

Ульєв Л.М.

СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СООСНОМ КОНИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Національний технічний університет «Харьковский политехнический институт»

Введение

В монографии [1] автором получены решения задач стационарного ламинарного течения вязких несжимаемых жидкостей в соосных конических каналах. В частности, решения задачи ламинарного течения в соосном коническом диффузоре переменной ширины (рис. 1), которое в размерном виде записывается, как:

$$V = \frac{6Q \{ [h_0 + b(R - R_0)] X - X^2 \}}{\pi \sin \alpha \left\{ 2 [h_0 + b(R - R_0)]^3 R - [h_0 + b(R - R_0)]^4 \operatorname{ctg} \alpha \right\}}, \quad (1)$$

$$\bar{V}(R) = \frac{Q}{\pi [h_0 + b(R - R_0)] \{ 2R_0 \sin \alpha - [h_0 + b(R - R_0)] \cos \alpha \}}, \quad (2)$$

$$\Delta P = \frac{6\mu Q}{\pi h_0^3 (1 - b\xi_0) \sin \alpha} \left\{ \frac{(b \operatorname{ctg} \alpha - 2)^2}{4(1 - b\xi_0)^2} \ln \frac{(2\xi_0 - \operatorname{ctg} \alpha) \tilde{h}(\xi)}{2\xi_1 - \tilde{h}(\xi) \operatorname{ctg} \alpha} + \frac{b(\xi - \xi_0)}{2\tilde{h}(\xi)} \left[\frac{2 - b \operatorname{ctg} \alpha}{1 - b\xi_0} + \frac{1 + \tilde{h}(\xi)}{\tilde{h}(\xi)} \right] \right\} + \quad (3)$$

$$+ \frac{\rho Q^2}{2\pi^2 h_0^2 (2R_0 \sin \alpha - h_0 \cos \alpha)^2} \times \left\{ 1 - \left[\frac{2\xi_0 - \operatorname{ctg} \alpha}{\tilde{h}(\xi_1) [\xi_1 (2 - b \operatorname{ctg} \alpha) + (b\xi_0 - 1) \operatorname{ctg} \alpha]} \right]^2 \right\},$$

где $\tilde{h}(\xi) = 1 + b(\xi - \xi_0)$ – изменение безразмерной ширины канала вдоль безразмерной радиальной координаты ξ , которая определяется из функции, определяющей изменение ширины канала вдоль течения:

$$h(R) = h_0 + b(R - R_0), \quad (4)$$

и безразмерных координат:

$$\xi = \frac{R}{h_0}; \quad \chi = \frac{X}{h_0}, \quad (5)$$

R и X – радиальная и поперечная биконические координаты [1], h_0 – ширина канала на его входе, т.е. при $R = R_0$.

