



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

А. И. ЛОБОДА, Е. Н. ЛАПУЗИНА

МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Часть II

Производные. Исследование функций.
Интегралы. Дифференциальные уравнения
Учебное пособие для иностранных студентов

УТВЕРЖДЕНО
РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИМ
СОВЕТОМ УНИВЕРСИТЕТА,
ПРОТОКОЛ N2 ОТ 07.12.2011 г.

ХАРЬКОВ НТУ «ХПИ» 2013

ББК 22.1я73

Л 68

УДК 512.643:514.123(075)

Рецензенти: *В.П. Ольшанський* д-р фіз-мат. наук, проф. ХНТУ сільського господарства; *Г.І. Тохтарь*, канд. техн. наук, проф. ХНАДУ.

Навчальний посібник містить інформацію (теоретичний матеріал, задачі, методи розв'язку) за розділами математики для економістів, які включені до програми підготовки молодших спеціалістів економічного профілю. Посібник включає основні розділи курсу математичного аналізу.

Навчальний посібник призначено для іноземних студентів економічного профілю навчання.

Л 68 **Лобода А. І.** Математика для економістів: навчальний посібник для іноземних студентів: у 2 ч. – Ч. II: Похідна. Дослідження функцій. Інтеграли. Диференційні рівняння / А. І. Лобода, О. М. Лапузіна. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – 220 с. – Рос. мовою.

ISBN

Учебное пособие содержит информацию (теоретический материал, задачи, методы решения) по разделам математики для экономистов, которые включены в программу подготовки младших специалистов экономического профиля. В пособие вошли основные разделы курса математического анализа.

Учебное пособие предназначено для иностранных студентов экономического профиля обучения.

Лл. 44 . Табл.8 . Бібліогр. 8 назв.

УДК 512.643:514.123(075)

ББК 22.1я73

© А.І. Лобода, О.М. Лапузіна, 2013 р.

© НТУ «ХПІ», 2013 р.

© Т.С. Космачова макет та оформлення, 2013 р.

Предисловие

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для иностранных студентов экономических специальностей, изучающих курс «Математика для экономистов» по программе бакалаврата.

Содержание пособия определяется учебными планами и программами для студентов экономического профиля и включает основные разделы высшей математики: линейную алгебру, аналитическую геометрию и математический анализ.

Пособие содержит материалы, необходимые для дальнейшего изучения теории вероятности, математической статистики, математического программирования, макро- и микроэкономики.

Материал пособия изложен в двух частях. В первую часть включены разделы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, понятие функции и ее предела.

Вторая часть содержит материалы по применению производной для исследования функций, основные правила интегрирования, а также понятие и методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Каждая тема пособия начинается с раздела «Лексика темы» (глоссарий), который содержит ключевые слова и понятия, используемые в текстах и заданиях. Словарь составлен на английском и китайском языках.

В процессе изложения материала формальная полнота формулировок и доказательств не является самоцелью. Основное внимание направлено на смысл математических понятий и их применение при решении конкретных задач, в частности экономических.

Предисловие

Изложение материала построено по принципу постепенного усложнения теоретической информации от темы к теме. Это позволяет студентам освоить терминологию курса, насыщенного большим объемом нового материала при отсутствии языка посредника.

Доступное изложение основных понятий теории, примеры решения типовых задач, контрольные вопросы и задания дают студентам возможность самостоятельно работать с литературой математического цикла.

Авторы выражают большую благодарность за помощь в оформлении работы и подготовку к печати оригинал-макета пособия инженеру кафедры естественных наук факультета международного образования НТУ «ХПИ» Космачевой Т.С.

**ПРОИЗВОДНЫЕ,
ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ.
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ**

- 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ.**
- 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ.**
- 3. ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ.**
- 4. СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНОЙ.**
- 5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.**
- 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ.**
- 7. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ**
- 8. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ.**

Лексика темы

аргумент	argument	论据
приращение <i>аргумента</i>	increment of argument	增量的说法
геометрия	geometry	几何
геометрический	geometric	几何学
<i>геометрический</i> СМЫСЛ	<i>geometric sense</i>	几何学意义
<i>геометрический</i> УГОЛ	<i>geometric angle</i>	几何学角度
главная	main	主要的
<i>главная</i> секущая	<i>main secant</i>	主要割线
дифференциал	differential	差别
дифференцирование	differentiation	分化
касательная	tangent	切线(正切)
нормаль	normal, perpendicular	标准的(垂直)
обратный	inverse	相反
остаточный	residual	剩余
отношение	ratio	关系
производная	derivative	衍生物
<i>производная</i> слева	<i>left-hand derivative</i>	导数(左)
<i>производная</i> справа	<i>right-hand derivative</i>	导数(右)
разложить	expand, factor	分解,分散

Тема 1

ряд	row	数字
скорость	speed	速度
<i>скорость</i> изменения функции	<i>rate of function's</i> change	速度改变的 图像
средняя точка	midpoint	中点
стационарные точки	stationary points	固定点
точки экстремума	points of extremum	极值点
угловой	angular	角
ускорение	acceleration	加速度

физический	physical	物理
функция	function	功能, 函数
нелинейная <i>функция</i>	<i>nonlinear function</i>	非线性函数
неявная <i>функция</i>	<i>implicit function</i>	隐函数
приращение <i>функции</i>	increment of <i>function</i>	增量的职能
экстремум <i>функции</i>	extremum of <i>function</i>	极值函数
явная <i>функция</i>	<i>obvious function</i>	显函数

1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $[a, b]$, а точка $x = x_0$ принадлежит этому интервалу. Возьмем произвольную точку x из этого интервала, составим разность $x - x_0$ и обозначим ее Δx .

$$\Delta x = x - x_0. \quad (1.1)$$

Эта разность называется *приращением аргумента функции*.

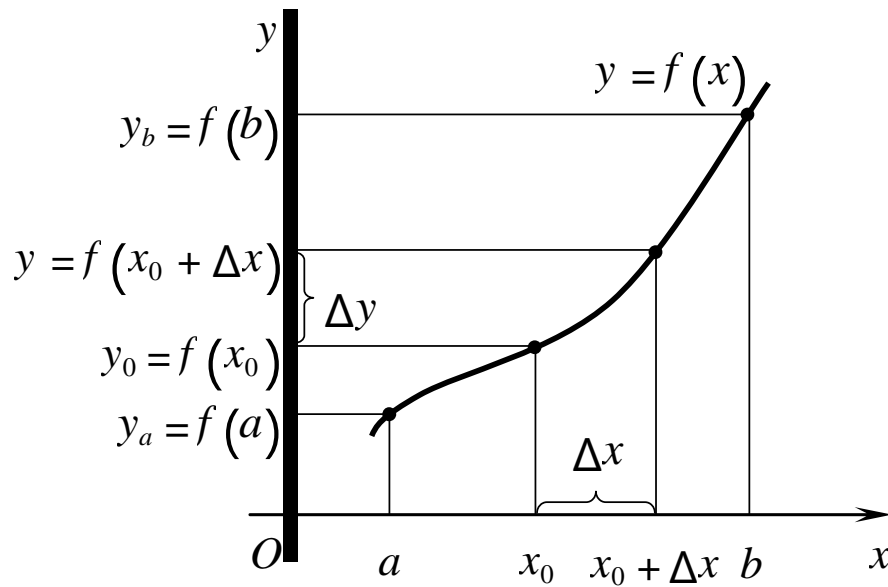


Рисунок – 1.1

Разность между значением функции в точке $x = x_0 + \Delta x$ и значением функции в точке $x = x_0$ называется **приращением функции** и обозначается Δy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (1.2)$$

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если x стремится к x_0 , а Δx стремится к нулю. Это будет новая функция. Обозначим ее y' (читаем: «Игрек штрих»)

$$y'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1.3)$$

Если этот предел существует, то функция $y = f(x)$ имеет производную в данной точке x_0 , или функция дифференцируема в этой точке.

3 АПОМНИТЕ

Производная функции есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В литературе используют различные обозначения для производных: y' или y_x – Лагранж; $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df}{dx}$ – Лейбниц;

D_y или D_f – Коши.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают так:

Тема 1

$$y'(x_0) \equiv f'(x_0) \equiv \frac{dy(x_0)}{dx} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv f'(x) \Big|_{x=x_0}.$$

ЗАПОМНИТЕ

Операция нахождения (взятия) производной функции $y = f(x)$ называется **дифференцированием функции**.

1.2. Геометрический и физический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ в декартовой системе координат xOy (рис. 1.2).

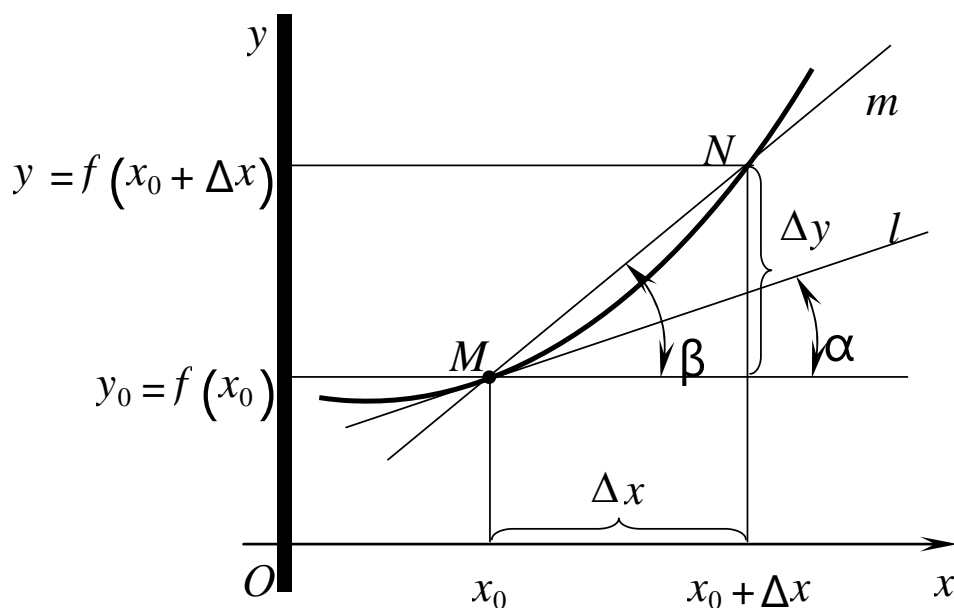


Рисунок – 1.2

Возьмем на графике точку $M(x_0, y_0)$ и точку $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Проведем через эти точки прямую m . Эта прямая называется **секущей**. Угловым коэффициентом этой прямой равен тангенсу угла наклона ее к оси Ox : $k_m = \operatorname{tg}\beta$. Из рисунка 1.2 видно, что $\operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то секущая MN поворачивается вокруг точки M и в пределе переходит в касательную l с угловым

коэффициентом $k_l = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$.

ЗАПОМНИТЕ

Угловым коэффициентом касательной к графику функции в данной точке равен значению производной функции в этой точке. Это *геометрический смысл* производной.

