

ЛЮ ЧАН, аспирант, ХНУРЭ, Харьков
Н.Н. ЧЕРНЫШОВ, канд. техн. наук, доц., ХНУРЭ, Харьков
В.С. ЛУПИКОВ, д-р техн. наук, проф., зав. каф. "Электрические аппараты" НТУ "ХПИ", Харьков
С.М. ЖАРТОВСКИЙ, студент, ХНУРЭ, Харьков
Р.В. ВОРОНОЙ, студент, ХНУРЭ, Харьков
В.И. ДИТЯТКИН, студент, ХНУРЭ, Харьков
С.А. РУСАКОВ, студент, ХНУРЭ, Харьков
А.И. ХИМИЧ, студент, ХНУРЭ, Харьков

ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРО-МАГНИТНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

У роботі розглядаються питання емісії електронів, рух певних заряджених частинок у зовнішніх електричному та магнітному полях та рух електронних потоків з урахуванням полів просторового заряду. Розглядаються питання електростатичного управління електронними потоками. Робота присвячена хвилям у електронних потоках та взаємодії високочастотних хвиль з електронами та йонами у прискорювачах.

В работе рассматриваются вопросы эмиссии электронов, движение определенных заряженных частиц во внешних электрическом и магнитном полях и движение электронных потоков с учетом полей пространственного заряда. Рассматриваются вопросы электростатического управления электронными потоками. Работа посвящена волнам в электронных потоках и взаимодействию высокочастотных волн с электронами и ионами в ускорителях.

Введение. Вакуумная и газоразрядная электроника – это раздел физической электроники, изучающий закономерности процессов эмиссии заряженных частиц, их движение в вакууме и газовой среде при различных комбинациях воздействующих на частицы внешних электрических и магнитных полей. Такие исследования привлекают особое внимание в связи с широким использованием потоков электронов и ионов в электронике и физике (вакуумных приборах, низких и сверхвысоких частот, в лазерах, ускорителях), а также в промышленности (электронно-лучевая сварка, ионно-лучевое легирование), в кинескопах. В этих системах электронный поток является основным рабочим инструментом. Рассмотрение потока заряженных частиц было первым шагом в исследованиях. Влияние взаимодействия между час-

тицами оказывается фактором, приводящим не только к статическим изменениям, но и появлению динамических зависимостей, возбуждению электромагнитных волн и изменению структуры потока. Целью работы является математическое моделирование физических явлений, протекающих в электронных потоках.

Траектории движения заряженных частиц. Траектории движения заряженных частиц в статических полях определяются ориентацией вектора скорости частицы относительно направлений векторов напряженности, пространственной структурой поля, зарядом и массой частицы. Постановка задачи не позволяет понять особенности воздействия полей на траектории движения. Поэтому в простых по структуре полях, можно приходиться к более сложным комбинациям. Основой анализа является уравнение движения (второй закон Ньютона) для частицы [1]

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}; \quad \bar{p} = \frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - (\bar{v}/c)^2}} \quad (1)$$

где \bar{p} – импульс силы; t – время; \bar{F} – сила; m_0 – масса покоя частицы; \bar{v} – вектор скорости частицы; c – скорость света.

Сила Лоренца

$$\bar{F} = q\bar{E} + \frac{q}{c}(\bar{v} \times \bar{B}), \quad (2)$$

где q – заряд частицы; \bar{E}, \bar{B} – напряженность электрического и индукция магнитного поля.

В уравнении (3) напряженность \bar{E} включает в себя внешнее поле \bar{E}_0 и поле, обусловленное взаимным влиянием частиц (кулоновское взаимодействие). Его будем называть полем пространственного заряда $\bar{E}_{нз}$. На первом этапе интерес будут представлять нерелятивистские потоки при $v \leq c$. В этом случае $\bar{p} = m\bar{v}$. Далее, речь пойдет об электронах или ионах $m = m_i = m_0$.

Движение заряженной частицы в однородном статическом поле. Рассмотрим задачу о движении частицы с зарядом q и массой m_0 , влетающей с начальной скоростью \bar{v}_0 в область однородного электрического поля с напряженностью \bar{E}_0 . Ввиду произвольности ориентации векторов \bar{v}_0 и \bar{E}_0 выберем систему отсчета с координатами $[0;0;0]$. Ось x должна совпадать с направлением вектора начальной скорости, а вектор напряженности поля

$$\bar{E}_0 = \bar{i}E_{0x} + \bar{j}E_{0y} + \bar{k}E_{0z}, \quad (3)$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты декартовой системы координат.

