

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ХПИ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению индивидуальных заданий
по курсу "Основы механики сплошной среды"
для студентов специальности
080303 «Динамика и прочность»

Харьков 2014

Методические указания по выполнению индивидуальных заданий по курсу "Основы механики сплошной среды" для студентов специальности 080303 «Динамика и прочность» / Сост. Г. И. Львов, В. А. Федоров. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2014. – 20 с. – Рус. яз.

Составители: Г. И. Львов

В. А. Федоров

Рецензент *А. Г. Андреев*

Кафедра динамики и прочности машин

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

E – модуль упругости материала

E_c – секущий модуль материала

E_T – модуль пластичности материала

i – номер стержня

k – номер итерации

m – показатель упрочнения материала

P – приложенная к ферме сила

P_T – значение силы, при котором в ферме начинается пластическое деформирование

P'_T – минимальное значение силы, при котором в обоих стержнях фермы происходят пластические деформации

P_B – значение силы, при котором в ферме разрушается один из стержней

U – перемещение точки приложения силы

δ – относительное удлинение образца после его разрыва

$\delta\sigma$ – погрешность вычисления напряжения

ε – деформация стержня

ε_B – деформация образца перед его разрывом

ε_T – деформация образца в начале пластичности

σ – напряжение в стержне

σ_B – предел прочности материала

σ_T – предел текучести материала

σ_T^p – предел текучести материала на растяжение

σ_T^c – предел текучести материала на сжатие

3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ

Задания ОДЗ выполняют в той очередности, в которой они включены в данное издание. Конкретные сроки выполнения назначает преподаватель.

Перед тем, как приступить к работе над очередным заданием, необходимо изучить соответствующие разделы теории.

Решение каждой из задач ИДЗ начинают на практическом занятии, где находят ответы на принципиальные вопросы и проводят часть вычислений. Дома студент выполняет оставшуюся вычислительную и оформительскую работу. Вычисления можно производить как на калькуляторе, так и на компьютере, с использованием удобной для исполнителя системы программирования.

ИДЗ оформляют в отдельной тетради или на сшитых листах и сдают на проверку преподавателю не позднее двух недель с момента получения задания. Работа оценивается по следующим основным параметрам:

- полнота и правильность выполнения задания;
- своевременность сдачи;
- аккуратность оформления.

4. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выполнение ИДЗ заключается в расчетах напряженно-деформированного состояния упругопластической фермы, нагруженной силой P . Виды материалов (по вариантам) и их свойства приведены в приложении 1. Виды конструкций – в приложении 2. Вариант указывает преподаватель.

В ходе выполнения индивидуальных домашних заданий необходимо воспользоваться физическими соотношениями упругопластического материала как с линейным, так и со степенным упрочнением.

Для расчетов напряженно-деформированного состояния фермы следует применить методы упругих решений и переменных параметров упругости.

При разгрузке фермы нужно использовать теорему о разгрузке и проверить возможность возникновения в ней обратных пластических деформаций с учетом эффекта Баушингера.

5. СХЕМАТИЗАЦИЯ ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ

Задача 1. Заданы следующие, показанные схематично на рисунке 1, константы материала: E – модуль упругости; σ_T – предел текучести; σ_B – предел прочности; δ – относительное удлинение образца после его разрыва (приложение 1).

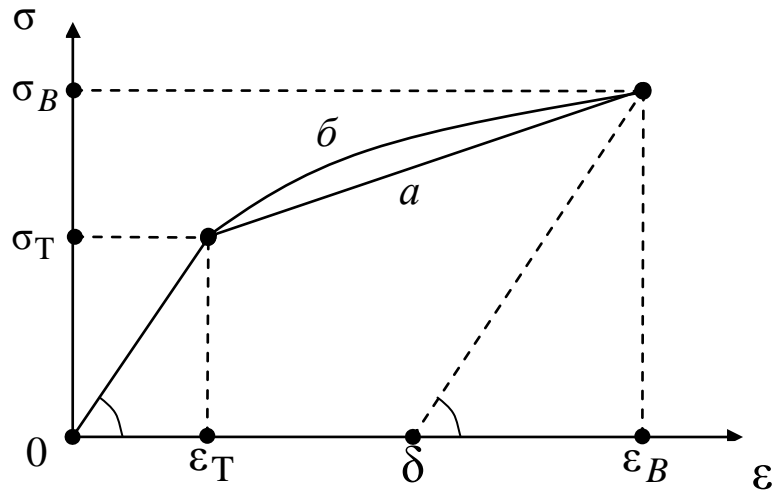


Рисунок 1 – Схематизированные диаграммы растяжения: а – с линейным упрочнением; б – со степенным упрочнением

Необходимо схематизировать диаграмму растяжения материала по моделям: а) – упругопластического материала с линейным упрочнением и б) – упругопластического материала со степенным упрочнением.