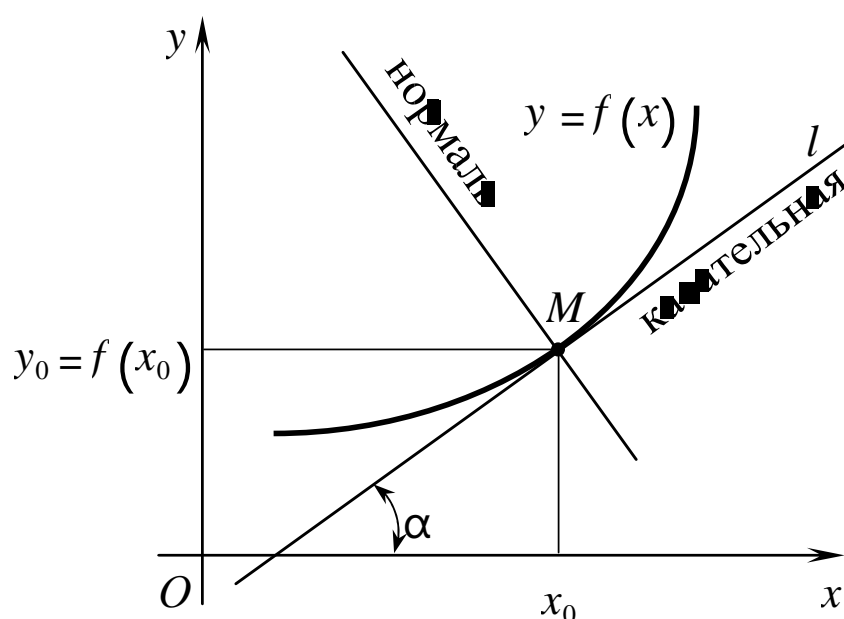


Рисунок – 1.3

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta x$$

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке

$M(x_0, y_0)$ запишем как уравнение прямой, которая проходит через заданную точку M (рис. 1.3).

$$y - y_0 = k(x - x_0) \equiv y'(x_0)(x - x_0).$$

Так как нормаль (рис. 1.3) перпендикулярна касательной, то *уравнение нормали к кривой* $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ запишем как

$$y - y_0 = - \frac{1}{y'(x_0)} (x - x_0) .$$

Для выяснения физического смысла производной рассмотрим задачу о свободном падении тела и найдем мгновенную скорость его движения. Из физики мы знаем, что

$$h = \frac{gt^2}{2} ,$$

где h – высота падения; g – ускорение свободного падения; t – время падения.

За время t_0 тело проходит расстояние $h_0 = \frac{gt_0^2}{2}$, а за вре-

мя t_1 – расстояние $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$. Приращение аргумента (време-

ни t) будет равно $\Delta t = t_1 - t_0$, откуда $t_1 = t_0 + \Delta t$.

Тема 1

Приращение функции $h(t)$ будет равно

$$\Delta h = h_1 - h_0 = \frac{gt_1^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g\Delta t}{2} (2t_0 + \Delta t).$$

Найдем предел отношения приращения функции $h(t)$ к приращению ее аргумента t , если Δt стремится к нулю

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} = h'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g\Delta t}{2} (2t_0 + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt_0 + \frac{g\Delta t}{2} \right) = gt_0.$$

В левой части равенства мы получили значение производной функции $h(t)$, а в правой части – значение мгновенной скорости тела в момент времени t_0 .

3_ АПОМНИТЕ

Производная функции есть скорость изменения функции, отнесенная к единице изменения аргумента. *Это физический смысл производной.*

1.3. Производные основных элементарных функций

Далее приведены формулы для производных основных элементарных функций.

1. Производная степенной функции $y = x^n$

$$(x^n)' = nx^{n-1}; \quad (x)' = 1;$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2x^{3/2}}$$

2. Производная показательной функции $y = a^x$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x.$$

3. Производная логарифмической функции $y = \log_a x$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4. Производные тригонометрических функций

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

5. Производные обратных тригонометрических функций

Тема 1

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

1.4. Свойства производной

1. Производная постоянной равна нулю

$$(C)' = 0.$$

Если $y = C$, то $\Delta y = C - C = 0$, а $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

2. Производная суммы функций равна сумме производных этих функций

$$(U + V)' = U' + V'. \quad (1.4)$$

ПРИМЕР 1.1. Найти производную функции $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$.

РЕШЕНИЕ. $y' = (5x^3)' - (3x^2)' + (x)' - (1)' = 15x^2 - 6x + 1$.

ОТВЕТ. $y' = 15x^2 - 6x + 1$.

3. Постоянный множитель можно вынести за знак производной

$$(CU)' = CU' . \quad (1.5)$$

ПРИМЕР 1.2. Найти производную функции $y = 3\sin x$.

РЕШЕНИЕ. $y' = (3\sin x)' = 3(\sin x)' = 3\cos x$.

ОТВЕТ. $y' = 3\cos x$.

4. Производная произведения функций

$$[U(x)V(x)]' = U'V + UV' . \quad (1.6)$$

ПРИМЕР 1.3. Найти производную функции $y = (x^2 + 1)\sin^3 x$.

РЕШЕНИЕ. $y' = (x^2 + 1)' \sin^3 x + (x^2 + 1)(\sin^3 x)' = 2x\sin^3 x + (x^2 + 1)3\sin^2 x = \sin^2 x [2x\sin x + 3(x^2 + 1)]$.

ОТВЕТ. $y' = \sin^2 x [2x\sin x + 3(x^2 + 1)]$.

5. Производная частного двух функций

$$\frac{[U(x)]' \cdot \frac{U'V - UV'}{V^2}}{V(x)} = \frac{U'V - UV'}{V^2} . \quad (1.7)$$

ПРИМЕР 1.4. Найти производную функции $y = \frac{3x^5}{x} \cdot e$

Тема 1

$$\text{РЕШЕНИЕ. } y' = \frac{(3x^5)'e^x - 3x^5(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{15x^4e^x - 3x^5e^x}{(e^x)^2} = \frac{3x^4e^x(5-x)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{3x^4(5-x)}{e^x}$$

$$\text{ОТВЕТ. } y' = \frac{3x^4(5-x)}{e^x}$$

6. Производная сложной функции $y = f[U(x)]$

$$y'_x = y'_U U'_x. \quad (1.8)$$

ПРИМЕР 1.5. Найти производную функции $y = \sin 5x^2$.

$$\text{РЕШЕНИЕ. } y' = (\sin 5x^2)' = (\sin 5x^2)'_{5x^2} (5x^2)' = \cos 5x^2 \cdot 10x = 10x \cos 5x^2.$$

$$\text{ОТВЕТ. } y' = 10x \cos 5x^2.$$

7. Производная обратной функции

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \quad (1.9)$$

ПРИМЕР 1.6. Найти производную функции обратной $y = \sqrt[3]{x}$.

РЕШЕНИЕ. Запишем функцию, обратную данной $x = y^3$. Найдем ее производную по y . Получим $x'_y = 3y^2 = 3\sqrt[3]{x^2}$.

Сравним это выражение с производной от y по x . Получим

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2} x'_y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot 3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3^2 \sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{3^2 x^{4/3}}$$

ОТВЕТ. $x'_y = 3\sqrt[3]{x^2}$.

8. Производная неявной функции

Если задана неявная функция $F(x, y) = 0$, то для вычисления производной y'_x нужно приравнять производные от левой и правой частей. При этом y есть функция от x , которая обращает соотношение $F(x, y) = 0$ в тождество.

ПРИМЕР 1.7. Найти производную функции y , заданную соотношением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

РЕШЕНИЕ. $(\frac{x^2}{a^2})' + (\frac{y^2}{b^2})' = (1)'_x$, $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y y'_x}{b^2} = 0$, тогда

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y y'_x}{b^2} = 0$$

$$2b^2 x + 2a^2 y y' = 0 \text{ или } y' = -\frac{2b^2 x}{2a^2 y} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Тема 1

ОТВЕТ. $y' = -\frac{b_{22}x}{ay}$.

9. Логарифмическое дифференцирование

Иногда, прежде чем находить производную, удобно прологарифмировать функцию.

Пример 1.8. Найти производную функции $y = x^x$.

РЕШЕНИЕ. Прологарифмируем обе части равенства $\ln y = x \ln x$. Дифференцируем обе части равенства

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1, \text{ откуда}$$
$$y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x).$$

ОТВЕТ. $y' = x^x(1 + \ln x)$.

Пример 1.9. Найти производную функции $y = x^{\sqrt{x}}$.

$$\ln y = \sqrt{x} \ln x, (\ln y)' = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)', y' = -\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} (1 - \ln x).$$

ОТВЕТ. $y' = x^{\sqrt{x}} \frac{1 - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

1.5. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y'(x) = f'(x)$, которая тоже есть функция от x . Эта производная называется **производной первого порядка** или **первой производной**.

От первой производной можно взять производную, которая будет называться **производной второго порядка** или **второй производной**

$$y'' = (y')' = f''(x) . \quad (1.10)$$

Аналогично можно найти производные третьего, четвертого, ... $n^{\text{го}}$ порядка. Производные высших порядков обозначают так: dy

$y' = \frac{dy}{dx}$ – производная первого порядка;

$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ – производная второго порядка («Де два игрек по де икс дважды»);

.....
...

$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ – производная $n^{\text{го}}$ порядка («Де эн игрек по де икс в степени эн»).

ПРИМЕР 1.10. Найти пятую производную функции $y = x^7$.

РЕШЕНИЕ. $y' = 7x^6$, $y'' = 6 \cdot 7 \cdot x^5$, $y''' = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot x^4$, $y^{IV} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot x^3$, $y^V = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot x^2 = 2520x^2$.

ОТВЕТ. $y^V = 2520x^2$.

Тема 1

Если $y = U + V + \dots + W$, то ее n -ая производная равна сумме n -ых производных функций U, V, \dots, W .

$$y^{(n)} = (U + V + \dots + W)^{(n)} = U^{(n)} + V^{(n)} + \dots + W^{(n)} .$$

Формула для производной произведения $y = U \cdot V$ может быть записана в виде формулы Лейбница.

$$y^{(n)} = (UV)^{(n)} = U^{(n)}V + \binom{n}{1} U^{(n-1)}V' + \binom{n}{2} U^{(n-2)}V'' + \dots + UV^{(n)} .$$

1.6. Дифференциал функции

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.

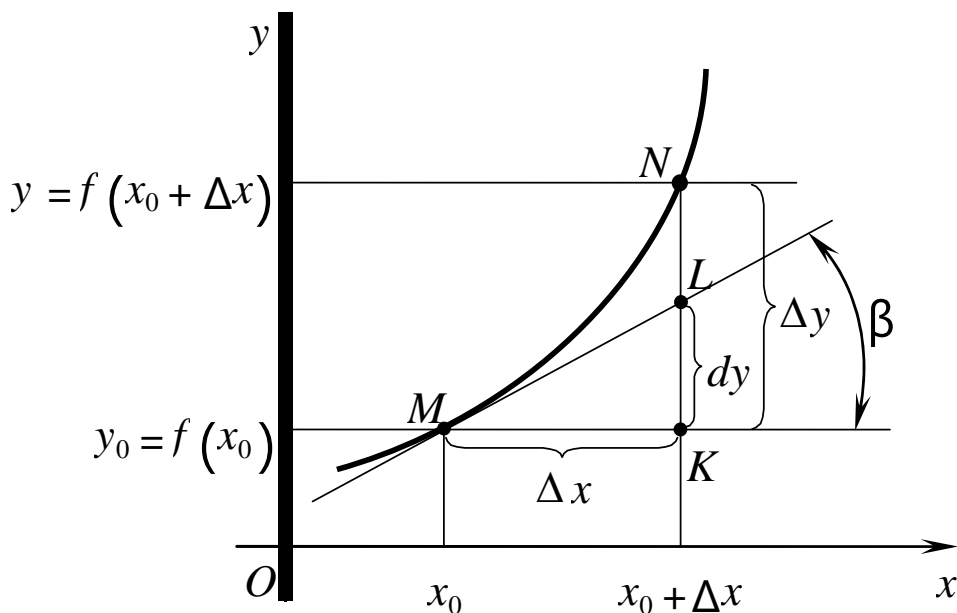


Рисунок – 1.4

В точке $M(x_0, y_0)$ значение функции будет равно $y(x_0) = f(x_0)$. Дадим аргументу функции приращение Δx (отрезок MK).