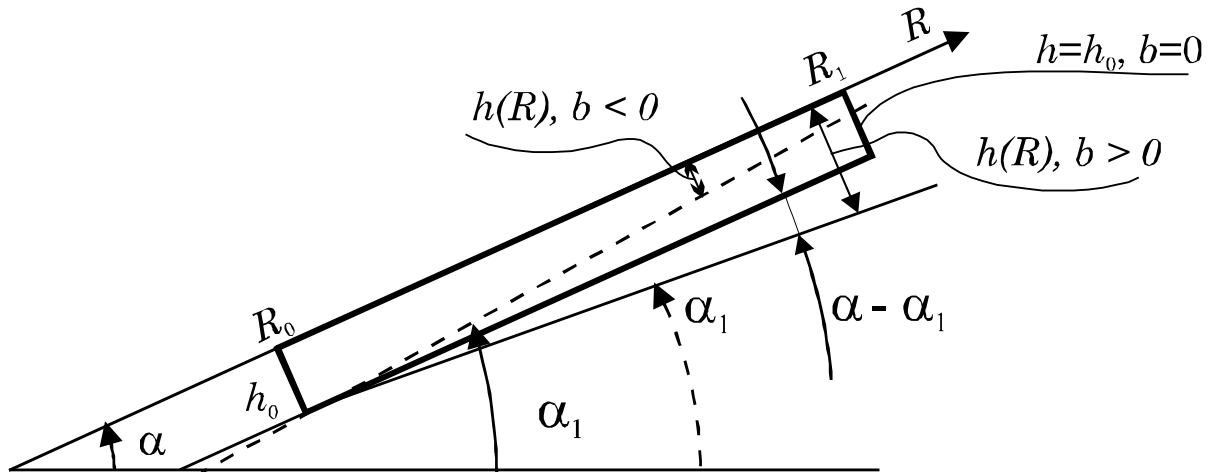


Рисунок 1 – Продольный разрез соосного конического диффузора с линейно изменяющейся шириной канала вдоль течения: $h(R)$ – ширина канала; b – коэффициент, определяющий линейную зависимость $h(R)$; h_0 – ширина канала на входе в него; R, R_0, R_1 – текущая радиальная координата, радиальная координата входа в канал и выхода из него; α – полуугол раскрытия внешней конической поверхности; α_1 – внутренней

В том случае, когда конические границы канала раскрываются в одну сторону, параметр b является тангенсом разности полууглов раскрытия внешней и внутренней границ канала (рис. 1), т.е.

$$b = \operatorname{tg}(\alpha - \alpha_1). \quad (6)$$

При анализе решений гидродинамических задач, в монографии [1], мы проверили выполнение предельных переходов от решений, найденных с более детальным учетом физических явлений к решениям, полученным в более простой постановке. Там также мы видели хорошее совпадение некоррелируемых решений одних и тех же задач, что говорит как о внутренней согласованности математических моделей, так и о большой достоверности найденных решений [2].

Сравнение с экспериментом

Однако математические решения прикладных задач обладают серьезной спецификой. Математическая модель реального объекта никогда не может быть полностью адекватна действительности, поскольку при ее составлении используются те или иные соглашения и приближения. Поэтому решающим средством контроля правдоподобности теоретических результатов является их сравнение с физическим экспериментом.

В настоящей работе проведем сравнение некоторых ранее полученных результатов с экспериментальными данными, опубликованными в научной литературе.

В работах [3, 4] авторы приводят результаты измерения перепада давления при ламинарном течении неньютоновских жидкостей в соосных конических диффузорах различной геометрии. Используемые в эксперименте жидкости идентифицировались по эффективной вязкости [5] во входном сечении канала:

$$\mu_{\text{эф}} = \frac{A}{\dot{\gamma}^m}, \quad (7)$$

где A и m параметры, определяемые по данным реологических исследований, и составляющие значения в рассматриваемых экспериментах: $A = 0.131$, $m = 0.3$.

Значение скорости сдвига на границе канала $\dot{\gamma}$ для входного сечения определялось соотношением [4]

$$\dot{\gamma} = \frac{2Q(n+2)}{\pi(r_2^2 - r_1^2)(r_2 - r_1)}, \quad (8)$$

где $n = 0.71$ – индекс течения, r_1 и r_2 – радиусы границ канала во входном сечении канала плоскостью, перпендикулярной оси канала (рис. 2).