Указания к решению

Упомянутые выше математические модели материала имеют следующий вид:

а) модель упругопластического материала с линейным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{если } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ \sigma_T + E_T(\varepsilon - \varepsilon_T), & \text{если } \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_T = \sigma_T / E \text{ – деформация образца в начале пластичности,} \quad (2)$$

$$\varepsilon_B = \delta + \sigma_B / E \text{ – деформация образца перед его разрывом;} \quad (3)$$

б) модель упругопластического материала со степенным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{если } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ \sigma_T(\varepsilon / \varepsilon_T)^m, & \text{если } \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon_B. \end{cases} \quad (4)$$

Эти модели, отличающиеся пластическим участком (кривые a и b), показаны на рис. 1.

Схематизация диаграммы растяжения означает аппроксимацию экспериментальной диаграммы растяжения в соответствии с применяемой математической моделью материала и вычисление неизвестных ее параметров (здесь – E_T — в первой модели и m — во второй).

Поскольку свойства материала в данном задании представлены не диаграммой растяжения, а только некоторыми ее характеристиками, для определения искомых параметров следует воспользоваться условием интерполяции в конце диаграммы (в момент разрушения):

$$\sigma(\varepsilon_B) = \sigma_B. \quad (5)$$

Подставив в последнее равенство вместо $\sigma(\varepsilon_B)$ его выражение из (1) или (4), получают уравнения для определения искомых параметров E_T и m . Далее, найдя числовые значения этих параметров, необходимо изобразить графически полученные зависимости (1), (4).

Контрольные вопросы.

1. Что такое диаграмма растяжения?
2. Перечислите и охарактеризуйте основные параметры диаграммы растяжения.
3. Дайте определение диаграмме деформирования?
4. Что означает схематизация диаграммы растяжения?
5. Что такое аппроксимация, интерполяция функций?
6. Какие виды схематизации диаграммы растяжения Вам известны?

6. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ФЕРМЫ (ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ)

Задача 2. Ферма нагружается силой P , возрастающей от нуля до P_B – значения, соответствующего разрушению одного из стержней.

Используя модель материала с линейным упрочнением, получить аналитическое решение для напряженно-деформированного состояния фермы на всех этапах нагружения: 1) упругое состояние ($0 \leq P \leq P_T$); 2) один из стержней или группа стержней с одинаковым напряженным состоянием находится в пластическом состоянии ($P_T \leq P \leq P_T'$); 3) все стержни в пластическом состоянии ($P_T' \leq P < P_B$). Получить значения нагрузки, соответствующие переходным состояниям, а также значение,

соответствующее разрушению наиболее нагруженного стержня. Проверить, приводит ли разрушение этого стержня к разрушению фермы.

Указания к решению.

А. Поскольку нелинейность задачи носит кусочно-линейный характер, задача на отдельных этапах нагружения линейна и легко решается в аналитическом виде.

Б. Для каждого этапа нагружения следует записать основные уравнения:

- уравнения равновесия (при этом оценить статическую определенность или неопределенность задачи);
- геометрические соотношения (условия совместного перемещения узлов фермы);
- физические соотношения для каждого из стержней (они будут различны на каждом этапе нагружения).

Основные уравнения записывают относительно удельных величин, выразив внутренние силы в стержнях через соответствующие напряжения, а удлинения стержней – через их деформации.

В. Сверив число уравнений и неизвестных, необходимо классифицировать систему уравнений и решить ее относительно неизвестных напряжений $\sigma^{(i)}(P)$ (здесь i – номер стержня), деформаций $\varepsilon^{(i)}(P)$ и перемещения точки приложения силы $U(P)$.