Значение функции в точке $x_0 + \Delta x$ будет равно $f(x_0 + \Delta x)$, а ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. На ри-

сунке 1.4 – это отрезок NK . Найдем значение производной функции в точке M . Оно равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в данной точке $y' = \operatorname{tg}\alpha$. Эта касательная отсекает на отрезке NK отрезок KL – часть приращения функции Δy . Эту часть приращения функции Δy обозначают dy и называют **дифференциалом функции**.

Тогда dy

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ откуда}$$

$$dy = y' \Delta x.$$

3_АПОМНИТЕ

Главная часть приращения функции, линейная относительно Δx , называется <u>дифференциалом функции</u> .
--

Для линейной функции $y=x$ имеем $dy=dx=\Delta x$. Дифференциал аргумента равен его приращению. Тогда $dy = f'(x)dx$,

Тема 1

и мы получаем обозначение производной $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Если в

формуле приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ заменить Δy значением дифференциала в этой точке, то получим приближенное равенство

$$f'(x_0)\Delta x = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Эта формула позволяет приближенно вычислить значение функции при небольших приращениях аргумента.

ПРИМЕР 1.11. Найти приближенное значение функции $y = x^2$ в точке $x_1 = 1,1$, если приращение функции заменить его дифференциалом.

РЕШЕНИЕ. Пусть первоначальное значение переменной $x_0 = 1$. Тогда $y(1) = 1$, а $\Delta x = 1,1 - 1 = 0,1$.

Найдем значение производной в точке $x_0 = 1$.

$$y' = 2x_{x_0=1} = 2.$$

Значение функции в точке $x = 1,1$ будет равно $y(1,1) =$

$= 1 + 2 \cdot 0,1 = 1,2$. Точное значение функции при $x = 1,1$ будет равно $y(1,1) = 1,21$. Абсолютная ошибка составляет $0,01$, а относительная ошибка $\approx 5\%$.

ОТВЕТ. $y(1,1) = 1,2$.

ПРИМЕР 1.12. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{17}$.

РЕШЕНИЕ. Запишем задачу в виде функции $y = \sqrt[4]{x}$. Принимаем первоначальное значение переменной $x_0 = 16$, тогда $\Delta x = x_1 - x_0 = 17 - 16 = 1$, а $y(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$.

Найдем значение производной функции $y = \sqrt[4]{x}$.

$$y'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}.$$

Найдем значение производной при $x_0 = 16$.

$$y'(x_0) = \frac{1}{4 \sqrt[4]{x_0^3}} = \frac{1}{4 \sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}.$$

Значение функции при $x = 17$ будет равно

$$y(17) = y(x_0) + y'(x_0) \Delta x = 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = 2 \frac{1}{32} \approx 2,031.$$

С помощью калькулятора найдем значение функции с точностью до 10^{-7}

$$y = \sqrt[4]{17} \approx 2,0305431.$$

Ошибка, с которой мы получили результат, составляет $\delta = 0,0004569$.

Тема 1

ОТВЕТ. $\sqrt[4]{7} \approx 2,031$.

ПРИМЕР 1.13. Найти $\sin 29^\circ$.

РЕШЕНИЕ. Для функции $y = \sin x$ при $x_0 = 30$ имеем

$$y_0 = \frac{1}{2}, \quad \Delta x = x_1 - x_0 = 29 - 30 = -1 = -\frac{\pi}{180}.$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x,$$

$$y'(x_0) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned} \approx 0,5 - \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} y &= \sin 29^\circ = \\ &\approx 0,5 - 0,0151071 \approx 0,4848. \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $\sin 29^\circ \approx 0,4848$.

Дифференциал второго порядка $d^2 y$ – это дифференциал от дифференциала первого порядка. Для функции $y = f(x)$ дифференциал первого порядка $dy = f'(x)dx$. При повторном дифференцировании dx считается независимым от x , и дифференциал второго порядка будет записан так:

$$d^2 y = [f'(x)]' dx^2 = f''(x)dx^2.$$

Аналогично можно записать дифференциал $n^{\text{го}}$ порядка

в виде

$$d^n y = f^n(x) dx^n.$$

Используя производные высших порядков, дифференцируемую функцию можно представить в виде многочлена $n^{\text{ой}}$ степени.

ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА

Функция, дифференцируемая $n + 1$ раз в некотором интервале, который содержит точку $x = a$, может быть представлена в виде многочлена $n^{\text{ой}}$ степени и остаточного члена $R_n(x)$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n, \quad (1.11)$$

где $R_n = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ **есть остаточный член разложения**

Остаточный член имеет более высокий $(n + 1)$ порядок малости по сравнению с $(x - a)$.

Если функцию можно задать одной формулой на всех

—
—

—

интервалах изменения аргумента, то ее можно разложить в ряд Тейлора.

Числовым рядом называется бесконечное выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где a_1, a_2, a_3, \dots – это члены ряда.

Функции, заданные на одном и том же отрезке $a \leq x \leq b$, называются **функциональными рядами**.

Подробно понятие рядов и их свойств изложено в [4], [6].

Разложим функцию $f(x)$ по степеням $(x - a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + \dots \quad (1.12)$$

$$3! \quad n!$$

Формулы Тейлора можно переписать в другом виде.

Обозначим $x - a = \Delta x$, $f(x) - f(a) = \Delta f$, $f'(a)(x - a) = f'(a)\Delta x = df$,

$$f''(a)(x - a)^2 = f''(a)\Delta x^2 = d^2f$$

и получим

$$\begin{aligned} \Delta f = df + & \frac{d^2f}{2!} \Delta x^2 + \frac{d^3f}{3!} \Delta x^3 + \dots + \frac{d^n f}{n!} \Delta x^n \end{aligned}$$

При малых Δx получим формулы: $\Delta f \approx df$ с точностью до величины порядка Δx^2 ; $\Delta f \approx df + \frac{1}{2}d^2f$ с точностью до 2 величины порядка Δx^3 и т.д. Если в формуле (1.12) $a = 0$, то получим формулу разложения функции и в ряд по степеням x

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

ПРИМЕР 1.14. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = e^x$.

РЕШЕНИЕ. Найдем производные этой функции $y' = e^x$, $y'' = e^x$,

Тема 1

$y''' = e^x, \dots, y^{(n)} = e^x$ и их значения при $a = 0$

$$y'(0) = y''(0) = y'''(0) = \dots = y^{(n)}(0) = 1.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

ОТВЕТ. $e = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$.

По этой формуле можно приближенно вычислить число e с любой степенью точности.

$$e = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Для $n = 3$ $e = 1 + 1 + 0,5 + 0,16667 = 2,66667$.

Для $n = 4$ $e = 1 + 1 + 0,5 + 0,1667 + 0,04166 = 2,70833$.

Для $n = 5$ $e = 1 + 1 + 0,5 + 0,1667 + 0,04166 + 0,00833 = 2,71666$.

ПРИМЕР 1.15. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = \sin x$.

РЕШЕНИЕ. Найдем $y(0) = \sin 0 = 0$

Найдем первые семь производных функции при $x = 0$

$$\begin{aligned} y'(x) = \cos x &\rightarrow y'(0) = 1; \\ y''(x) = -\sin x &\rightarrow y''(0) = 0; \\ y'''(x) = -\cos x &\rightarrow y'''(0) = -1; \\ y^{(4)}(x) = \sin x &\rightarrow y^{(4)}(0) = 0; \\ y^{(5)}(x) = \cos x &\rightarrow y^{(5)}(0) = 1; \end{aligned}$$

$$y^{VI}(x) = -\sin x \quad \rightarrow \quad y^{VI}(0) = 0 ;$$

$$y^{VII}(x) = -\cos x \quad \rightarrow \quad y^{VII}(0) = -1.$$

Запишем первые восемь членов разложения функции $y = \sin x$.

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{0}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{0}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}$ или $\sin x$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

ОТВЕТ. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

ПРИМЕР 1.16. Разложить в ряд по степеням x функцию $y = \cos x$.

РЕШЕНИЕ. Найдем $y(0) = \cos 0 = 1$.

Найдем первые семь производных и их значения при $x = 0$

$$y'(x) = -\sin x \quad \rightarrow \quad y'(0) = 0 ;$$

$$y''(x) = -\cos x \quad \rightarrow \quad y''(0) = -1;$$

$$y'''(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad y'''(0) = 0;$$

$$y^{IV}(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad y^{IV}(0) = 1;$$

$$y^V(x) = -\sin x \quad \rightarrow \quad y^V(0) = 0 ;$$

$$y^{VI}(x) = -\cos x \quad \rightarrow \quad y^{VI}(0) = -1;$$

$$y^{VII}(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad y^{VII}(0) = 0 .$$

Тема 1

Запишем первые восемь членов ряда разложения.

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

$\frac{x^2 x^4 x^6}{2! 4! 6!}$ ОТВЕТ. $\cos x$
 $= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

Аналогично можно получить разложения других элементарных функций.

1.7. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Рассмотрим теоремы о среднем для дифференцируемых функций. Эти теоремы часто используют при анализе поведения функций. В частности, рассмотрим теорему Ролля. Теорема Ролля является основной теоремой для доказательства важных фактов математического анализа и методов исследования функций.

Теорема Ролля

Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$, дифференцируема в открытом интервале $]x_1, x_2[$ и имеет на концах

интервала равные значения $[f(x_1) = f(x_2)]$,
то в этом интервале существует хотя бы одна
точка $x = \xi$, в которой производная $f'(x)$
обращает-

ся в нуль $[f'(\xi) = 0]$.

Используя геометрический смысл производной, теорему
Ролля можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА Ролля

На линии $y = f(x)$ найдется точка, в которой
касательная параллельна оси Ox .

Если на концах интервала значения функции равны
нулю, то теорему Ролля можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА Ролля

Между двумя нулями функции лежит хотя бы
один нуль производной.

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Если функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ и дифференцируема в открытом интервале $]x_1, x_2[$, то в этом интервале существует хотя бы одна точка $x = \xi$, для которой

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi). \quad (1.12)$$

Это значит, что средняя скорость изменения функции $f(x)$ в интервале $[x_1, x_2]$ равна скорости ее изменения в некоторой «средней» точке ξ ($x_1 < \xi < x_2$ или $x_1 > \xi > x_2$).

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции $y = f(x)$ найдется хотя бы одна точка M , в которой касательная параллельна хорде M_1M_2 (рис. 1.5).