В этом случае уравнение (1) записывается в виде

$$m_0 \frac{d\bar{v}}{dt} = q(\bar{i}E_{0x} + \bar{j}E_{0y} + \bar{k}E_{0z}), \quad (4)$$

При $x > 0$ величины E_{0x}, E_{0y}, E_{0z} остаются постоянными.

Векторное уравнение (4) приводится к системе уравнений для скалярных величин:

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = qE_{0x}; \\ m_0 \frac{d^2y}{dt^2} = qE_{0y}; \\ m_0 \frac{d^2z}{dt^2} = qE_{0z}. \end{cases} \quad (5)$$

Решения в общем виде записываются как [2]:

$$\xi = \frac{qE_{0\xi}}{m_0} \times \frac{t^2}{2} + A_\xi t + B_\xi, \quad (6)$$

где ξ – индекс, принимающий значения x, y, z ; коэффициенты A_x и B_x определяются в точке:

$$\xi|_{t=0} = 0, \frac{dx}{dt} = v_0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0 \rightarrow B_\xi = A_y = A_z = 0, A_x = v_0.$$

При этом движение частицы описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = v_0 t + qE_{0x} t^2 / 2; \\ y = \frac{qE_{0y} t^2}{2}; \\ z = qE_{0z} t^2 / 2. \end{cases} \quad (7)$$

Если $E_z = 0$, то частица движется в плоскости xOy . Тогда из системы (7) можно получить уравнение траектории, исключив время t :

$$x = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} y + v_0 \sqrt{\frac{2m_0 y}{qE_{0y}}}. \quad (8)$$

Траектория частицы в плоскости xOy при $q > 0$ показана на рис. 1. Вид траектории зависит от величины m_0 . Если изменить направление поля \vec{E}_0 так, чтобы E_{0y} было отрицательным (рис. 2), то частица с отрицательным зарядом пойдет вверх, а с положительным – вниз.



Рис.1.

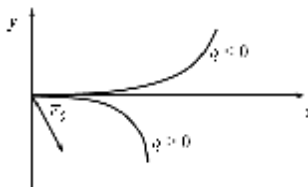


Рис.2.

Рассмотрим два частных случая.

При $E_{0y} = 0$ из системы (7) следует, что $y = z = 0$. Частица движется с ускорением вдоль оси Ox если $q > 0$, и с замедлением если $q < 0$ [3]. Этот случай можно использовать для ускорения (замедления) движения частиц. Если $E_{0x} = 0$, то уравнение (8) принимает вид

$$y = \frac{q}{2m} \frac{E_{0y} x^2}{v_0^2}. \quad (9)$$

Это явление лежит в основе создания фокусирующих систем (рис. 3-7) [4-6]. На рис. 3. показан вид сердечника квадрупольной линзы.

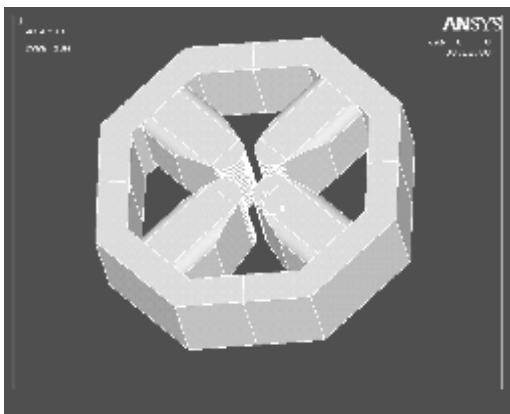


Рис. 3.

Результаты расчета магнитной индукции в полюсе квадрупольной линзы при токе 1000 и 2000 А, выполненные с использованием математического пакета ANSYS, приведены на рис. 4 и 5.

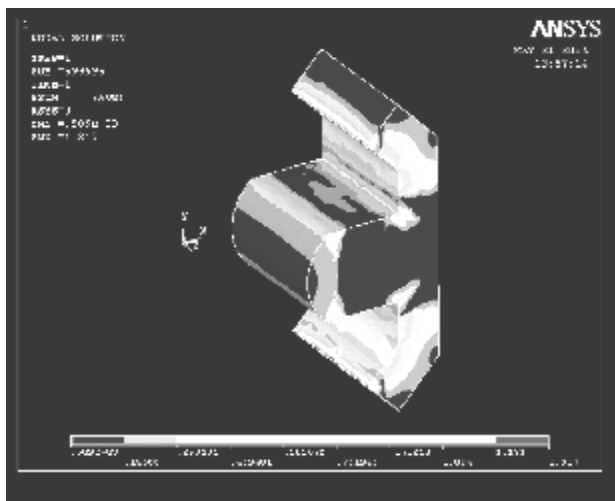


Рис. 4.