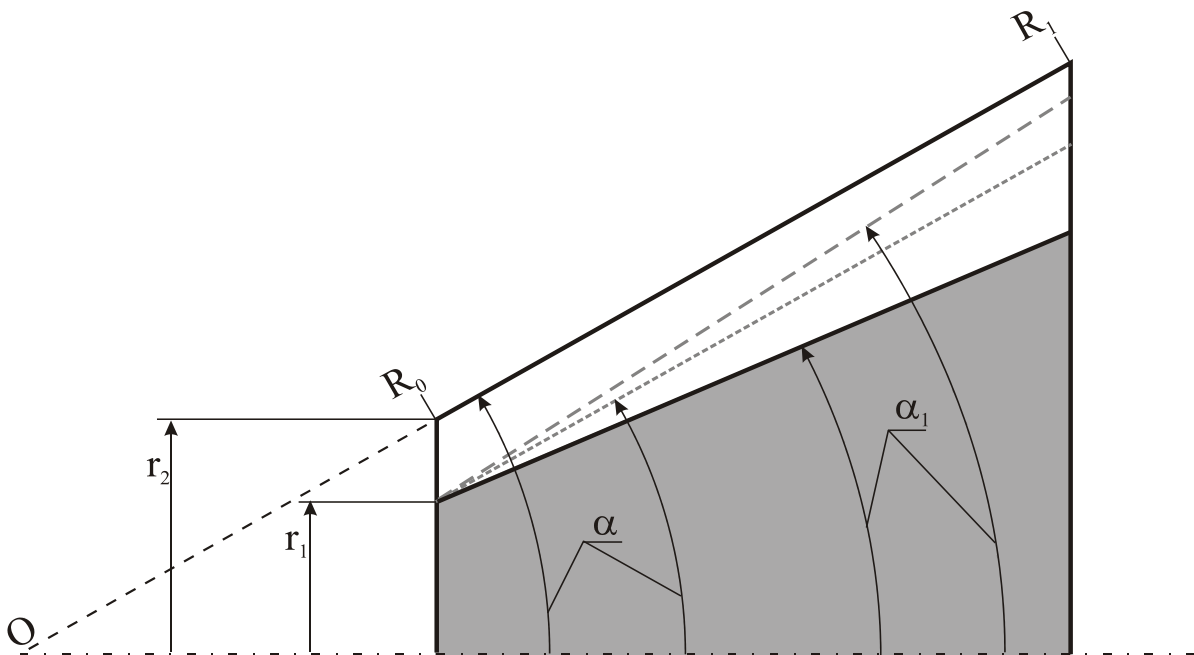


Рисунок 2 – Геометрические параметры экспериментальных соосных конических каналов
 O – вершина внешней конической поверхности; r_1 , r_2 – радиусы границ канала в его сечении плоскостью, перпендикулярной оси поверхностей; R_0 , R_1 – радиальные координаты входа в канал и выхода из него в биконической системы координат; α – полуугол раскрытия внешней конической поверхности; α_1 – полуугол раскрытия внутренней конической поверхности

Следует отметить, что данные, приведенные авторами в работах [3, 4], являются уникальными. Более качественных результатов экспериментальных исследований ламинарного изотермического течения в соосных конических каналах в научной литературе нет. Физическое моделирование течения в работах [3, 4] выполнено в каналах, образованных поверхностью внешнего конуса с углом конусности, равным $2\alpha = 58.13^\circ$ (рис. 2), и поверхностями внутренних конусов с различными углами конусности.

Для сравнения результатов, полученных в диссертации, с экспериментальными данными определим среднюю по длине канала эффективную вязкость жидкости, текущей в канале:

$$\bar{\mu}_{\text{эф}} = \frac{1}{R_1 - R_0} \int_{R_0}^{R_1} \mu_{\text{эф}} dR = \frac{A \left(\frac{\pi}{5.42Q} \right)^m}{R_1 - R_0} \int_{R_0}^{R_1} [r_2^2(R) - r_1^2(R)]^m [r_2(R) - r_1(R)]^m dR, \quad (9)$$

которую мы будем использовать для числа Рейнольдса, определенного в [1] выражением:

$$\text{Re} = \frac{\rho h_0 V_0}{\mu}, \quad (10)$$

где V_0 – скорость средняя по площади поверхности поперечного сечения входа в канал координатной поверхностью, определенная выражением:

$$V_0 = \frac{Q}{\pi h_0 (2R_0 \sin \alpha - h_0 \cos \alpha)}.$$

В работах [3, 4] использовалось число Рейнольдса, определенное на входе в канал:

$$\text{Re}_{\bar{u}} = \frac{2Q\rho}{\pi(r_1 + r_2)\mu_{\text{эф}}}. \quad (11)$$

Второй член в (3) можно выразить через число Рейнольдса (10). Далее учитывая, что $h_0 = (r_2 - r_1)/\cos \alpha$, а $R_0 = r_2/\sin \alpha$, получим связь между числами Рейнольдса, определенными по (10) с учетом (9) и по (11):

$$\text{Re}_{\bar{u}} = 2 \text{Re} \frac{\bar{\mu}_{\text{эф}}}{\mu_{\text{эф}}}, \quad (12)$$

Полученное соотношение (12) позволяет сравнить результаты экспериментов [3, 4] с расчетными данными для условий экспериментов.