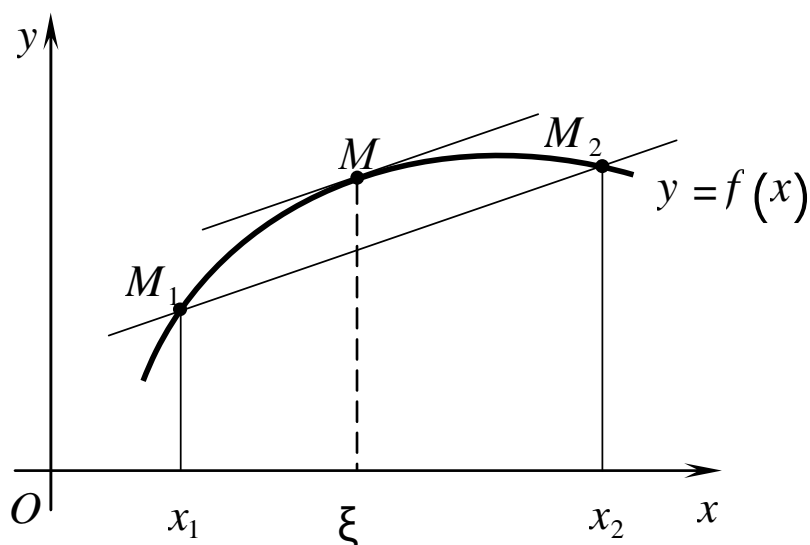


Рисунок – 1.5

Из теоремы Лагранжа (1.12) имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Для линейной и квадратичной функций значение ξ всегда будет средним значением между точками x_1 и x_2

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Приращение функции равно произведению производной в некоторой «средней» точке $f'(\xi)$ и приращения независимой переменной (Δx).

$$\Delta f(x) = f'(\xi) \Delta x$$

Тема 1

или $\Delta f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$, (1.13)

где θ – некоторое положительное число меньше единицы ($0 < \theta < 1$).

Теорема Коши

Если $f(x)$ и $\phi(x)$ – две функции, непрерывные на интервале $[x_1, x_2]$, дифференцируемые внутри него, и при этом $\phi'(x)$ внутри интервала не обращается в нуль, то внутри интервала $[x_1, x_2]$ найдется такая точка $x = \xi$, $x_1 < \xi < x_2$, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\phi(x_2) - \phi(x_1)} = f'(\xi).$$

Геометрический смысл теоремы Коши такой же, как и теоремы Лагранжа: в точке M угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту хорды M_1M_2 (рис. 1.5).

1.8. Правило Лопиталя

При вычислении пределов, которые представляют отношение двух бесконечно малых или двух бесконечно больших

величин, возникают неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

0 ∞

Французский математик Лопиталь опубликовал простое правило для вычисления таких пределов, найденное Бернулли.

$$\phi(t)$$

Если необходимо вычислить предел $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)}$, а $\phi(t_0) = 0$

—

и $\psi(t_0) = 0$, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

==

ЗАПОМНИТЕ**Тема 1**

В этом случае предел отношения функций равен пределу отношения их производных

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)}.$$

Если отношение производных тоже будет неопределенностью вида $\frac{0}{0}$, тогда правило можно применять снова.

$$\frac{x^2 - 1 + \ln x}{x - 1}$$

ПРИМЕР 1.17. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x - 1}$

РЕШЕНИЕ. Числитель и знаменатель выражения стремятся к нулю при $x \rightarrow 1$, поэтому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу

Лопиталю

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{1} = \frac{2 \cdot 1 + \frac{1}{1}}{1} = 3.$$

ОТВЕТ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x - 1} = 3$.

ПРИМЕР 1.18. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

РЕШЕНИЕ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1+x} = 2$.

$$e^x - e^{-x}$$

ОТВЕТ. $\lim = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)$$

Правило Лопиталья применяют и для неопределенно-

стей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

ПРИМЕР 1.19. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2}{x^4 - 3x^2 + 1}$.

$$\frac{x^4 - 5x^2}{x^4 - 3x^2 + 1} \sim \frac{4x^3 - 10x}{4x^3 - 6x} = \frac{24x^2 - 10}{24x^2 - 6}$$

РЕШЕНИЕ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2}{x^4 - 3x^2 + 1} = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 10x}{4x^3 - 6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 - 10}{12x^2 - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x - 10}{24x - 6} = 1$.

$$24x = 1$$

ОТВЕТ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2}{x^4 - 3x^2 + 1} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

ПРИМЕР 1.20. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \ln x}{4x - 2}$.

$$\frac{2x - \ln x}{4x - 2} \sim \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Тема 1

РЕШЕНИЕ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{4x} = 2$. Решение можно получить другим способом

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2 - \frac{\ln x}{x} \right] = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 2$$

ОТВЕТ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \ln x}{x^2} = 2$



ОТВЕТЬТЕ НА ВОПРОСЫ

1. Что такое приращение аргумента?
2. Что такое приращение функции?
3. Что такое производная функции?
4. Что показывает угловой коэффициент k в уравнении прямой линии $y = kx + b$?
5. Чему равен угловой коэффициент касательной к кривой в точке $x = x_0$?
6. Найдите угловой коэффициент нормали к кривой в точке $x = x_0$.
7. Какой геометрический смысл производной?
8. Какой физический смысл производной?

9. Напишите формулу производной степенной функции.
10. Чему равна производная функции $y = \log_a x$?
11. Напишите формулы производных тригонометрических функций.
12. Чему равна производная показательной функции $y = a^x$?
13. Напишите формулы производных обратных тригонометрических функций.
14. Напишите формулу производной суммы функций.
15. Какая функция является сложной?
16. Как найти производную неявной функции?
17. Что такое производная второго порядка?
18. Как найти производную третьего порядка?
19. Напишите формулу n -ой производной суммы функций $y = U + V + \dots + W$.
20. Напишите формулу n -ой производной произведения функций $y = UV$.
21. Разложите функцию $(x - a)^n$ в ряд по степеням $(x - a)$.
22. Напишите формулы разложения функций $y = e^x$, $y = \sin x$ и $y = \cos x$ по степеням x .
23. Сформулируйте теорему Тейлора.
24. Что такое числовой ряд?
25. Что такое функциональный ряд?

Тема 1

26. Какая часть приращения функции называется дифференциалом?

27. Чему равен дифференциал аргумента?

28. Как связан дифференциал и производная функции?

29. Напишите дифференциал $n^{\text{го}}$ порядка.

30. Что такое неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$?

31. Напишите правило Лопиталя.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ I.

Найдите производные функций:

1) $y = a^{x_2} - e^{-x_2}$; 2) $y = \sqrt[8]{x}$; 3) $y = 2x^{3x}$;

4) $y = 5x \ln x$;

5) $y = 3x \sin x$; 6) $a^b = 1$;

7) $y = 6x^4 + 2x^3$; 8) $y = \arcsin \sqrt{x}$; 9) $y = \text{arcctg}(5x^2 + 2)$; 10)

$y = \cos 3x$; 11) $x^y = y^x$; 12) $y = \log_2(5x^2 + 3)$;

13) $y = x^2$; 14) $y = 5x$; 15) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2x}$;

16) $y = (3x+5)^7$.

II. Вычислите частное значение производных в точке для следующих функций:

1) $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ при $x = 1$;

2) $y = x^2 - 3x + 2$ при $x = 2$;

1

3) $y = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ при $x = 1$;

4) $y = \frac{x^2}{x+1}$ при $x = 1$.

III. Найдите угловые коэффициенты касательной или нормали к кривым в заданной точке:

1) найдите угловой коэффициент касательной к кривой $y = 2x^2 - 5x + 3$ в точке с абсциссой $x = -1$;

2) найдите угол между касательной к кривой $y = 5x^2 - 9x - 3$ в точке $x = 1$ и осью Ox ;

3) напишите уравнение касательной к кривой $y = 2x^2 - 5x + 3$ в точке с абсциссой $x = -1$;

Тема 1

4) напишите уравнение нормали к кривой $y = 5x^2 - 9x - 3$ в точке с абсциссой $x = 2$.

IV. Найдите дифференциалы функций:

1) $y = (2 + 3x)^3$; 2) $y = \sin 5x$; 3) $y = \sqrt[3]{x}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 2^x}$.

V. Вычислите приближенно значения:

1) $\sin 31^\circ$; 2) $\sqrt[2]{15}$.

VI. Найдите производные высших порядков:

1) найдите вторую производную функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$;

2) найдите третью производную функции $y = 5x^2 \sin x$;

3) найдите шестую производную функции $y = 6x^5$.

VII. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x^2 - 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x^2 + 1 - x}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{x^2 + 1 - x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2 5x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2 5x}{x}$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \operatorname{tg} \cos x$; 8) $\lim_{x \rightarrow 3} x^3 - 5x^2 + 27x + 12$.

Тема 2

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

1. ИНТЕРВАЛЫ МОНОТОННОСТИ.
2. ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА.
3. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ
ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ НА
ИНТЕРВАЛЕ.
4. ВЫПУКЛОСТЬ ИЛИ
ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ.
5. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАФИКА
6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА
ЭКСТРЕМУМ.
7. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА.
8. ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ.

Лексика темы

график функции	graph of function	函数图像
асимптота <i>графика функции</i>	asymptote of <i>graph of function</i>	渐近线的函数图像
<i>график функции</i> вогнутый	<i>graph of concave function</i>	函数图像 (凹)
<i>график функции</i> выпуклый	<i>graph of convex function</i>	函数图像 (凸)
дифференцирование	differentiation	分化
касательная	tangent	切线(正切)
критическая точка	critical point	临界点
максимум	maximum	最大
метод касательных	tangent method	正切方法
минимум	minimum	最小
предельный доход	marginal revenue	边际收入
производная	derivative	导数
стационарные точки	stationary points	固定点
точка перегиба	point of inflection	回折点
точки экстремума	points of extremum	极值点
функция	function	功能, 函数
возрастающая <i>функция</i>	increasing <i>function</i>	上升函数
монотонная <i>функция</i>	monotonous	单调函数

Тема 2

	<i>function</i>	
непрерывная <i>функция</i>	continuous <i>function</i>	连续函数
постоянная <i>функция</i>	constant <i>function</i>	常数的函数
убывающая <i>функция</i>	decreasing <i>function</i>	下降函数
экстремум <i>функции</i>	extremum of <i>function</i>	极值函数

2.1. Интервалы монотонности

Функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, если она дифференцируема в каждой точке отрезка. Производная этой функции тоже функция от x

$$y' = f'(x) = \phi(x) .$$

В точке разрыва функция не может иметь производной. Если функция $y = f(x)$ **дифференцируема** в точке $x = x_0$, то она в этой точке **непрерывна**.

Если функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ производной не имеет, то в этой точке функция не имеет касательной, или эта касательная образует с осью Ox угол 90° .

Если для данной точки $x = x_0$ производная не существует, то не существует и предел $f'(x_0) = \lim \Delta y$. Если же

$$\Delta_{x \rightarrow 0} \Delta x$$

существуют пределы слева и справа, то их называют **производной слева** $f'(x_0 - 0)$ и **производной справа** $f'(x_0 + 0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в интервале $]a, b[$ и имеет производную в каждой точке интервала. Производная такой функции в точке $x = x_0$ из этого интервала будет равна тангенсу угла наклона касательной с осью Ox .

1. Для того, чтобы эта функция на интервале $]a, b[$ была **постоянна** $y = f(x) = C$, необходимо и достаточно выполнить условие равенства нулю производной $y'(x) \equiv 0$ во всех точках этого интервала.

График постоянной функции – это прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 2.1).

Угол наклона касательной в каждой точке графика равен нулю, а значит и $\operatorname{tg} \alpha = 0$, и производная функции в каждой точке графика равна нулю.