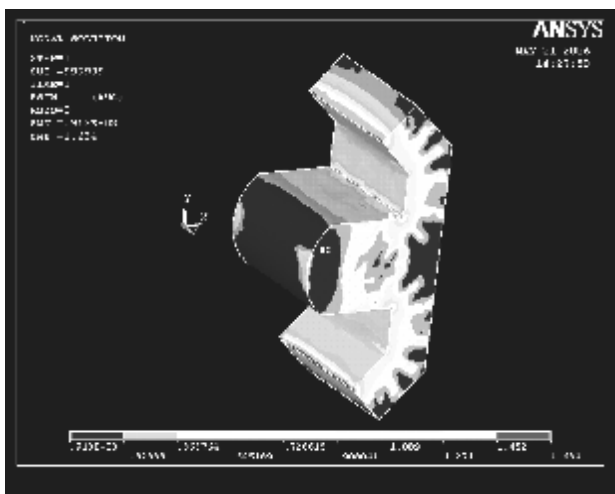


Рис. 5.

Результаты расчета электромагнитного поля в полюсе квадрупольной линзы при 1000 и 2000 А приведены на рис. 6 и 7.

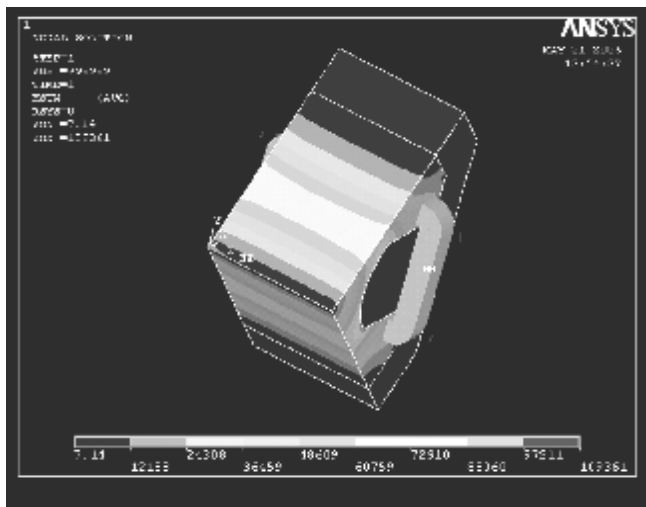


Рис. 6.

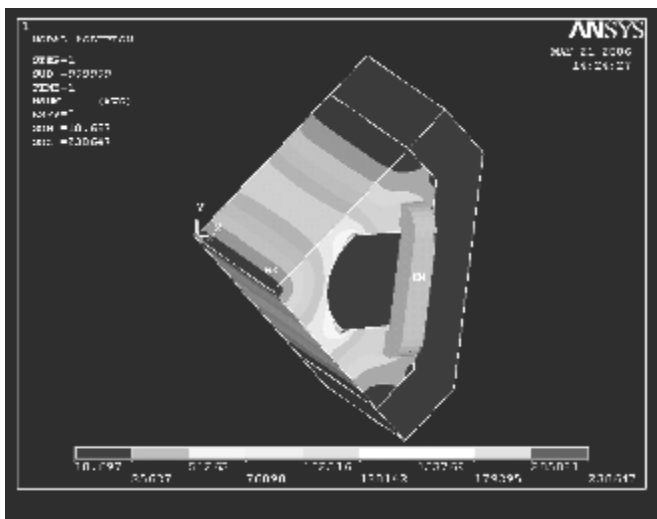


Рис. 7.

Движение частицы в неоднородном осесимметричном электрическом поле. Если частица попадает в неоднородное электромагнитное поле, изменяющееся вдоль направления движения, ее траектория изменяется.