При течении в диффузоре с разностью полууглов раскрытия $\alpha - \alpha_1 = -0.77^\circ$, т.е. в канале с уменьшающейся шириной вдоль течения, наибольшее отклонение перепада давления, рассчитанного по (3), от экспериментального $\sim 13\%$, наблюдается при малых числах Рейнольдса $\text{Re}_{\bar{u}}$ в диапазоне их изменения 22.5–30 (рис. 3). Во всем остальном диапазоне изменения чисел Рейнольдса отклонение расчетных и экспериментальных значений не превосходит 5%.

При течении в диффузоре с разностью полууглов раскрытия $\alpha - \alpha_1 = -3.95^\circ$ наблюдается хорошее согласие между экспериментальными и расчетными данными (рис. 3).

В случае течения в диффузоре с увеличивающейся шириной вдоль течения $\alpha - \alpha_1 = 2.9^\circ$ (рис. 2) также наблюдается практически полное совпадение экспериментальных и теоретических значений перепада давления в канале (рис. 3).

Следует заметить, что наибольшие отклонения расчетных данных от экспериментальных значений наблюдаются в случае с наибольшим разбросом экспериментальных данных (рис. 3).

Приведенные в диссертации решения позволяют более детально исследовать ламинарные течения, для которых получены экспериментальные данные. Соотношения (10.81) из [1] позволяют определить критическое значение числа Рейнольдса, вплоть до которого можно при расчете перепада давления пренебрегать его динамической составляющей с точностью до 4–5%.