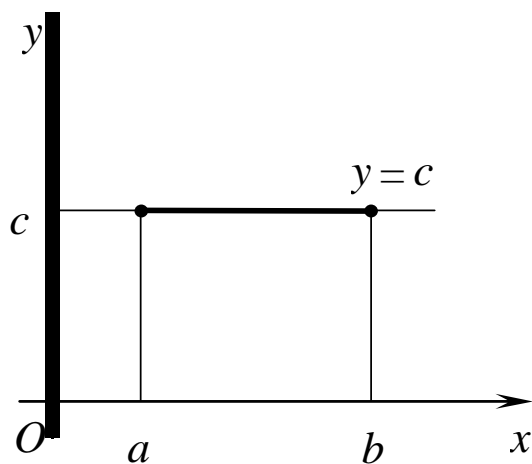


Рисунок – 2.1

2. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ **возрастала** на интервале $]a,b[$, необходимо и достаточно, чтобы ее первая производная была положительна ($y'(x) > 0$) в каждой точке интервала.

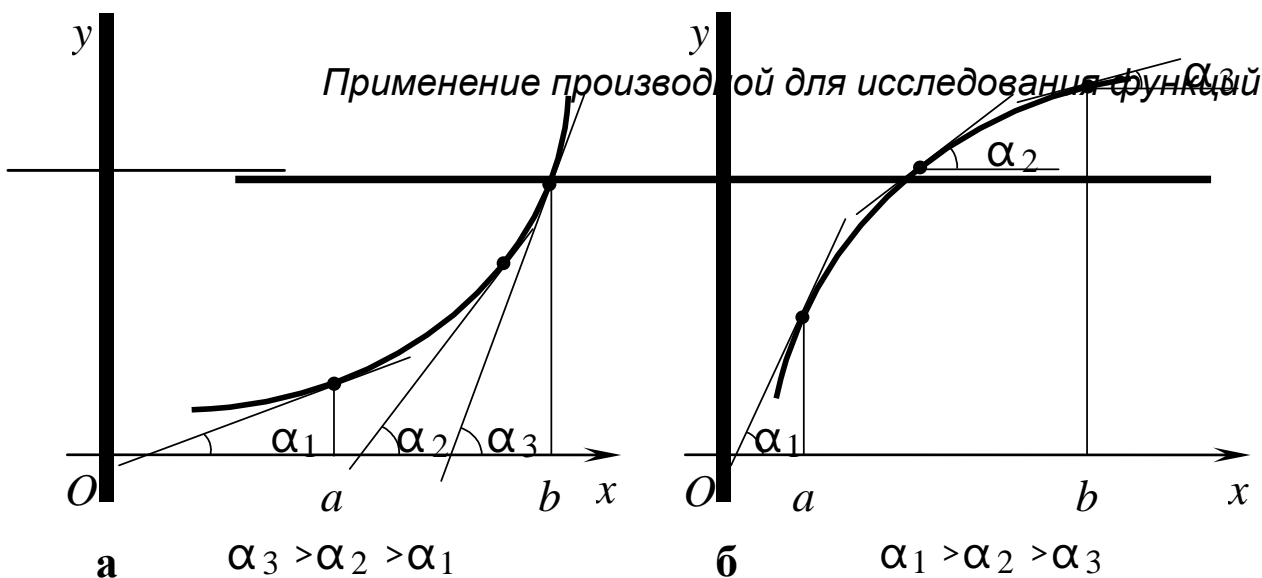


Рисунок – 2.2

При возрастании функции $y = f(x)$ на интервале $]a, b[$ угол наклона касательной будет увеличиваться от 0° до 90° (рис. 2.2 а) или уменьшаться от 90° до 0° (рис. 2.2 б).

При изменении угла наклона в интервале $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha$ будет всегда больше нуля $y'(x) > 0$.

Для того, чтобы функция **убывала** на интервале $]a, b[$, необходимо и достаточно, чтобы ее первая производная на этом интервале была отрицательна $y'(x) < 0$.

При убывании функции $y = f(x)$ на интервале $]a, b[$ угол наклона касательной будет изменяться от 90° до 180° (рис. 2.3). В этом интервале производная $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha$ будет

Тема 2

всегда меньше нуля $y'(x) < 0$.

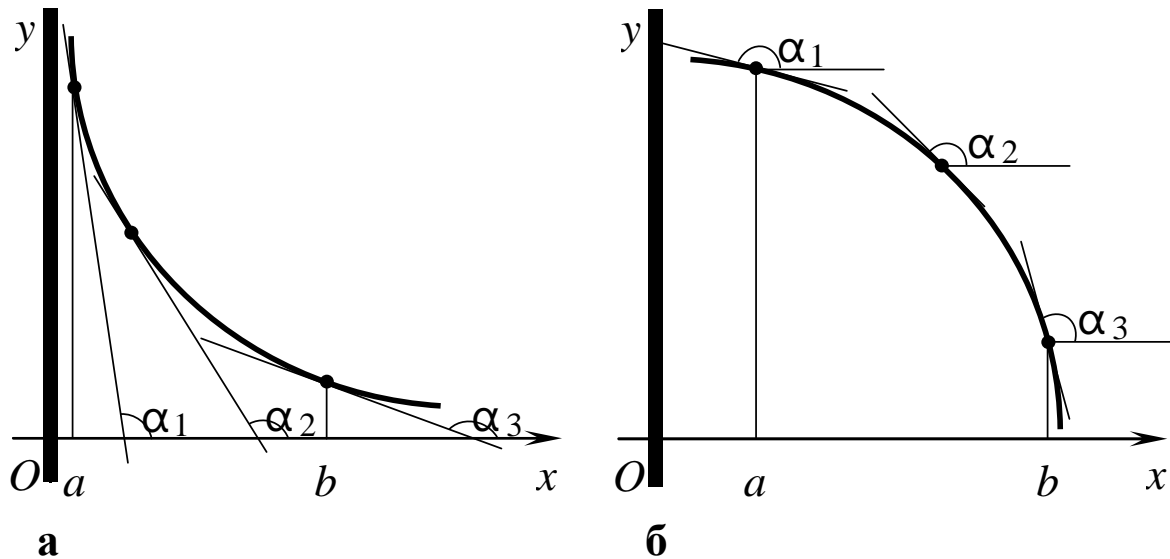


Рисунок – 2.3

Если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ не имеют разрывов во всей области определения функции, то условие монотонности (возрастания, убывания) функции формулируется так.

3 АПОМНИТЕ

Функция возрастает в каждом интервале, в котором ее **производная положительна** и **убывает** в каждом интервале, в котором ее **производная отрицательна**.

Функция возрастает, если скорость ее изменения положительна. Функция убывает, если скорость ее изменения отрицательна.

Если производная, непрерывно изменяясь в интервале $]a, b[$, переходит от положительных значений к отрицательным или от отрицательных к положительным, то она переходит через нулевое значение.

Точки, в которых значение производной равно нулю, называются **стационарными точками**.

Чтобы найти интервалы монотонности функции $y = f(x)$ (интервалы возрастания или убывания), необходимо:

- 1) найти точки, в которых функция обращается в ноль, $y(x) = 0$;
- 2) найти первую производную функции $y' = f'(x)$;
- 3) найти стационарные точки x_i из условия, что $y'(x_i) = 0$;
- 4) нанести эти точки на ось Ox и проверить знак производной на каждом интервале между соседними стационарными точками.

ПРИМЕР 2.1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x^2 + 2x - 3$.

РЕШЕНИЕ

1. Найдем точки, в которых функция обращается в ноль, $y(x) = 0$.

Для этого решим уравнение

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Решением уравнения есть две точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$, в которых функция обращается в ноль.

Тема 2

2. Найдем первую производную функции $y = x^2 + 2x - 3$, получим $y' = 2x + 2$.
3. Найдем стационарные точки из условия $y'(x) = 0$. Для этого решим уравнение

$$y'(x) = 2x + 2 = 0.$$

Решением уравнения есть точка $x = -1$. В точке $x = -1$ производная обращается в ноль.

4. Нанесем полученные точки на ось Ox и проверим знак производной в каждом из полученных интервалов.

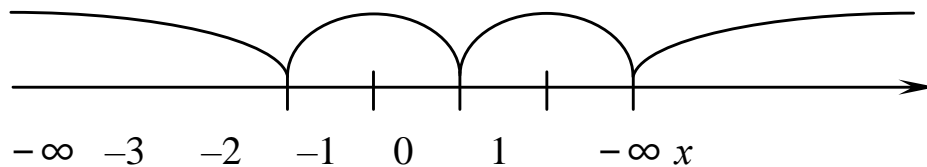


Рисунок – 2.4

В интервале $]-\infty, -3[$ возьмем точку $x = -4$ и найдем значение производной в этой точке $y'(-4) = 2 \cdot (-4) + 2 = -6$. Производная отрицательна ($y' < 0$), значит функция убывает.

Из интервала $]-3, -1[$ возьмем точку $x = -2$ и найдем значение производной в этой точке $y'(-2) = 2 \cdot (-2) + 2 = -2$. Производная также отрицательна ($y' < 0$), значит функция убывает.

Из интервала $]-1, 1[$ возьмем точку $x = 0$ и найдем значение производной в этой точке $y'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2$. Производная положительна ($y' > 0$), значит функция возрастает.

Из интервала $]1, \infty[$ возьмем точку $x = 2$ и найдем значение производной в этой точке $y'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$. Производная положительна ($y' > 0$), значит функция возрастает.

Для анализа поведения функции составим таблицу 2.1, в которую запишем все полученные данные.

Таблица 2.1

	$]-\infty, -3[$	-3	$]-3, -1[$	-1	$]-1, 1[$	1	$]1, \infty[$
$y'(x)$	< 0	< 0	< 0	0	> 0	> 0	> 0
$y(x)$		0	> -4	-4	> -4	0	
Вывод	Функция убывает				Функция возрастает		

Из таблицы 2.1 видно, что функция $y = x^2 + 2x - 3$ убывает на интервале $]-\infty, -1[$ и возрастает на интервале $]-1, \infty[$.

В стационарной точке $x = -1$ производная $y'(-1) = 0$.

При переходе через точку $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс.

ОТВЕТ. Функция убывает в интервале $]-\infty, -1[$ и возрастает в интервале $]-1, \infty[$.

2.2. Точки экстремума

Если при некотором значении $x = x_0$ значение $f(x_0)$ больше (меньше) всех «соседних» значений функции, то точка $x = x_0$ называется точкой **максимума** (**минимума**), а значение функции в этой точке называется **максимальным** (**минимальным**) значением функции.

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**.

↑ **Необходимое условие экстремума.** В точках экстремума производная функции $f(x)$ либо равна нулю, либо не существует. Если x_0 – это точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Достаточное условие экстремума. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 , то точка x_0 – это точка экстремума функции $f(x)$.

Если при переходе через точку $x = a$ первая производная функции $y' = f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то при $x = a$ функция $y = f(x)$ *имеет максимум*.

Если при переходе через точку $x = b$ первая производная функции $y' = f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то при $x = b$ функция $y = f(x)$ *имеет минимум*.

Экстремальные точки – это стационарные точки. Но не всегда стационарные точки являются экстремальными.

Точки разрыва функции и стационарные точки называются **критическими точками**.

↑ **Критические точки** – это точки, в которых производная функции $f(x)$ не существует или обращается в нуль.