Аксиально-симметричные поля. Рассмотрим цилиндрическую симметрию. Если направление оси является осью симметрии, то на расстоянии r напряженность поля одинакова, а условие симметрии $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$. При определении структуры электростатического поля воспользуемся уравнением Лапласа для потенциала $\Delta U = 0$, где оператор Лапласа в цилиндрической системе координат имеет вид [7,8]

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (10)$$

Решение уравнения (10) строится в виде разложения в ряд по степеням r

$$U(r, z) = U_0(z) + r^2 U_2(z) + r^4 U_4(z) + \dots \quad (11)$$

Четность ряда (11) по радиусу обусловлена аксиальной симметрией поля

$$U(r, z) = U(-r, z).$$

Первый член $U_0(z)$ характеризует распределение потенциала вдоль оси симметрии ($r = 0$). Решение в виде (11) имеет место, если оно удовлетворяет уравнению (10). Для определения этого решения перепишем (10) в виде [10]:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad (12)$$

и подставим соответствующие производные

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = U_0''(z) + r^2 U_2''(z) + r^4 U_4''(z) + \dots; \\ \frac{\partial U}{r \partial r} = 2U_2(z) + 4r^2 U_4(z) + 6U_6(z) + \dots; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = 2U_2(z) + 12r^2 U_4(z) + 30U_6(z) + \dots \end{cases} \quad (13)$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями

$$[U_0''(z) + 4U_2(z)] + r^2 [U_2''(z) + 16U_4(z)] + r^4 [U_4''(z) + 36U_6(z)] + \dots = 0.$$

Уравнения (13) справедливы для любых r и z . Получаем рекуррентные соотношения [11]:

$$\begin{cases} U_2(z) = -\frac{1}{4}U_0^2 = \frac{(-1)^1 U_0^2(z)}{2^2 \times 1}; \\ U_4(z) = -\frac{1}{64}U_0^4(z) = \frac{(-1)^2 U_0^4(z)}{2^4 (1 \times 2)^2}; \\ U_{2n}(z) = (-1)^n \frac{U_0^{2n}(z)}{2^{2n} \times (n!)^2}. \end{cases} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (11), распределение потенциала представляется в виде [12, 13]

$$U(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n U_0^{2n}(z)}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}. \quad (15)$$

Уравнение (15) позволяет рассчитывать симметричные поля, если известно распределение потенциала на оси системы $U_0(z)$.

Рассмотрим поле вблизи оси при малых r (в параксиальной области). Пренебрегая членами порядка малости r^4 и выше, получаем [14]

$$U(r, z) = U_0(z) - \frac{r^2}{4} U_0^2(z). \quad (16)$$

Разложим $U_0(z)$ в ряд Тейлора вблизи точки z_0 :

$$U_0(z) = U_0(z_0) + U_0'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2}U_0''(z_0)(\Delta z)^2 + \dots$$

Тогда распределение потенциала вблизи оси определяется соотношением

$$U(r, z) = U_0(z) + U_0'(z)\Delta z + \frac{(\Delta z)^2}{2}U_0''(z) - \frac{r^2}{4}U_0^2(z). \quad (17)$$

Распределение потенциала вдоль поверхности $U(r, z) = U_0(z)$ описывается уравнением эквипотенциальной поверхности, проходящей через искомую точку [15, 16]

$$\frac{r^2}{4}U_0^2(z) = \frac{1}{2}U_0''(z)(\Delta z)^2 + U_0'(z)\Delta z. \quad (18)$$

Соотношение (18) представляет собой уравнение гиперболы. Вблизи оси симметрии электрического поля эквипотенциальные поверхности представляют собой гиперboloиды вращения. Если пред-

ставить эквипотенциальную кривую параметрической зависимостью $r = r(z)$, то радиус кривизны.

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{1.5}}{\frac{d^2 r}{dz^2}}. \quad (19)$$

На рис. 8 показана проектно-сеточная модель резонатора, построенная с использованием метода конечных элементов.

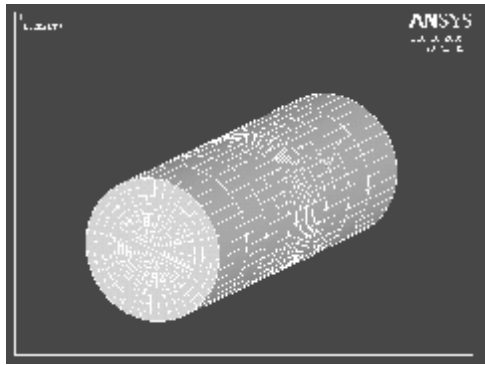


Рис. 8.