Г. Требуется установить пределы применимости полученного решения, записав условие перехода фермы к следующему этапу нагружения, и определить из него соответствующую граничному состоянию нагрузку P .

Д. Пункты Б, В, Г необходимо выполнить для каждого из трех этапов нагружения, указанных в задании. После этого строят зависимости $\sigma^{(i)}(P)$ и $U(P)$ графически, отметив значения $P = P_T, P_T'$ и P_B . Проанализировать зависимость напряженно-деформированного состояния от нагрузки.

Контрольные вопросы.

1. Что такое ферма?
2. Охарактеризуйте нелинейность решаемой задачи.
3. Как отразился вид нелинейности задачи на виде ее решения?

7. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ФЕРМЫ ПОСЛЕ РАЗГРУЗКИ

Задача 3. Данная ферма нагружается по следующей программе: нагрузка P возрастает от нуля до значения $P_{\max} = P_T^l$. Затем нагрузка уменьшается от P_{\max} до нуля.

Требуется определить остаточное напряженно-деформированное состояние фермы $(\sigma_{\text{ост}}^{(i)}, U_{\text{ост}})$ и проверить его на возможность возникновения обратной пластической деформации. Предполагается, что для данного материала имеет место идеальный эффект Баушингера.

Указания к решению.

А. Напряженно деформированное состояние после приложения нагрузки P_{\max} определяют из решения задачи 2.

Б. Новые пределы текучести материала стержней на сжатие после этого вычисляют в соответствии с моделью идеального эффекта Баушингера:

$$\sigma_T^c(i) = \begin{cases} \sigma_T, & \text{если } \sigma_{\max}^{(i)} \leq \sigma_T \\ |\sigma_{\max}^{(i)} - 2\sigma_T|, & \text{если } \sigma_{\max}^{(i)} > \sigma_T; \end{cases} \quad (6)$$

где $\sigma_{\max}^{(i)}$ – значение напряжения в i -м стержне при максимальной нагрузке.

В. Остаточное напряженно-деформированное состояние фермы рассчитывают в соответствии с теоремой о разгрузке. Составляющую решения, соответствующую разгрузке, находят на основе упругого решения (задача 2).

Г. Проверяют, не возникнут ли при этом в стержнях пластические деформации обратного знака, т.е. не нарушится ли условие

$$|\sigma^{(i)}| < \sigma_T^c(i). \quad (7)$$

Д. Строят решение $(\sigma^{(i)}(P)$ и $U(P))$ графически и анализируют его.

Контрольные вопросы.

1. Что такое активное нагружение, пассивное нагружение (разгрузка)?
2. Дайте определение остаточному напряженно-деформированному состоянию.
3. Сформулируйте теорему о разгрузке.
4. Что такое эффект Баушингера, идеальный эффект Баушингера и какова математическая модель последнего?

8. МЕТОД УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

Задача 4. Ферма нагружена нагрузкой $P = P_{\max}$.

Решить задачу о напряженно-деформированном состоянии методом упругих решений с использованием закона деформирования с линейным упрочнением. Оценить погрешность, сравнить с точным решением.

Указания к решению.

А. Записывают основные уравнения упругопластического состояния фермы. Физические соотношения при этом необходимо сформулировать в виде, соответствующем методу упругих решений, т.е. аддитивно выделив линейную часть напряжений:

$$\sigma = E\varepsilon - \bar{\sigma}(\varepsilon), \quad (8)$$

где $\bar{\sigma}(\varepsilon)$ – нелинейная часть физической зависимости.

Б. Решают систему основных уравнений относительно геометрических неизвестных $(\varepsilon^{(i)}, i=1, 2)$ в линейной части уравнений, не раскрывая нелинейных членов, которые следует перенести в правые части решений:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} &= F_1(P, \bar{\sigma}(\varepsilon^{(1)}), \bar{\sigma}(\varepsilon^{(2)})); \\ \varepsilon^{(2)} &= F_2(P, \bar{\sigma}(\varepsilon^{(1)}), \bar{\sigma}(\varepsilon^{(2)})). \end{aligned} \quad (9)$$

В. Строят циклический алгоритм решения задачи методом упругих решений:

$$\varepsilon^{(i)(k)} = F_i(P, \bar{\sigma}(\varepsilon^{(1)(k-1)}), \bar{\sigma}(\varepsilon^{(2)(k-1)})); \quad i=1,2; k=1,2,\dots, \quad (10)$$