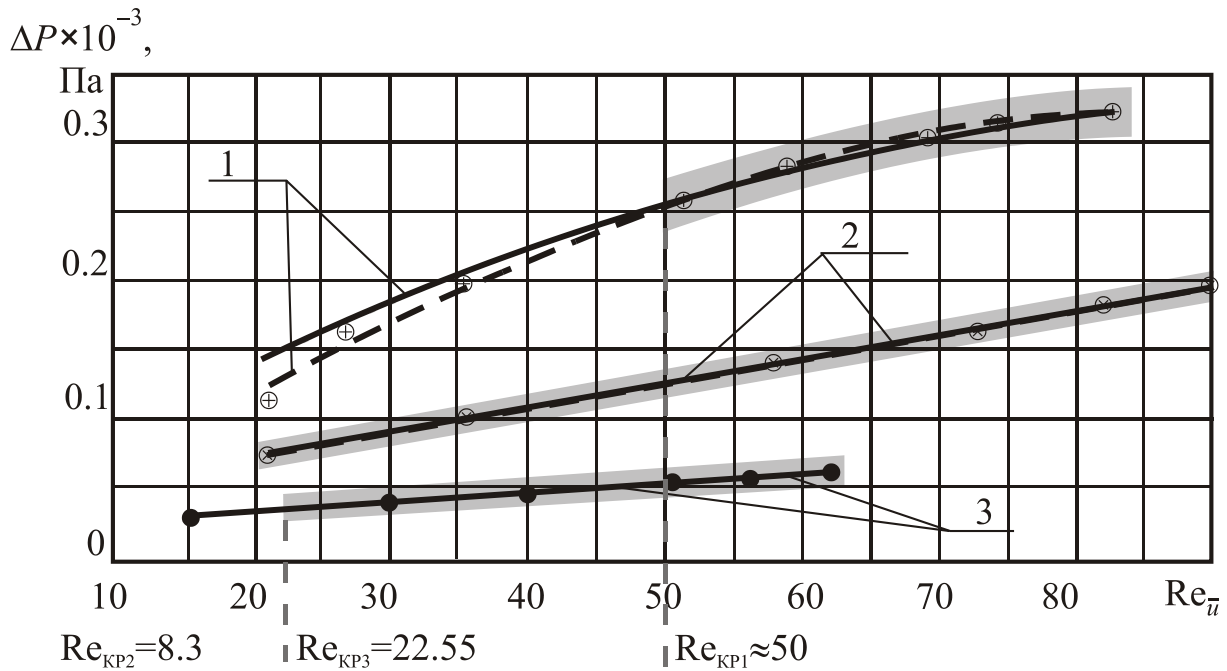


Рисунок 3 – Сравнение экспериментальных значений модуля перепада давления при ламинарном течении в соосном коническом канале с расчетными значениями

1 – течение в диффузоре при уменьшающейся ширине вдоль канала с параметрами $2\alpha = 58,13^\circ$, $\alpha - \alpha_1 = -0.77^\circ$, $R = 9.94 \times 10^{-2}$ м; $R_1 = 0.19$ м; 2 – течение в диффузоре при уменьшающейся ширине вдоль канала с параметрами $\alpha - \alpha_1 = -3.95^\circ$, $R = 9.94 \times 10^{-2}$ м; $R_1 = 0.125$ м; 3 – течение в диффузоре при увеличивающейся ширине вдоль канала с параметрами $2\alpha = 58,13^\circ$, $\alpha - \alpha_1 = 2.9^\circ$, $R = 9.94 \times 10^{-2}$ м, $R_1 = 0.145$ м. Числа Re_{KP} показывают значения чисел Re_{ii} , вплоть до которых расчет ΔP без учета инерционной силы не приведет к ошибке более, чем в 5%. Затемненные области кривых показывают диапазон изменения чисел Re_{ii} , в которых неучет инерционной составляющей при определении ΔP приведет к ошибке более, чем 5%

Для течения в диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль течения при $\alpha - \alpha_1 = -0.77^\circ$ это значение составляет величину $Re_{ii} \approx 50$. Для диффузора с $\alpha - \alpha_1 = -3.95^\circ$ влияние инерционных сил существенно во всем интервале изменения чисел Рейнольдса, поскольку критическое значение Re_{ii} равно 8.3 (рис. 3). Это связано с тем, что в диффузоре с $\alpha - \alpha_1 = -0.77^\circ$ относительная площадь поперечного сечения [1],

$$\tilde{s} = \frac{[1 + b(\xi - \xi_0)] \{2\xi - [1 + b(\xi - \xi_0)] \operatorname{ctg} \alpha\}}{2\xi_0 - \operatorname{ctg} \alpha} \quad (13)$$

вдоль канала меняется менее значительно, чем в диффузоре с $\alpha - \alpha_1 = -3.95^\circ$ (рис. 4), т.е. в первом случае величина конвективного ускорения будет меньше, чем во втором, а это означает, что инерционная составляющая будет давать существенный вклад в перепад давления в первом случае при больших числах Рейнольдса.

Действительно, при малых числах Re_{ii} распределение безразмерного давления в диффузоре с $\alpha - \alpha_1 = -0.77^\circ$ незначительно отличается от его диссипативной составляющей (рис. 5), а при $Re_{ii} = 83.1$ отклонение составляет величину $\sim 4\%$.