Для исследования функции на экстремум необходимо:

- 1) найти область определения функции;
- 2) найти первую производную функции;
- 3) найти критические точки функции;
- 4) найти интервалы возрастания и убывания функции;
- 5) проверить изменение знака производной в критических точках;
- 6) вычислить значение функций в экстремальных точках.

ПРИМЕР 2.2. Исследовать на экстремумы функцию $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

РЕШЕНИЕ

1. Область определения функции это вся числовая ось $x \in \mathbb{R}$. Точек разрыва функции нет.

Найдем точки пересечения функции с осью Ox , нули функции. Решим уравнение $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

Преобразуем уравнение, разложив многочлен на множители $(x - 1)(2x^2 - x - 1) = 0$.

Решением уравнения будут три значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -\frac{1}{2}$.

2. Найдем первую производную функции $y'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$.
3. Найдем критические точки функции. Решим уравнение $6x(x - 1) = 0$ и найдем стационарные точки.

Решением этого уравнения будут два значения $x_4 = 0$ и $x_5 = 1$.

Критическими точками будут точки $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.

4. Для определения интервалов возрастания и убывания составим таблицу. Проверим изменения знака производной при переходе через критические точки в интервалах

$$| \quad | - \infty, -\frac{1}{2} | \quad |, | \quad | - \frac{1}{2}, 0 | \quad |, \quad | 0, 1 |, | 1, \infty | .$$

Тема 2

5. Определим значение производной в точке $x = -1$ из интервала

$]-\infty, -\frac{1}{2}[$ слева от точки $x = -\frac{1}{2}$.

$]-\frac{1}{2}, 2[$

$$y'(-1) = 6x(x-1) = 6(-1)(-1-1) = 12 > 0.$$

В точке $x = -\frac{1}{2}$ производная функции будет равна

$$y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} > 0.$$

Определим значение производной в точке $x = -\frac{1}{4}$ из интервала

$]-\frac{1}{4}, 0[$ справа от точки $x = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \parallel \quad 2 \quad \parallel \quad 2 \quad y'\left(-\frac{1}{4}\right) &= 6\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}-1\right) = \\ &= 6\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{8} > 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что при переходе через точку $x = -\frac{1}{2}$ производная не изменяет знак.

Определим значение производной в точке $x = \frac{1}{2}$ из интервала

$]0, 1[$ слева от точки $x = 1$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{3}{2} < 0.$$

Определим значение производной в точке $x = 2$ из интервала

$]1, \infty[$ справа от точки $x = 1$

$$y'(2) = 6 \cdot 2 \cdot (2 - 1) = 12 > 0 .$$

Все полученные результаты внесем в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

	$]-\infty, -\frac{1}{2}[$	$-\frac{1}{2}$	$]-\frac{1}{2}, 0[$	0	$]0, 1[$	1	$]1, \infty[$
$y'(x)$	> 0	> 0	> 0	0	< 0	0	< 0
$y(x)$		0		1		0	
Вывод	Функция возрастает			max	Функция убывает	min	Функция возрастает

Используя данные таблицы 2.2, дополним их значениями $y(-1) = -4$ и $y(2) = 5$. Нанесем полученные точки на график (рис. 2.5).

Как видно из таблицы 2.2 и рисунка 2.5, функция возрастает в интервалах $]-\infty, 0[$ и $]1, \infty[$, где ее производная положительна.

Функция убывает в интервале $]0, 1[$, где ее производная отрицательна.

6. Определим значение функции в точках $x = 0$ и $x = 1$, при переходе через которые производная меняет знак $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

При переходе через точку $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус. В этой точке функция имеет максимум $y(0) = 1$.

При переходе через точку $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс. В этой точке функция имеет минимум $y(1) = 0$.

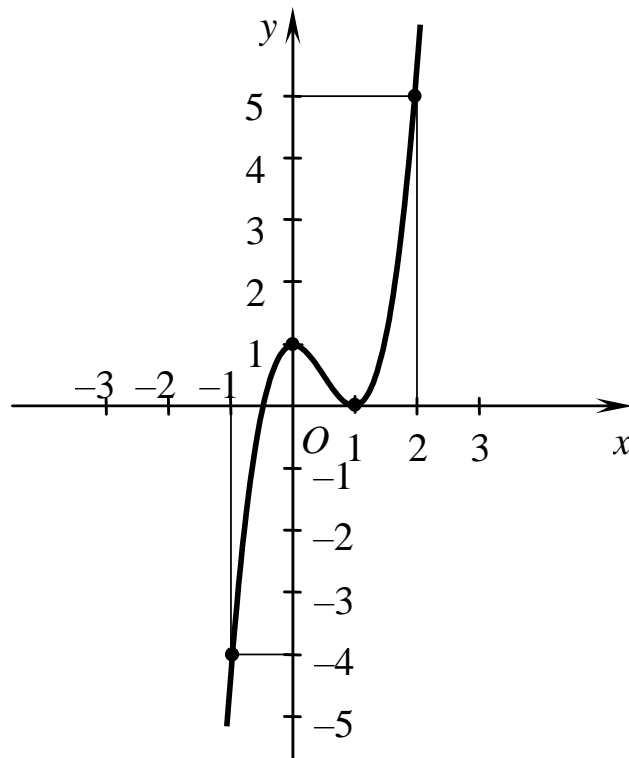


Рисунок – 2.5

ОТВЕТ. Функция имеет максимум в точке $x=0$ и минимум в точке $x=1$.

2.3. Наибольшее и наименьшее значение функции на интервале

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$, и пусть ее первая производная непрерывна в этом интервале. Необходимо найти наибольшее и наименьшее значения функции на этом интервале.

Для решения задачи недостаточно знать только экстремумы функции, необходимо учитывать и значения функции на краях интервала.

Из рисунка 2.6 видно, что экстремумами функции в интервале $[a, b]$ будут значения функции в точках $x = x_1$ и $x = x_2$.

Но это не наибольшее и наименьшее значения в интервале.

Наибольшим будет значение функции на краю интервала при $x = b$, $y_b = f(b)$.

Наименьшим будет значение функции на другом краю интервала при $x = a$, $y_a = f(a)$.

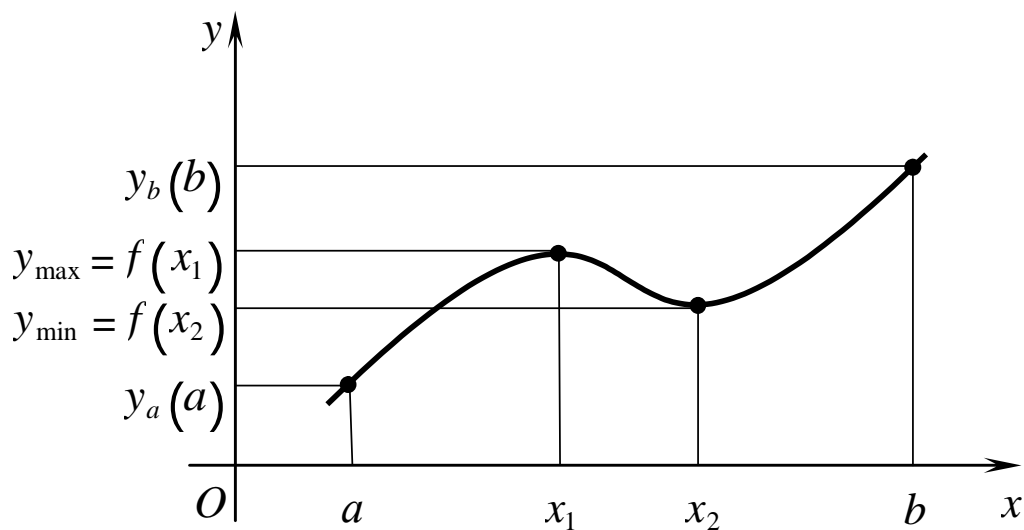


Рисунок – 2.6

Рассмотрим теоремы, которые помогают определить наибольшее и наименьшее значение функции на заданном интервале.

ТЕОРЕМА 1**Тема 2**

Если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция непрерывна и имеет только один экстремум, и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции на этом интервале (рис. 2.7 а, б).

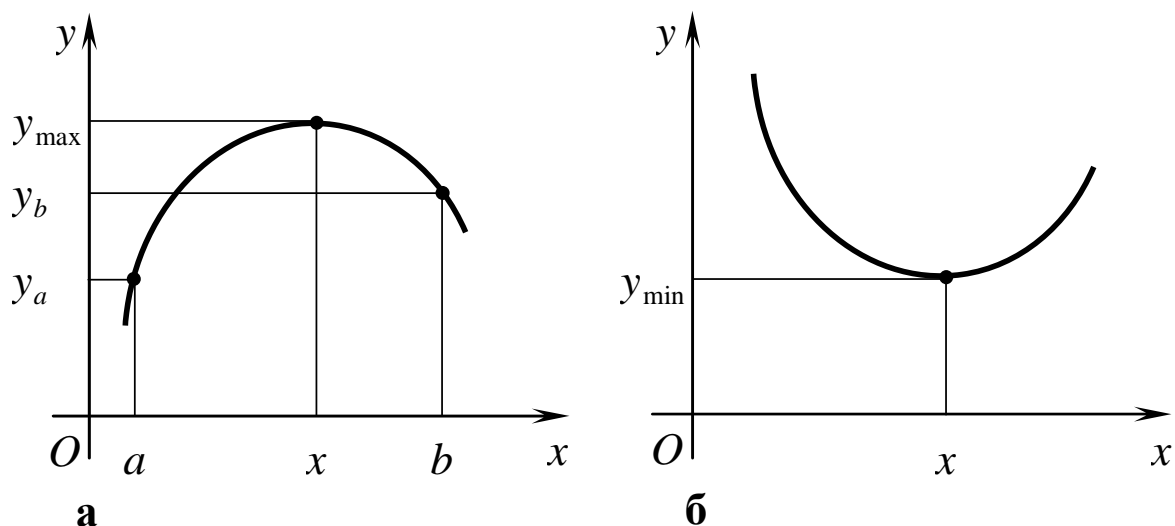


Рисунок – 2.7

На рисунках 2.7 а, б показаны графики функций, которые имеют один экстремум на конечном или бесконечном интервалах.

ТЕОРЕМА 2

Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она обязательно имеет на этом интервале наибольшее и наименьшее значения. Эти значения будут или в точках экстремума или на концах интервала.