где k – номер итерации. Начальное приближение – нулевое:

$$\varepsilon^{(1)(0)} = \varepsilon^{(2)(0)} = 0. \quad (11)$$

Погрешность оценивается на каждой итерации в каждом стержне как разность напряжений, соответствующих двум напряженным состояниям:

$$\left| \delta\sigma^{(i)(k)} \right| = \left| \sigma_{\text{ст}}^{(i)(k)} - \sigma_{\text{физ}}^{(i)(k)} \right|, \quad (12)$$

Первые из них

$$\sigma_{\text{физ}}^{(i)(k)} = E\varepsilon^{(i)(k)} - \bar{\sigma}(\varepsilon^{(i)(k-1)}). \quad (13)$$

точно удовлетворяет статическим соотношениям. Вторые – физическим соотношениям: $\sigma_{\text{ст}}^{(i)(k)}$

$$\sigma_{\text{ст}}^{(i)(k)} = E\varepsilon^{(i)(k)} - \bar{\sigma}(\varepsilon^{(i)(k)}). \quad (14)$$

Г. В соответствии с алгоритмом выполняют расчеты в пределах не менее чем трех итераций, оценивая погрешность и сравнивая приближенное решение с точным (решение задачи 2).

Д. Изображают графически (как на рисунке 2) и анализируют вычислительный процесс для напряжений $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ (на одном рисунке).

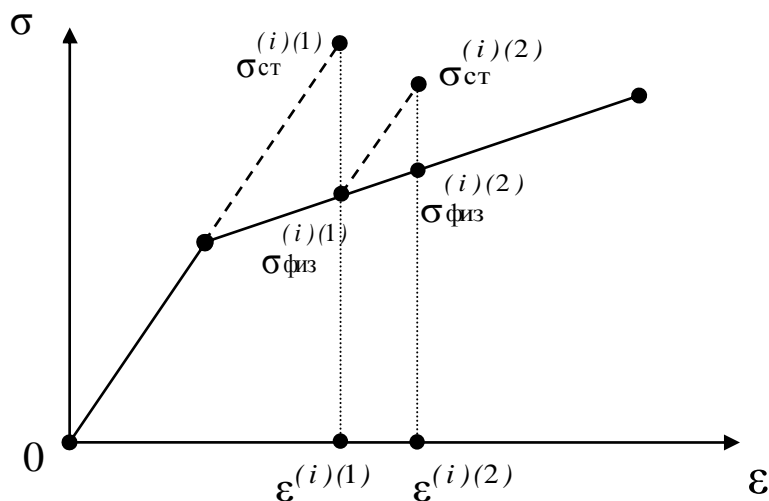


Рисунок 2 – Изображение итерационного процесса метода упругих решений для i -го стержня (две итерации)

Контрольные вопросы.

1. Охарактеризуйте метод упругих решений с точки зрения вычислительной математики.
2. Что такое итерационный метод и что означает его сходимость, скорость сходимости?
3. Что такое алгоритм и какова его особенность для итерационных методов?

9. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОСТИ

Задача 5. Отличается от задачи 4 только тем, что для ее решения нужно использовать вместо метода упругих решений метод переменных параметров упругости.

Указания к решению.

А. Записывают основные уравнения упругопластического состояния фермы. Физические соотношения при этом формулируют в виде, соответствующем методу переменных параметров упругости, т.е. мультипликативно выделив линейную часть напряжений:

$$\sigma = E_c(\varepsilon)\varepsilon, \quad (15)$$

где $E_c(\varepsilon)$ - множитель, имеющий смысл секущего модуля упругости.