Так как вдоль эквипотенциали потенциал поля постоянен [12], имеет место следующие соотношения:

$$U(r, r) = U_0(z) = \text{const} \rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial r} dr \rightarrow \frac{\partial r}{\partial z} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial U}{\partial r}}.$$

Второе дифференцирование по z позволяет получить радиус кривизны из следующих соотношений:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{2 \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2}{\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = z_0 \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, r = 0; \\ \frac{\partial U}{\partial z} = \mathcal{U}_0'(z_0); \\ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{U}_0''(z_0); \quad \rightarrow R = \frac{2\mathcal{U}_0'(z_0)}{\mathcal{U}_0''(z_0)}; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} = 0; \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \mathcal{U}_0''(z_0). \end{array} \right. \quad (20)$$

Таким образом, радиус кривизны эквипотенциальной поверхности вблизи оси полностью определяется распределением потенциала на оси. Если в точке $\mathcal{U}_0'(z_0) = 0$, то потенциал [15]

$$U(r, z) = U_0(z_0) + \frac{1}{2} (\Delta z)^2 \mathcal{U}_0''(z_0) - \frac{r^2}{4} \mathcal{U}_0''(z_0).$$

Коэффициенты при r^2 и Δz^2 имеют противоположные знаки. Если $\mathcal{U}_0''(z) > 0$, то с ростом $|\Delta z|$ растет величина потенциала $U_0(r, z)$, а с ростом $|r|$ – убывает. Такое поведение характеризует точку, в которой гиперболоиды вращения вырождаются в конусы.

Уравнение движения заряженной частицы в аксиально-симметричном поле. Уравнение движения в аксиально-симметричном электростатическом поле описывается соотношениями [17]:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 \ddot{z} = -q \mathcal{U}_0'(z); \\ m_0 \ddot{r} = q \frac{r}{2} \mathcal{U}_0''(z). \end{array} \right. \quad (21)$$

Рассчитанное распределение электростатического поля в резонаторе показано на рис. 9.

Электростатическое поле связано с потенциалом $E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}; E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$. Ограничимся случаем, когда частица движется вдоль оси. Тогда система уравнений (21) принимает вид

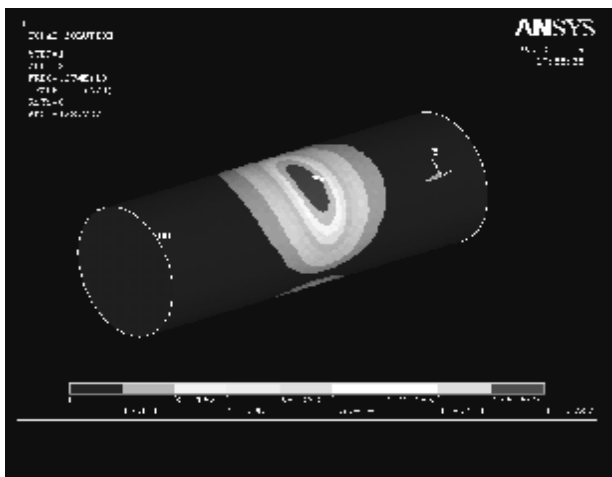


Рис. 9.

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = -qU_0(z); \\ m_0 \frac{d^2 r}{dt^2} = q \frac{r}{2} U_0'(z). \end{cases} \quad (22)$$

В приосевой области продольная скорость частицы определяется из закона сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} = -qU$ [7,8]:

$$v \approx v_0 = \frac{dz}{dt} = \sqrt{-\frac{q}{m_0} U_0(z)}. \quad (23)$$

Используя уравнение (23), получим уравнение траектории, исключив из системы уравнений (22) явную зависимость от времени. Для этого преобразуем дифференциальные операторы [17]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} = \sqrt{-2 \frac{q}{m_0} U_0(z)} \frac{d}{dz}; \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left(\frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \right) = -2 \frac{q}{m_0} \sqrt{U_0(z)} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{U_0(z)} \frac{d}{dz} \right) \end{aligned}$$

Подставляя этот оператор во второе уравнение системы (22), получаем

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{U_0(z)} \frac{dr}{dz} \right) = -\frac{1}{4} \frac{\mathcal{U}_0''(z)}{\sqrt{U_0(z)}} \rightarrow \frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{\mathcal{U}_0'(z)}{U_0(z)} + \frac{\mathcal{U}_0''(z)}{4U_0(z)} r = 0. \quad (24)$$

Это уравнение называется основным уравнением приосевой электроники. На рис. 10 показано распределение магнитного поля в резонаторе.