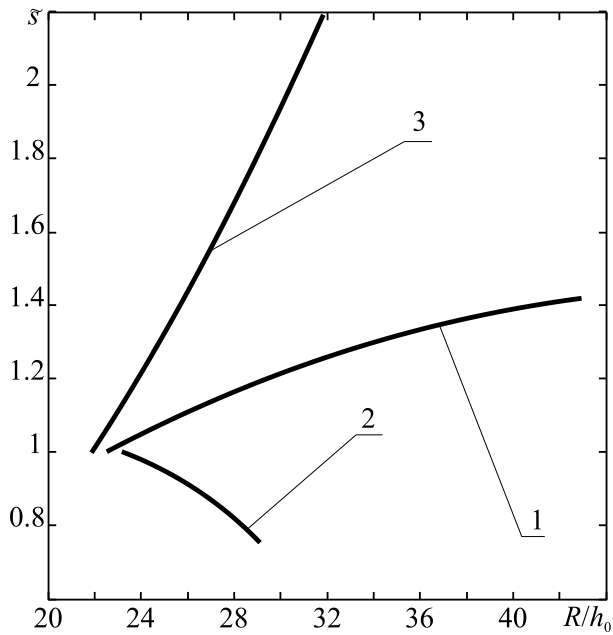


Рисунок 4 – Изменение безразмерной относительной площади поверхности поперечного сечения экспериментальных каналов вдоль течения

1 – течение в диффузоре при уменьшающейся ширине вдоль канала с параметрами $2\alpha = 58,13^\circ$, $\alpha - \alpha_1 = -0.77^\circ$, $R = 9.94 \times 10^{-2}$ м; $R_1 = 0.19$ м; 2 – течение в диффузоре при уменьшающейся ширине вдоль канала с параметрами $\alpha - \alpha_1 = -3.95^\circ$, $R = 9.94 \times 10^{-2}$ м; $R_1 = 0.125$ м; 3 – течение в диффузоре при увеличивающейся ширине вдоль канала с параметрами $2\alpha = 58,13^\circ$, $\alpha - \alpha_1 = 2.9^\circ$, $R = 9.94 \times 10^{-2}$ м; $R_1 = 0.145$ м

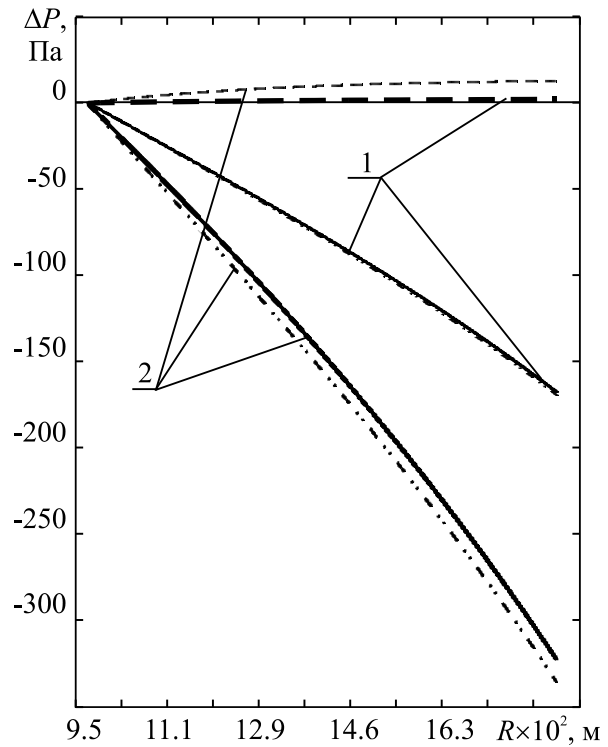


Рисунок 5 – Распределение перепада давления вдоль ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль течения и параметрами: $2\alpha = 58,13^\circ$, $\alpha - \alpha_1 = -0.77^\circ$, $R = 9.94 \times 10^{-2}$ м; $R_1 = 0.19$ м. 1 – течение с числом Рейнольдса $Re_u = 22.5$, 2 – $Re_u = 83.1$. Пунктирные линии – динамическая составляющая перепада давления; штрих-пунктирные – диссипативная составляющая перепада давления; сплошные линии – полный перепад давления

В диффузоре с $\alpha - \alpha_1 = -0.77^\circ$ площадь поверхности поперечного сечения растет вдоль течения (рис. 4), что приводит к положительному значению инерционной составляющей перепада давления (рис. 5), поэтому абсолютная составляющая давления в канале будет всегда меньше модуля его диссипативной компоненты.