Б. Решают систему основных уравнений относительно геометрических неизвестных ($\varepsilon^{(i)}, i=1, 2$) не раскрывая выражений $E_c(\varepsilon^{(i)})$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} &= F_1(P, E_c(\varepsilon^{(1)}), E_c(\varepsilon^{(2)})); \\ \varepsilon^{(2)} &= F_2(P, E_c(\varepsilon^{(1)}), E_c(\varepsilon^{(2)})). \end{aligned} \quad (16)$$

В. Строят циклический алгоритм решения задачи методом переменных параметров упругости:

$$\varepsilon^{(i)(k)} = F_i(P, E_c(\varepsilon^{(1)(k-1)}), E_c(\varepsilon^{(2)(k-1)})); \quad i=1,2; k=1,2,\dots, \quad (17)$$

где k – номер итерации. Начальное приближение – нулевое:

$$\varepsilon^{(1)(0)} = \varepsilon^{(2)(0)} = 0. \quad (18)$$

Погрешность оценивается на каждой итерации в каждом стержне как разность напряжений, соответствующих двум напряженным состояниям:

$$|\delta\sigma^{(i)(k)}| = |\sigma_{ст}^{(i)(k)} - \sigma_{физ}^{(i)(k)}|, \quad (19)$$

Первые из них

$$\sigma_{ст}^{(i)(k)} = E_c(\varepsilon^{(i)(k-1)}) \varepsilon^{(i)(k)}. \quad (20)$$

точно удовлетворяет статическим соотношениям. Вторые – физическим соотношениям:

$$\sigma_{физ}^{(i)(k)} = E_c(\varepsilon^{(i)(k)}) \varepsilon^{(i)(k)}. \quad (21)$$

Г. В соответствии с алгоритмом выполняют расчеты в пределах не менее чем трех итераций, оценивая погрешность и сравнивая приближенное решение с точным (решение задачи 2).

Д. Изображают графически (как на рисунке 3) и анализируют вычислительный процесс для напряжений $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)}$ от итерации к итерации. Сравнивают скорости сходимости методов упругих решений и методов переменных параметров упругости.

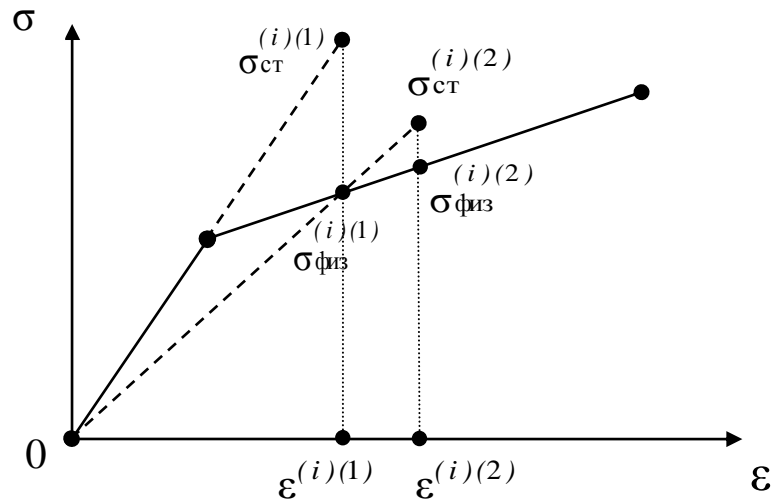


Рисунок 3 – Изображение итерационного процесса метода переменных параметров упругости для i -го стержня (две итерации)

Контрольные вопросы.

1. Охарактеризуйте метод переменных параметров упругости с точки зрения вычислительной математики.
2. Что означает скорость сходимости итерационного метода?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975.
2. Писаренко Г. С. Сопротивление материалов. – К.: Вища школа, 1977.
3. Бурлаков А. В. Основы теории пластичности и ползучести. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1968.
4. Термопрочность деталей машин / И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, И. В. Демьянушко и др. – М.: Машиностроение, 1975.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Виды материалов

Таблица П1.1

Номер варианта	Название материала	E , МПа	σ_T , МПа	σ_B , МПа	ε_B , %
1	Сталь 40Х (закалка, отпуск)	$2,10 \cdot 10^5$	1140	1200	6
2	Сталь 58 (закалка, отпуск)	$2,10 \cdot 10^5$	2000	2200	4
3	Сталь 85 (закалка, отпуск)	$2,10 \cdot 10^5$	1000	1150	6
4	Сталь 40ХН2МА (закалка, отпуск)	$2,10 \cdot 10^5$	970	1090	5,6
5	Сталь АС45Г2 (нормализованная с отпуском)	$2,10 \cdot 10^5$	450	650	6
6	Сталь 60С2ХА (закалка, отпуск)	$2,10 \cdot 10^5$	1600	1800	5
7	Сталь 40КНХМВТЮ (закалка, отпуск)	$2,10 \cdot 10^5$	1900	2100	5
8	Сталь 08Х17Н34В5Т3Ю2Л (закалка)	$2,10 \cdot 10^5$	700	800	3
9	Бериллий мелкозернистый	$2,94 \cdot 10^5$	407	580	3,7
10	Титановый сплав ВТ14 (закалка, старение)	$1,12 \cdot 10^5$	1275	1370	5

