n)^2}}; \quad \alpha_{11,12} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \pm \eta \pm 2h_3 \pm H_n)^2}};$$

$$\alpha_{13,14} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z \mp \eta \pm 2h_3 \pm H_n)^2}};$$

где  $K_{i+1,i}$  – коэффициент неоднородности грунта равный  $K_{i+1,i} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\rho_{i+1} + \rho_i}$ ;  $K_n$  и  $H_n$  – коэффициенты, полученные в результате разложения функции характеризующей многослойную среду (ФМС);  $n$  – номер члена ряда;  $m$  – количество членов ряда.

Значение  $K_n$  находим из решения СЛАУ на основании метода наименьших квадратов (МНК) [8], при этом  $H_n = 2 \cdot n$ :

$$\begin{cases} K_0 \cdot N + K_1 \cdot \sum_{i=1}^N e^{-2\lambda_i} + K_2 \cdot \sum_{i=1}^N e^{-4\lambda_i} + \dots + K_m \cdot \sum_{i=1}^N e^{-2m\lambda_i} = \sum_{i=1}^N F(\lambda)_i; \\ K_0 \cdot \sum_{i=1}^N e^{-2\lambda_i} + K_1 \cdot \sum_{i=1}^N e^{-4\lambda_i} + \dots + K_m \cdot \sum_{i=1}^N e^{-2(m+1)\lambda_i} = \sum_{i=1}^N F(\lambda)_i \cdot e^{-2\lambda_i}; \\ \dots \\ K_0 \cdot \sum_{i=1}^N e^{-2m\lambda_i} + K_1 \cdot \sum_{i=1}^N e^{-2(m+1)\lambda_i} + \dots + K_m \cdot \sum_{i=1}^N e^{-4m\lambda_i} = \sum_{i=1}^N F(\lambda)_i \cdot e^{-2m\lambda_i}, \end{cases}$$

где  $N$  – количество расчетных точек,  $F(\lambda) = \frac{1}{F_4(\lambda)}$  – ФМС.

В свою очередь знаменатель ФМС имеет следующий вид:

$$F_4(\lambda) = 1 - K_{2,1}e^{-2\lambda h_1} - K_{3,2}e^{-2\lambda h_2} - K_{4,3}e^{-2\lambda h_3} + K_{2,1}K_{3,2}e^{-2\lambda(h_2-h_1)} +$$

$$+ K_{2,1}K_{4,3}e^{-2\lambda(h_3-h_1)} + K_{3,2}K_{4,3}e^{-2\lambda(h_3-h_2)} - K_{2,1}K_{3,2}K_{4,3}e^{-2\lambda(h_3-h_2-h_1)}$$

С учетом того, что при проведении ВЭЗ ТИТ и точка наблюдения располагаются только на поверхности грунта (т.е.  $z = 0$  и  $\eta = 0$ ) выражение для потенциала примет вид:

$$\phi_{1,1}(r, 0) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + 2K_{2,1} \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{r^2 + (2h_1 + H_n)^2}} + \right.$$

$$\left. + 2K_{3,2} \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{r^2 + (2h_2 + H_n)^2}} + 2K_{4,3} \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{r^2 + (2h_3 + H_n)^2}} \right] \quad (10)$$

Таким образом, получено базовое выражение для разработки математической модели интерпретации результатов ВЭЗ в виде четырехслойной геоэлектрической структуры.

Для разработки модели, позволяющей интерпретировать результаты, полученные с помощью установки Веннера, воспользуемся выражением для определения кажущегося УЭС (1), геометрической конфигурацией самой установки (см. рис.1) и выражением для определения потенциала на поверхности грунта (10).

Исходя из принципа суперпозиции, напряжение на потенциальных электродах  $M$  и  $N$  будет определяться как:

$$U = \varphi_M - \varphi_N = \left( \varphi_{AM} \Big|_{r=L} - \varphi_{BM} \Big|_{r=2L} \right) - \left( \varphi_{AN} \Big|_{r=2L} - \varphi_{BN} \Big|_{r=L} \right), \quad (11)$$

где  $\varphi_{AM}$ ,  $\varphi_{BM}$ ,  $\varphi_{AN}$ , и  $\varphi_{BN}$  – значения потенциала на электродах  $M$  и  $N$ , наведенные от токовых электродов  $A$  и  $B$  соответственно.