В случае течения в диффузоре с разностью полууглов раскрытия $\alpha - \alpha_1 = -3.95^\circ$ площадь поверхности поперечного сечения уменьшается вдоль течения (рис. 4), из-за чего динамическая составляющая давления отрицательна (рис. 6), и поэтому абсолютная величина давления всегда больше модуля его диссипативной составляющей. Здесь при наименьших числах Рейнольдса ~ 20 модуль относительного отклонения давления от его диссипативной составляющей около 4 %, а при наибольших числах Re_u составляет значение ~ 14 %.

Площадь поверхности поперечного сечения в диффузоре с увеличивающейся шириной вдоль канала, т.е. при $\alpha - \alpha_1 = 2.9^\circ$, изменяется наиболее сильно в рассматриваемых случаях, и понятно, что увеличивается вдоль течения жидкости. Это приводит к положительной величине динамической составляющей давления, и поэтому модуль пе-

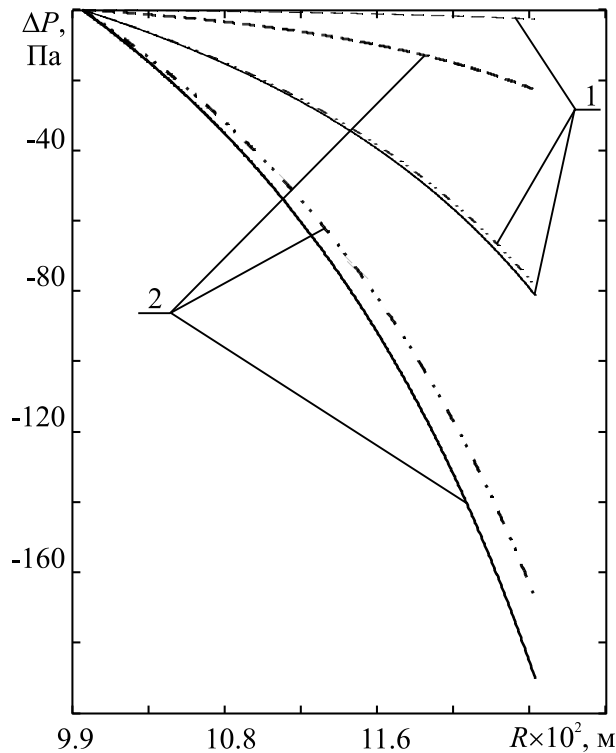


Рисунок 6 – Распределение перепада давления вдоль ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль течения и параметрами: $2\alpha = 58,13^\circ$, $\alpha - \alpha_1 = -3,95^\circ$, $R = 9,94 \times 10^{-2}$ м; $R_1 = 0,125$ м. 1 – течение с числом Рейнольдса $Re_{\bar{u}} = 22,02$, 2 – $Re_{\bar{u}} = 90,03$.

Пунктирные линии – динамическая составляющая перепада давления; штрих-пунктирные – диссипативная составляющая перепада давления; сплошные линии – полный перепад давления