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Виды конструкций

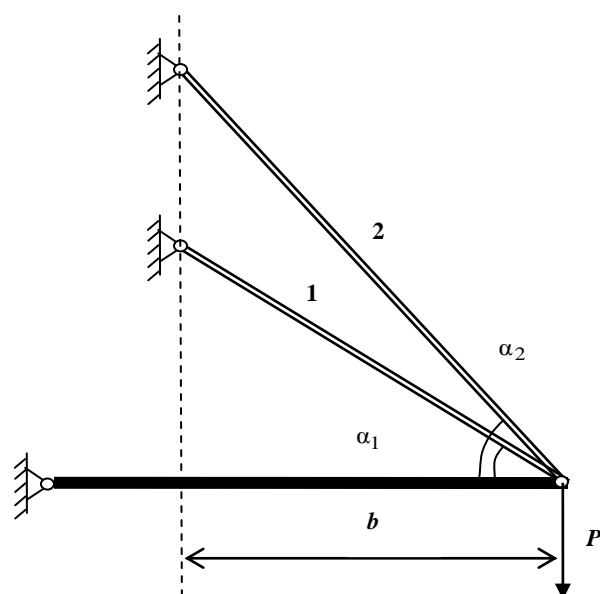


Рисунок П2.1 – Конструкция типа 1

Таблица П2.1 – Параметры конструкции типа 1

Номер варианта	b , мм	F_1 , мм ²	F_2 , мм ²	α_1 ,град	α_2 ,град
1.1	200	100	100	55	70
1.2	250	120	100	50	65
1.3	300	140	120	45	60
1.4	350	160	140	40	60
1.5	400	170	160	50	65
1.6	450	180	170	45	60
1.7	500	200	180	40	60

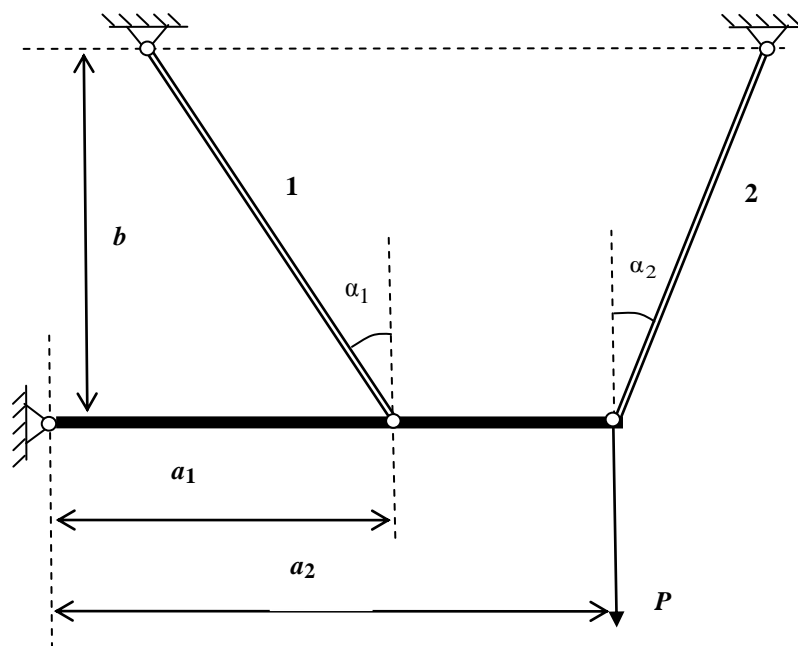


Рисунок П2.2 - Конструкция типа 2

Таблица П2.2 – Параметры конструкции типа 2

Номер варианта	b , мм	a_1 , мм	a_2 , мм	F_1 , мм ²	F_2 , мм ²	α_1 , град	α_2 , град
2.1	700	500	1000	100	100	20	0
2.2	650	600	1000	120	100	30	20
2.3	600	700	1000	140	120	20	30
2.4	600	500	1000	160	140	20	0
2.5	650	600	1000	170	160	30	20
2.6	600	700	1000	180	170	20	30
2.7	600	500	1000	200	180	30	20