Подставляя в (11) выражение для потенциала (10), падение напряжения для установки Веннера будет иметь вид:

$$\begin{aligned} U = & \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[ \frac{1}{L} + 4K_{2,1} \left( \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{L^2 + (2h_1 + h_n)^2}} - \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{4L^2 + (2h_1 + h_n)^2}} \right) + \right. \\ & + 4K_{3,2} \left( \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{L^2 + (2h_2 + h_n)^2}} - \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{4L^2 + (2h_2 + h_n)^2}} \right) + \\ & \left. + 4K_{4,3} \left( \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{L^2 + (2h_3 + h_n)^2}} - \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{4L^2 + (2h_3 + h_n)^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом (11) и преобразований получим выражение (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_k = \rho_1 & \left[ 1 + 4K_{2,1} \left( \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2h_1 + h_n}{L}\right)^2}} - \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{4 + \left(\frac{2h_1 + h_n}{L}\right)^2}} \right) + \right. \\ & + 4K_{3,2} \left( \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2h_2 + h_n}{L}\right)^2}} - \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{4 + \left(\frac{2h_2 + h_n}{L}\right)^2}} \right) + \\ & \left. + 4K_{4,3} \left( \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2h_3 + h_n}{L}\right)^2}} - \sum_{n=0}^m \frac{K_n}{\sqrt{4 + \left(\frac{2h_3 + h_n}{L}\right)^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

На основании выражения (13) и с применением МНК для аппроксимации ФМС в Delphi была разработана тестовая программа для интерпретации результатов ВЭЗ в виде четырехслойной геоэлектрической структуры. На рис. 3 показаны результаты интерпретации двух различных наборов экспериментальных значений, полученных при проведении ЭМД ЗУ подстанций ПАО "Сумыоблэнерго".

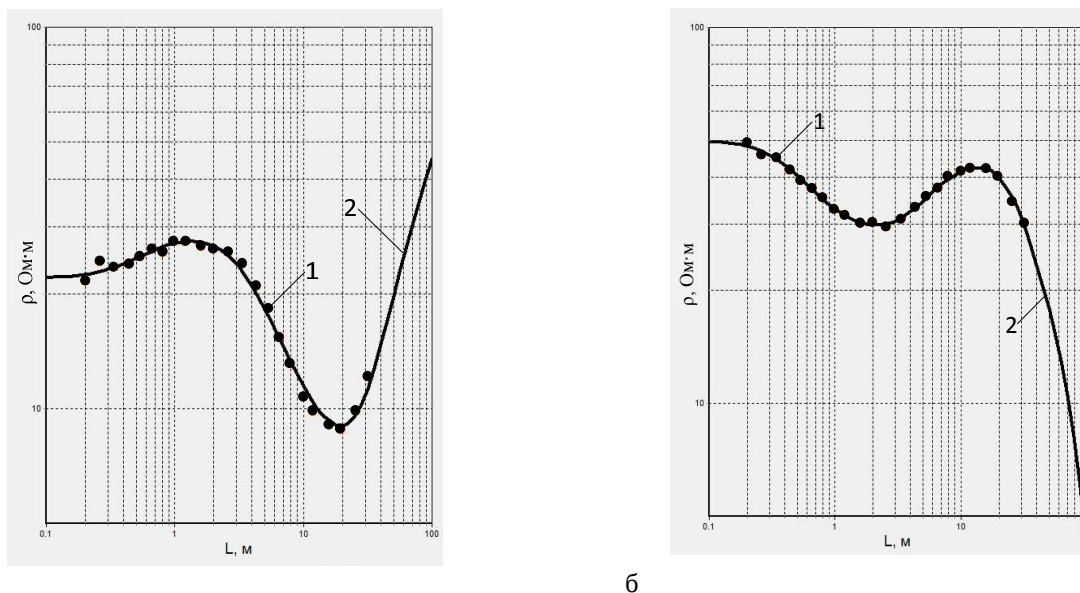
#### Выводы

1. Получено аналитическое решение задачи о поле точечного источника тока, расположенного в первом слое четырехслойной геоэлектрической структуры, с помощью аппроксимации функции, характеризующей многослойную среду по методу наименьших квадратов.

2. Разработана математическая модель для интерпретации результатов ВЭЗ в виде четырехслойной геоэлектрической структуры.

3. На основе математической модели разработана тестовая компьютерная программа для интерпретации результатов зондирования грунта в интерактивном режиме.

Разработанная математическая модель и программное обеспечение позволят повысить точность определения нормируемых параметров, таких как сопротивление ЗУ, напряжение прикосновения и напряжение на ЗУ, в рамках проведения электромагнитной диагностики состояния заземляющих устройств действующих электрических станций и подстанций.