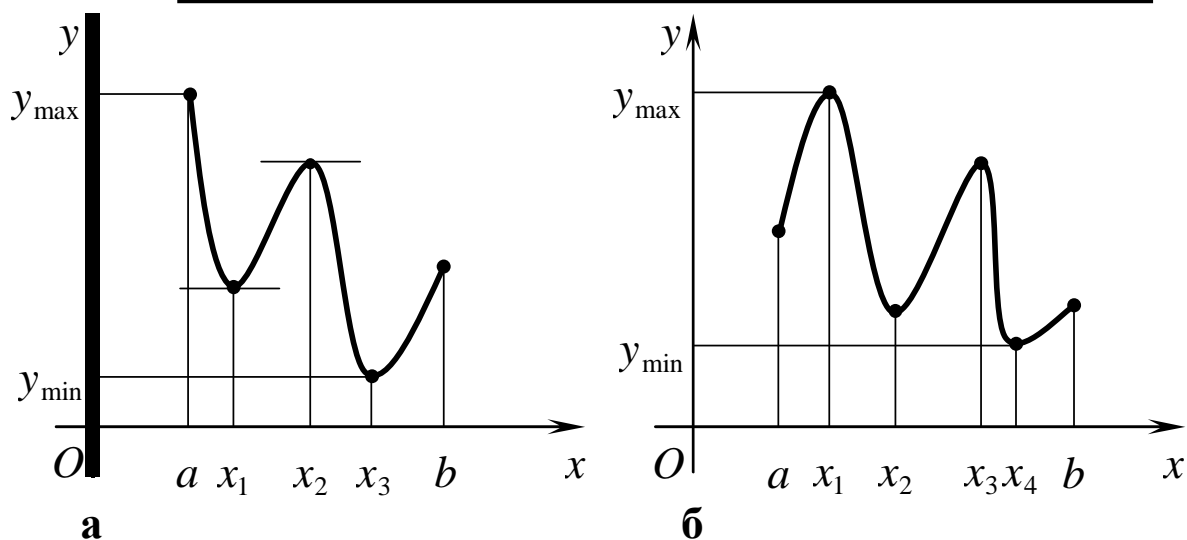


Рисунок – 2.8

Для функции $y = f(x)$, наибольшее значение функции будет на конце интервала $y_a = f(a)$, а наименьшее значение $y_{\min} = f(x_3)$ внутри интервала (рис. 2.8 а).

Для функции $y = \phi(x)$, наибольшее значение функции $y_{\max} = \phi(x_1)$ соответствует экстремальной точке $x = x_1$, а наименьшее $y_{\min} = \phi(x_2)$ соответствует экстремальной точке $x = x_4$ (рис. 2.8 б).

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на интервале $[a, b]$, необходимо:

- 1) найти критические точки функции, которые принадлежат данному интервалу;
- 2) найти экстремальные значения функции в этих точках;
- 3) найти значения функции на краях интервала;

Тема 2

4) сравнить полученные результаты и найти наибольшее и наименьшее значения функции на интервале.

ПРИМЕР 2.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на интервале $[-4, 4]$.

РЕШЕНИЕ. Данная функция непрерывна в заданном интервале и имеет непрерывную первую производную $y' = 3x^2 - 6x - 9$. В этом интервале она имеет наибольшее и наименьшее значения.

1. Критическими точками этой функции будут точки, в которых ее первая производная обращается в нуль, $y' = 0$. Решим уравнение $3x^2 - 6x - 9 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 + 108}}{6} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

Данная функция принимает экстремальные значения в точках $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$.

2. Найдем экстремальные значения функции в этих точках.

$$y(3) = 27 - 27 - 27 + 35 = 8,$$

$$y(-1) = -1 - 3 + 9 + 35 = 40.$$

Вычислим значения производных в точках $x_3 = 2$ и $x_4 = 4$, где $x_3 < x_1$ и $x_4 > x_1$. $y'(2) = 12 - 12 - 9 = -9 < 0$,

$$y'(4) = 48 - 24 - 9 = 15 > 0.$$

При переходе через точку $x_1 = 3$ первая производная меняет знак с минуса на плюс. В точке $x_1 = 3$ имеем минимум функции $y_{\min} = 8$.

Найдем значения производной в точках $x_5 = -2$ и $x_6 = 0$, где $x_5 < x_2$, а $x_6 > x_2$. $y'(-2) = 12 + 12 - 9 = 15 > 0$,

$$y'(0) = -9 < 0 .$$

При переходе через точку $x_2 = -1$ первая производная меняет знак с плюса на минус. В точке $x_2 = -1$ имеем максимум функции $y_{\max} = 40$.

3. Найдем значения функции на краях интервала в точках $x_0 = -4$ и $x_7 = 4$.

$$y(-4) = -64 - 48 + 36 + 35 = -41,$$

$$y(4) = 64 - 48 - 36 + 35 = 15.$$

4. Из сравнения результатов имеем:

- наименьшее значение $y_{\min} = -41$ функция принимает на краю интервала при $x = -4$;
- наибольшее значение $y_{\max} = 40$ соответствует экстремальной точке $x_2 = -1$.

ОТВЕТ. Наименьшее значение функция принимает на краю интервала в точке $x = -4$, а наибольшее – в экстремальной точке $x = -1$.

2.4. Выпуклость или вогнутость кривой.

Точки перегиба графика

Дуга графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется **выпуклой**, если она пересекается со своей хордой только в двух точках.

Кривая графика функции называется **выпуклой вверх** (**выпуклой**) на интервале $]a,b[$, если точки кривой лежат над хордой, соединяющей значения функции на концах интервала (рис. 2.9).

Тема 2

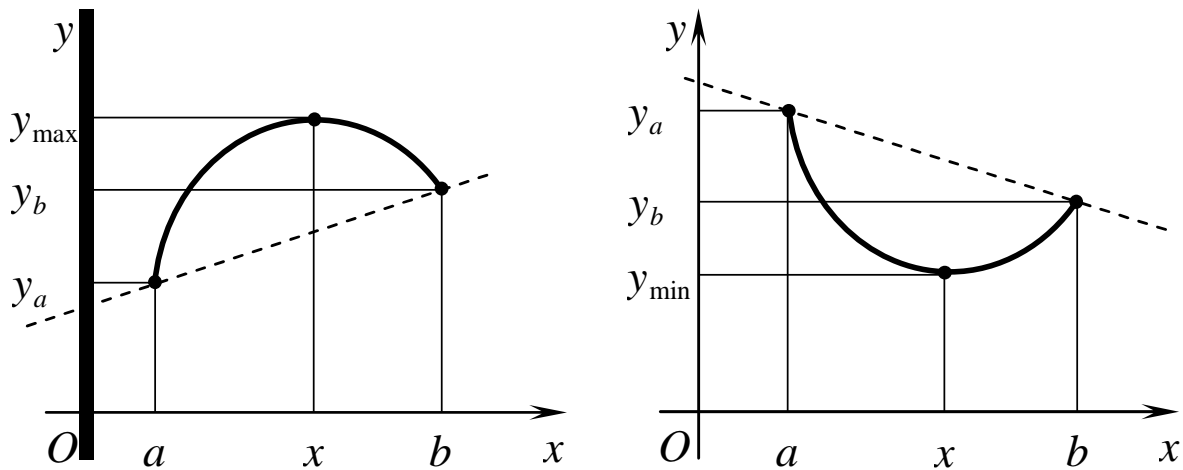


Рисунок – 2.9 Рисунок – 2.10

Кривая графика функции называется **выпуклой вниз** (**вогнутой**) на интервале $]a, b[$, если точки кривой лежат под хордой, соединяющей значения функции на концах интервала (рис. 2.10).

Т ЕОРЕМА

Если линия $y = f(x)$ **выпуклая** на интервале $]a, b[$, то на этом интервале ее вторая производная отрицательна, $y'' < 0$.

Если линия $y = f(x)$ **вогнутая** на интервале $]a, b[$, то на этом интервале ее вторая производная положительна, $y'' > 0$.

Точка, которая отделяет выпуклую часть от вогнутой, называется **точка перегиба** (рис. 2.11). В точке перегиба

вторая производная равна нулю. При переходе через точку перегиба вторая производная меняет знак.

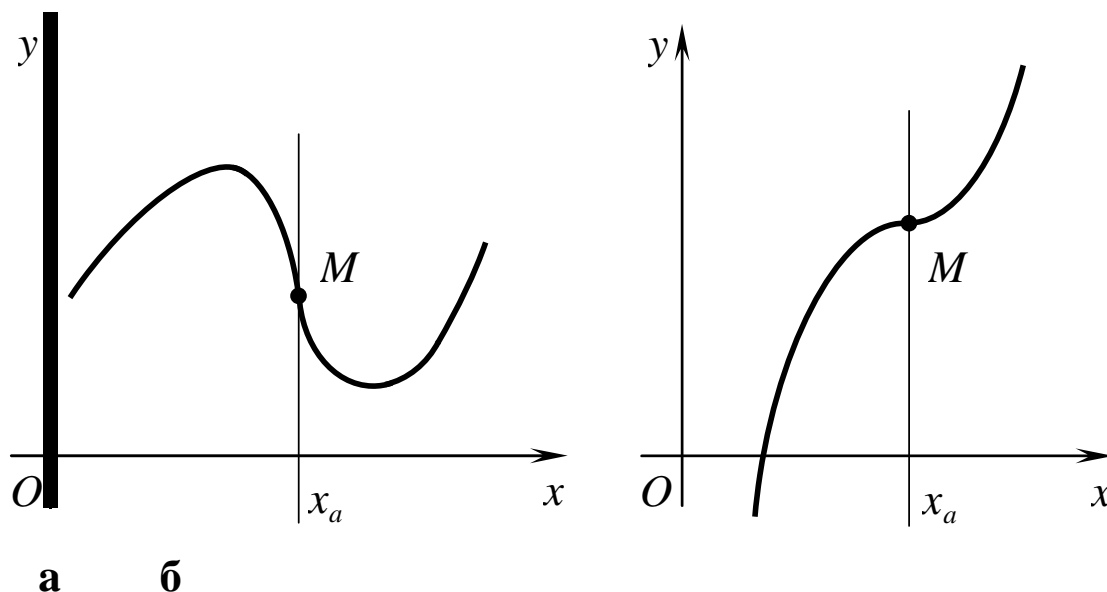


Рисунок – 2.11

Второй достаточный признак экстремума

3_АПОМНИТЕ

Если функция $y = f(x)$ имеет первую и вторую производные, и в точке $x = x_0$ первая производная равна нулю, $y'(x_0) = 0$, а вторая производная не равна нулю, $y''(x_0) \neq 0$, то функ-

ция в этой точке имеет:

- *максимум*, если $y''(x_0) < 0$;
- *минимум*, если $y''(x_0) > 0$.

Тема 2

Чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ на экстремум при помощи второй производной, необходимо:

- 1) найти первую производную функции и, решая уравнение $y'(x) = 0$, найти критические точки функции;
- 2) найти вторую производную функции и исследовать ее знак в каждой критической точке.

Если $f''(x_0) < 0$ в критической точке $x = x_0$, то функция имеет максимум, а если $f''(x_0) > 0$, то в этой точке функция имеет минимум.

Если вторая производная в критической точке обращается в нуль $y''(x_0) = 0$, то исследование необходимо проводить при помощи первой производной.

ПРИМЕР 2.4. Исследовать на экстремум функцию $y(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 2$ и построить ее график.

РЕШЕНИЕ

1. Найдем первую производную $y'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ и, решая уравнение $3x^2 - 6x - 9 = 0$, найдем критические точки $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.
2. Найдем вторую производную $y''(x) = 6x - 6$ и определим ее знак в каждой критической точке

$$y''(3) = 18 - 6 = 12 > 0,$$
$$y''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0$$

Найдем критические точки для второй производной

$$y'' = 6x - 6 = 0, x = 1 .$$

В интервале $]-\infty, 1[$ вторая производная меньше нуля, $y'' < 0$.

Кривая на этом интервале **выпуклая**. В точке $x = -1$ имеем максимум.

В интервале $]1, \infty[$ вторая производная больше нуля, $y'' > 0$.

Кривая на этом интервале **вогнутая**. В точке $x = 3$ имеем минимум.

При переходе через критическую точку $x = 1$ вторая производная изменяет свой знак. Эта точка отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой. Такая точка называется **точкой перегиба**.