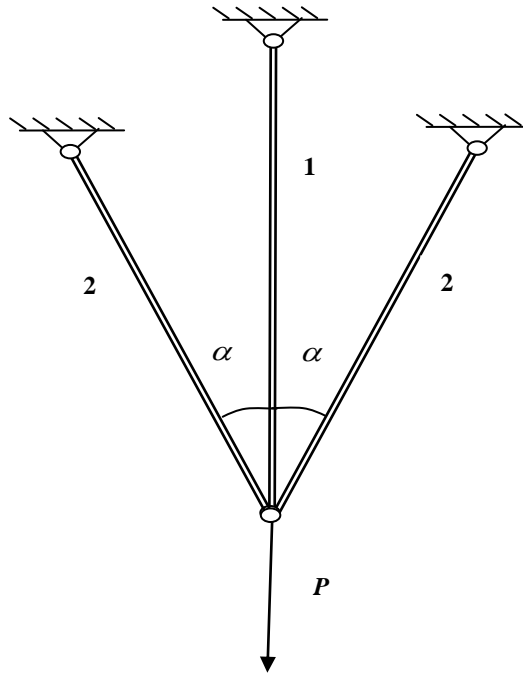


Рисунок П2.3 – Конструкция типа 3

Таблица П2.3 – Параметры конструкции типа 3

Номер варианта	l_1 , мм	l_2 , мм	F_1 , мм ²	F_2 , мм ²	α , град
3.1	200	300	100	100	20
3.2	250	350	100	120	25
3.3	300	400	120	140	30
3.4	350	450	140	160	35
3.5	400	500	160	170	40
3.6	450	550	170	180	45
3.7	500	600	180	200	30

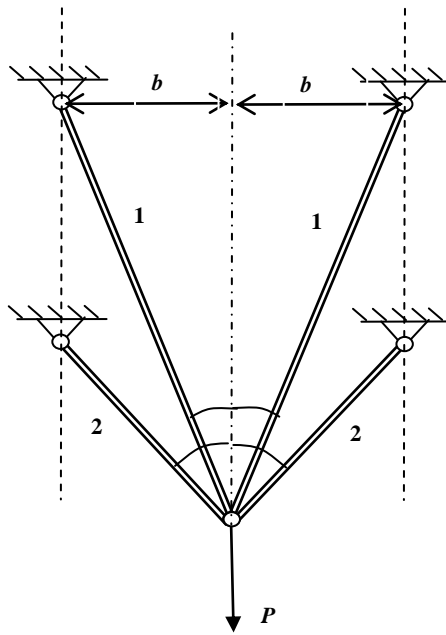


Рисунок П2.4 – Конструкция типа 4

Таблица П2.4 – Параметры конструкции типа 4

Номер варианта	l_1 , мм	l_2 , мм	F_1 , мм ²	F_2 , мм ²	b , мм
4.1	700	500	100	100	300
4.2	650	500	100	120	350
4.3	600	400	120	140	300
4.4	600	400	140	160	250
4.5	650	450	160	170	300
4.6	600	300	170	180	200
4.7	600	450	180	200	250

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ УКАЗІВКИ

для виконання індивідуальних завдань
з курсу "Основи механіки суцільного середовища"
студентам спеціальності
080303 «Динаміка и міцність»

Російською мовою

Укладачі: ЛЬВОВ Геннадій Іванович
 ФЕДОРОВ Віктор Олександрович

Відповідальний за випуск доц. А. Г. Андреев
Роботу до видання рекомендував доц. С. К. Шелковий

Редактор Л. А. Копієвська

План 2014 р., поз. 5 / ____

Підп. до друку _____._____ Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.

Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 0.8.

Обл.-вид. арк. 0,9. Наклад 50 прим. Зам. № _____. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ „ХПІ”.

Свідоцтво ДК № 116 від 10.07.2000 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

—
Друкарня НТУ „ХПІ”. 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21