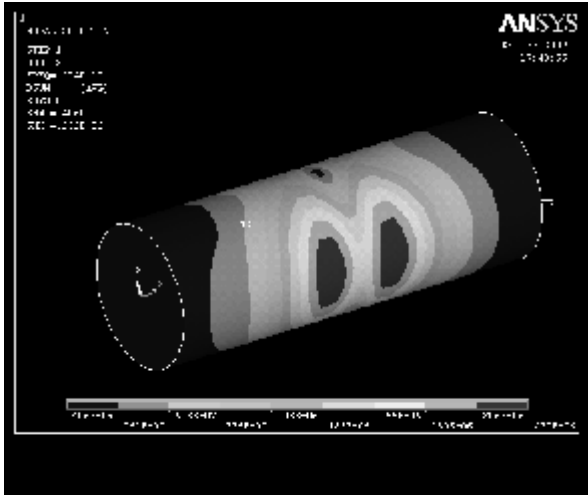


Рис.10.

Анализ уравнения (24) позволяет охарактеризовать траектории движения частиц. Поскольку в него не входят заряд и масса частицы, то траектории нерелятивистских частиц совпадают при одинаковом значении потенциала $U_0(z)$. При изменении знака потенциала $U_0(z)$ на противоположный $-U_0(z)$, частицы будут лететь по тем же траекториям в обратном направлении, что следует из уравнения (24). Уравнение (24) однородно относительно r . При введении новой координатной зависимости $R = A \times r$, где A – постоянная величина, вид уравнения не изменяется, а форма траектории остается неизменной. Уравнение (25) однородно относительно потенциалов. Если изменить $U_0(z)$ на постоянную величину $\Phi_0(z) = C \times U_0(z)$, где C – постоянная величина, то траектории частиц останутся исходными. Это позволяет моделировать траектории при небольших величинах потенциалов. Траекто-

рия параксиальной частицы определяется только распределением потенциала.

Заключение.

На основе проведенного численного моделирования электромагнитных полей сделаны обобщающие заключения о характере и траекториях движения отдельных частиц и электронных потоков с учетом пространственного распределения потенциала. Результаты работы могут быть использованы при разработке методов управления электронными потоками.

Список литературы. 1. Ландау Л.В., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Физматлит, 1962. – 423 с. 2. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики: Уч. пособие для вузов. – 6-е изд., стер. – М.: Наука, Физматлит, 1983. – 643 с. 3. Фукс Б.А., Шабат Б.Ф. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. 3-е изд. – М.: Наука, 1964. – 388 с. 4. Шимони К. Физическая электроника. – М.: Энергия, 1977. – 608 с. 5. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц / Пер. с англ. под ред. А.А. Коломенского. – М.: Мир, 1980. – 439 с. 6. Бронштейн И.М., Фрайман Б.С. Вторичная электронная эмиссия. – М.: Наука, 1969. – 287 с. 7. Зинченко Н.С. Курс лекций по электронной оптике: Уч. пособие для ВУЗов. – Харьков: ХГУ, 1958. – 275 с. 8. Жигарев А.А. Электронная оптика и электронно-лучевые приборы: Уч. пособие для вузов. – М.: Высш.шк., 1972. – 540 с. 9. Алямовский И.В. Электронные пучки и пушки. – М.: Сов. радио, 1966. – 454 с. 10. Клейнер Э.Ю. Основы теории электронных ламп: Уч. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1974. – 368 с. 11. Грибов Л.А., Прокофьева Н.И. Основы физики: Учебник для вузов. 2-е изд. – М.: Наука, Физматлит, 1988. – 560 с. 12. Суханов А.Д. Фундаментальный курс физики: Уч. пособие для вузов. В 4-х т. Т. 1. Корпускулярная физика. – М.: Агар, 1996. 13. Годжаев Н.М. Оптика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с. 14. Трофимова Т.И. Курс физики: Уч. пособие для вузов. 5-е изд. – М.: Высш. шк., 1998. – 542 с. 15. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. – М.: Ин. лит., 1958. – 931 с. 16. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Уч. пособие для вузов. 4-е изд. – М.: Наука, Физматлит, 1988. – 224 с. 17. Коваленко В.Ф. Электроника СВЧ. Т. 2. – М.: Сов. Радио, 1951. – 124 с.

Поступила в редколлегию 28.01.2010