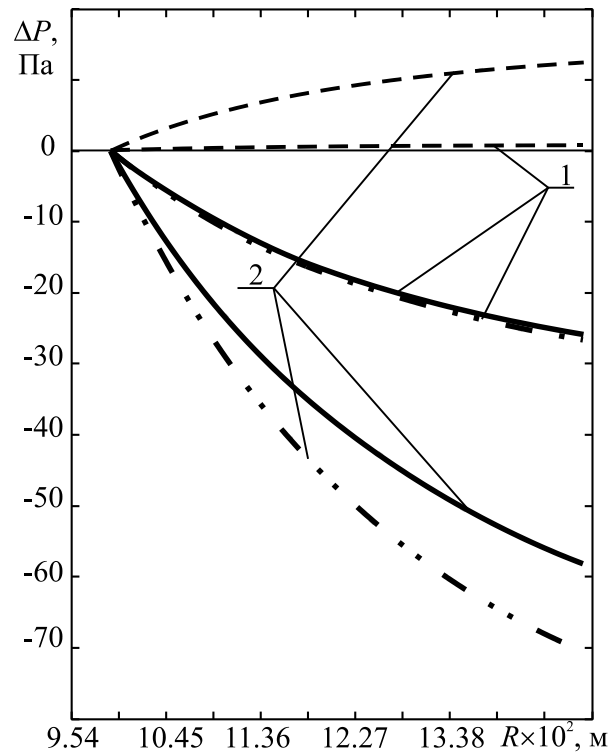


Рисунок 7 – Распределение перепада давления вдоль ламинарного течения в соосном коническом диффузоре с уменьшающейся шириной вдоль течения и параметрами: $2\alpha = 58,13^\circ$, $\alpha - \alpha_1 = 2,9^\circ$, $R = 9,94 \times 10^{-2}$ м, $R_1 = 0,145$ м. 1 – течение с числом Рейнольдса $Re_{\bar{u}} = 10,05$, 2 – $Re_{\bar{u}} = 62,7$.

Пунктирные линии – динамическая составляющая перепада давления; штрих-пунктирные – диссипативная составляющая перепада давления; сплошные линии – полный перепад давления

перепада давления всегда будет меньше его диссипативной части (рис. 7). Влияние инерционной силы на перепад давления, в данном случае, существенно практически во всем исследованном диапазоне чисел Рейнольдса (рис. 3). А выражение (10.81) из [1] дает здесь значение $Re_{\bar{u}} = 15,5$, т.е. в начале кривой на рисунке 3.

Заключение

В данной работе мы не только получили подтверждение адекватности решений, найденных в монографии [1] в достаточно широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса и для различных геометрий канала, но показали, что с помощью аналитического решения можно провести более детальный анализ ламинарного течения в соосных конических каналах, включая и анализ экспериментальных результатов.

Обозначения: h – ширина соосного конического канала, м; P – давление на входе в канал и текущее давление, Па; Q – объемный расход жидкости, м³/с; R_0, R_1 – значения радиальных координат входа в соосный конический канал и выхода из него, м; V_0 – средняя по поперечному сечению размерная скорость на входе в канал, м/с; α – половина угла раскрытия конических поверхностей, образующих границы канала, рад; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости, Па·с; ρ – плотность жидкости, кг/м³;

Литература

1. Ульев Л.М. Ламинарные течения в соосных конических каналах. Т. 1. / Под ред. Л.Л. Товажнянского. – Харьков. Изд-во НТУ "ХПИ". 2006. – 660 с.
2. Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Правдоподобность и доказательность в прикладной математике // Механика твердого тела. 1967. № 2. с. 196–202.
3. Яхно О.М., Кривошеев В.С., Кривошеев О.В. Особенности гидравлического расчета течений в конических кольцевых каналах // Вестник НТУ «КПИ», Машиностроение. Вып. 36. Т. 2. 1999. С. 369–375.
4. Яхно О.М., Матиега В.М., Кривошеев В.С. Гидродинамический начальный участок. – Черновцы, «Зелена Буковина». 2004. –144 с.
5. Смольский Б.М., Шульман З.П., Гориславец В.М. Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов. – Минск: Наука и технология, 1970. – С. 448.

УДК 532.5; 678.027

Ульев Л.М.

ПОРІВНЯННЯ АНАЛІТИЧНОГО РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ РІДИНИ В СПІВВІСНОМУ КОНІЧНОМУ КАНАЛІ З ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ

У даній роботі ми не тільки одержали підтвердження адекватності аналітичних рішень які знайдено у монографії [1] у досить широкому діапазоні зміни чисел Рейнольдса й для різних геометрій каналу, але також показали, що за допомогою аналітичного рішення можна провести більш детальний аналіз ламінарної течії рідини в співвісних конічних каналах, включаючи й аналіз експериментальних даних.