а

б

Рис.3 – Интерпретация результатов ВЭЗ в виде четырехслойного грунта:

1 – экспериментальные точки, 2 – кривые, построенные с использованием математической модели

**Список литературы:** 1. Колюшко Г.М. К вопросу повышения точности расчета нормируемых параметров заземляющих устройств действующих электроустановок / Колюшко Г.М., Колюшко Д.Г., Руденко С.С. // *Электротехника и электромеханика*. – 2014. – № 4. – С. 65-70. 2. Максименко Н.Н. Заземляющие устройства в многолетнемерзлых грунтах / Н.Н. Максименко. – Норильск: НГМК, 1974. – 503 с. 3. Колюшко Д.Г. Электрофизические характеристики грунта в местах расположения энергообъектов Украины / Колюшко Д.Г., Руденко С.С., Колюшко Г.М. // *Электротехника и электромеханика*. – 2015. – № 3. – С. 67 – 72. 4. Коструба С. И. Измерение электрических параметров земли и заземляющих устройств / Коструба С. И. – Москва : Энергоатомиздат, 1983. – 168 с. 5. Руденко С.С. А. с., Украина. Компьютерная программа интерпретации результатов вертикального электрического зондирования «ВЭЗ-3» / Руденко С.С., Колюшко Д.Г. – № 47198 від 14.01.2013. 6. Руденко С.С. А. с., Украина. Компьютерная программа автоматической интерпретации результатов вертикального электрического зондирования «ВЭЗ-2- Авто» / Руденко С.С., Колюшко Д.Г. – № 47469 від 28.01.2013. 7. Бургсдорф В.В. Заземляющие устройства электроустановок / В.В. Бургсдорф, А.И. Якобс. – Москва : Энергоатомиздат, 1987. – 400 с. 8. Колюшко Д.Г. Аппроксимация функции, характеризующей трехслойную модель грунта, методом наименьших квадратов / Д. Г. Колюшко, С. С. Руденко // *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут "Техніка та електрофізика високих напруг" – 2011. – № 16. – С. 126-132.*

**Bibliography (transliterated):** 1. Koliushko G.M., Koliushko D.G., Rudenko S.S. On the problem of increasing computation accuracy for rated parameters of active electrical installation ground grids. *Elektrotehnika i elektromekhanika – Electrical engineering & electromechanics*, 2014 no.4, pp. 65-70. 2. Maksimenko N.N. *Zazemlyayushchie ustroystva v mnogoletnemerzlyih gruntah*. Norilsk: NGMK, 1974. 503 p. 3. Koliushko D.G., Rudenko S.S., Koliushko G.M. Analysis of electrophysical characteristics of grounds in the vicinity electrical substation of Ukraine. *Elektrotehnika i elektromekhanika – Electrical engineering & electromechanics*, 2015 no.3, pp. 67-72. 4. Kostruba S. I. *Izmerenie elektricheskikh parametrov zemli i zazemlyayushchikh ustroystv* [Measurement of electrical parameters of the earth and ground grids]. Moscow, Energoatomizdat, 1983. 168 p. 5. Rudenko S.S., Koliushko D.G. *Komp'yuternaya programma avtomaticheskoi interpretatsii rezul'tatov vertikal'nogo elektricheskogo zondirovaniya «VEZ-3»* [Computer software for the interpretation of vertical electrical sounding «VEZ-3»] Certificate of authorship, UA, no. 47198, 2013. 6. Rudenko S.S., Koliushko D.G. *Komp'yuternaya programma avtomaticheskoi interpretatsii rezul'tatov vertikal'nogo elektricheskogo zondirovaniya «VEZ-2-Avto»* [Computer software for the interpretation of vertical electrical sounding «VEZ-2-Auto»] Certificate of authorship, UA, no. 47469, 2013. 7. Burgsdorf V.V., Yakobs A.I. *Zazemlyayushchie ustroystva elektroustanovok* [Grounding device of electrical installations]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1987. 400 p. 8. Koliushko D. G., Rudenko S.S.. *Аппроксимация функции, характеризующей трехслойную модель грунта, методом наименьших квадратов*. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «Kharkivskiyi politekhnichnyi instytut "Tekhnika ta elektrofizyka vysokyykh napruh"». Kharkiv, 2011, no. 16pp. 126-132.*

Поступила (received) 03.07.2015