Запишем полученные результаты в таблицу 2.3.

Таблица 2.3

	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3, \infty[$
y'	> 0	0	< 0	< 0	< 0	0	> 0
y	Возрастает	3 max	Убывает	-13	Убывает	-29 min	Возрастает
y''	< 0	< 0	< 0	0	> 0	> 0	> 0
	Кривая выпуклая			Точка перегиба	Кривая вогнутая		

По результатам таблицы 2.3 построим график функции (рис. 2.12).

Тема 2

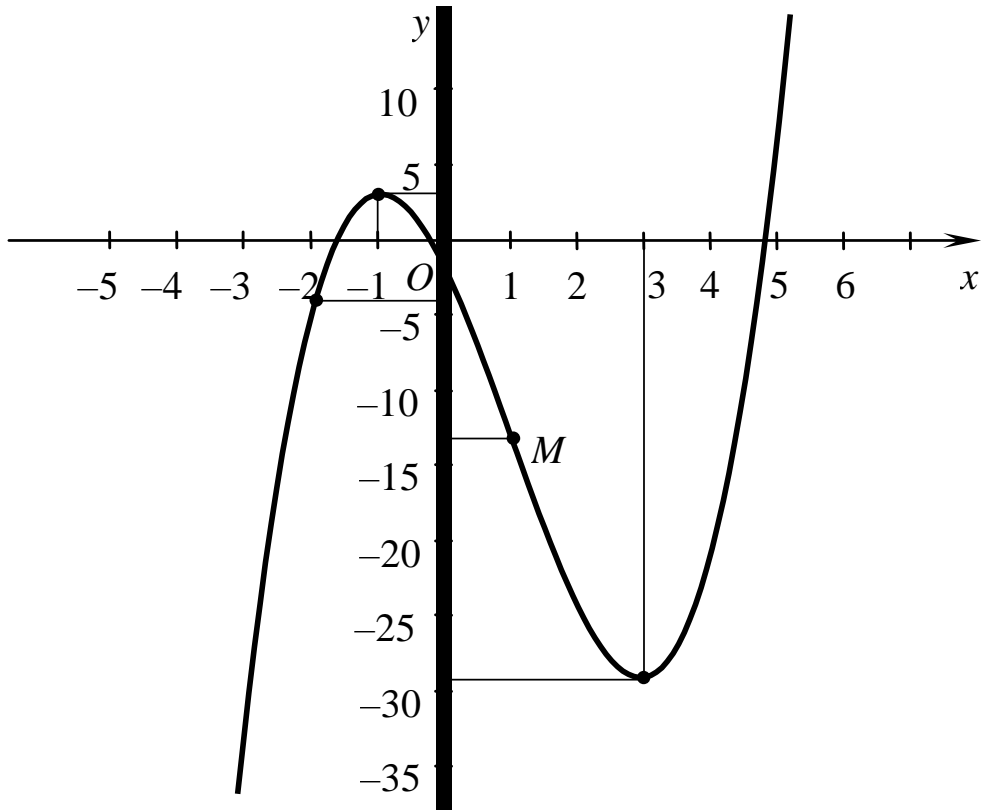


Рисунок – 2.12

ОТВЕТ. Функция при $x = 3$ имеет минимум $y_{\min}(3) = -29$.

Функция при $x = -1$ имеет максимум $y_{\max}(-1) = 3$.

ПРИМЕР 2.5. Найти точку перегиба и исследовать на выпуклость, вогнутость график кривой $y = e^{-x^2}$.

РЕШЕНИЕ

1. Найдем первую производную функции

$$y' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x e^{-x^2}$$

2. Найдем вторую производную и исследуем ее знаки в критических точках.

$$-1 \quad -1 \quad -1$$

$$y'' = 2 \cdot (-3)x^{-4}e^{-x^2} + 2x^{-3}e^{-x^2} \cdot 2x^{-3} = 2x^{-4}e^{-x^2}(2x^{-2} - 3).$$

Вторая производная обращается в нуль $y'' = 0$ в точке $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ и не существует, когда $x_3 = 0$. При $x_3 = 0$ функция $y = e^{-x^2}$ не определена.

Исследуем знаки второй производной в окрестности корней $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Множитель $(2x^{-2} - 3)$ будет определять знак второй производной, так как $2x^{-4} > 0$ и $e^{-x^2} > 0$ всегда. Исследуем знак множителя $(2x^{-2} - 3)$ на каждом из интервалов.

Возьмем из интервала $|| -\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}} ||$ значение $x = -1$ и найдем знак второй производной в этом интервале. Подставив $x = -1$ в множитель $(2x^{-2} - 3)$, получим, что $(2x^{-2} - 3) = -1$. Так как множитель $x = -1$ $(2x^{-2} - 3) < 0$, то $y'' < 0$ и кривая графика будет выпуклой.

Возьмем из интервала $|| \sqrt{\frac{2}{3}}, 0 ||$ значение $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и найдем

знак второй производной в этом интервале. $(2x^{-2} - 3) > 0$. Так как $y'' > 0$, то кривая вогнутая.

Возьмем из интервала $|| 0, \sqrt{\frac{2}{3}} ||$ значение $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и

Тема 2

найдем

знак второй производной в этом интервале. $(2x^{-2} - 3) > 0$. Так

как $y'' > 0$, то кривая вогнутая.

$$\parallel \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Возьмем из интервала $\parallel, \infty \parallel$ значение $x = 1$ и найдем знак

второй производной в этом интервале. $(2x^{-2} - 3) < 0$. Так как $x = 1$

$y'' < 0$, то кривая выпуклая. Полученные данные занесем в таблицу 2.4.

Таблица 2.4

	$\parallel -\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \parallel, \infty \parallel$
y'	< 0	0	> 0		> 0	0	< 0
y	Выпуклая	Точка перегиба	Вогнута	Не определен	Вогнута	Точка перегиба	Выпуклая

При переходе через точки $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ вторая производная меняет знак. Эти точки есть точки перегиба.

ОТВЕТ. На интервалах $\parallel -\sqrt{\frac{2}{3}} \parallel$ и $\parallel \sqrt{\frac{2}{3}} \parallel$ функция выпуклая.

\parallel



Точки $x = -$ — есть точки перегиба.

2.5. Исследование функций на экстремум с помощью производных высших порядков

Рассмотрим непрерывную, дифференцируемую функцию $y = f(x)$ и исследуем ее на экстремум.

Если в некоторой точке $x = x_0$ первая производная функции $y'(x_0) = 0$ и вторая производная $y''(x_0) = 0$, то исследование функции на экстремум в этой точке можно проводить с помощью производных более высокого порядка. Для этого используется следующее свойство непрерывной функции.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и отлична от нуля в точке $x = x_0$, то и в некоторой окрестности точки $x = x_0$ она отлична от нуля и имеет знак, совпадающий со знаком функции в этой точке.

Пусть функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет равные нулю производные до $(n-1)$ порядка включительно, а производная $n^{\text{го}}$ порядка при $x = x_0$ непрерывна и не равна нулю $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

Тема 2

Если n число четное, то функция в точке $x = x_0$ имеет:

- максимум, когда $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- минимум, когда $f^{(n)}(x_0) > 0$;
- а если n число нечетное, то функция в точке $x = x_0$ не имеет экстремумов.

ПРИМЕР 2.6. Исследовать на экстремум функцию $y = 5x^4$.

РЕШЕНИЕ. Заданная функция определена и положительна на всей числовой оси и обращается в ноль при $x = 0$.

Производная $y' = 20x^3$ обращается в ноль в критической точке $x = 0$.

Вторая $y'' = 60x^2$ и третья $y''' = 120x$ производные в точке $x = 0$ также обращаются в ноль.

Четвертая производная $y^{IV} = 120$ в точке $x = 0$ не равна нулю.

Порядок производной, $n = 4$, есть число четное, а знак производной $y^{IV} = 120 > 0$. Точка $x = 0$ это точка минимума функции.

ОТВЕТ. В точке $x = 0$ функция имеет минимум.

ПРИМЕР 2.7. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x^5 + 1$.

РЕШЕНИЕ. Находим первую производную $y' = 10x^4$. Критической точкой, в которой $y' = 0$ будет $x = 0$.

Вторая $y'' = 40x^3$, третья $y''' = 120x^2$ и четвертая $y^{IV} = 240x$ производные в точке $x = 0$ обращаются в ноль.

Пятая производная $y^V = 240$ не равна нулю и положительна.

Порядок производной $n = 5$, есть число нечетное. В точке $x = 0$ функция не имеет экстремумов.

ОТВЕТ. Порядок производной, $n = 5$, есть число нечетное. В точке $x = 0$ функция не имеет экстремумов.

2.6. Асимптоты графика

Асимптоты графика $y = f(x)$ могут быть вертикальные (параллельные оси Oy) и невертикальные. Вертикальных асимптот может быть много. Например, для функции

$y = \operatorname{tg} x$ их бесконечное число (рис. 2.13).

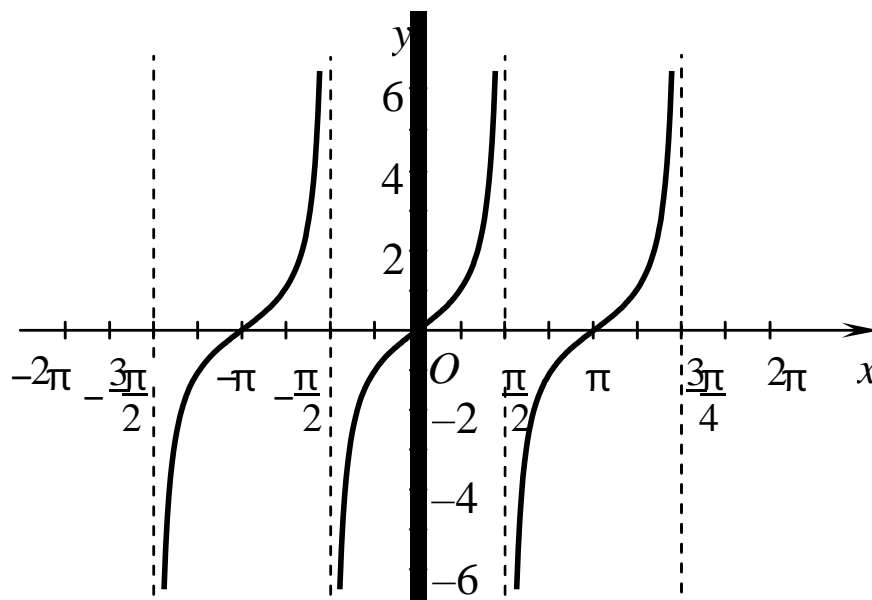


Рисунок – 2.13

Вертикальные асимптоты находят следующим образом.

Если $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$, то прямая $x = a$ есть вертикальная

асимптота графика. На рисунке 2.13 – это прямые $x = \pm \frac{\pi}{2}$, 2

Тема 2

$$x = \pm$$

$$\frac{3}{2}$$

п и

так далее. А на рисунке 2.14 – это прямая $x = 3$.

Невертикальных асимптот не может быть больше двух (одна при $x \rightarrow \infty$ и вторая при $x \rightarrow -\infty$).

Если прямая $y = kx + b$ есть асимптота графика $y = f(x)$, то $\delta = y_{\text{асимп.}} - y_{\text{граф.}} = kx + b - f(x)$. Когда x стремится к бесконечности, δ стремится к нулю (рис. 2.14).

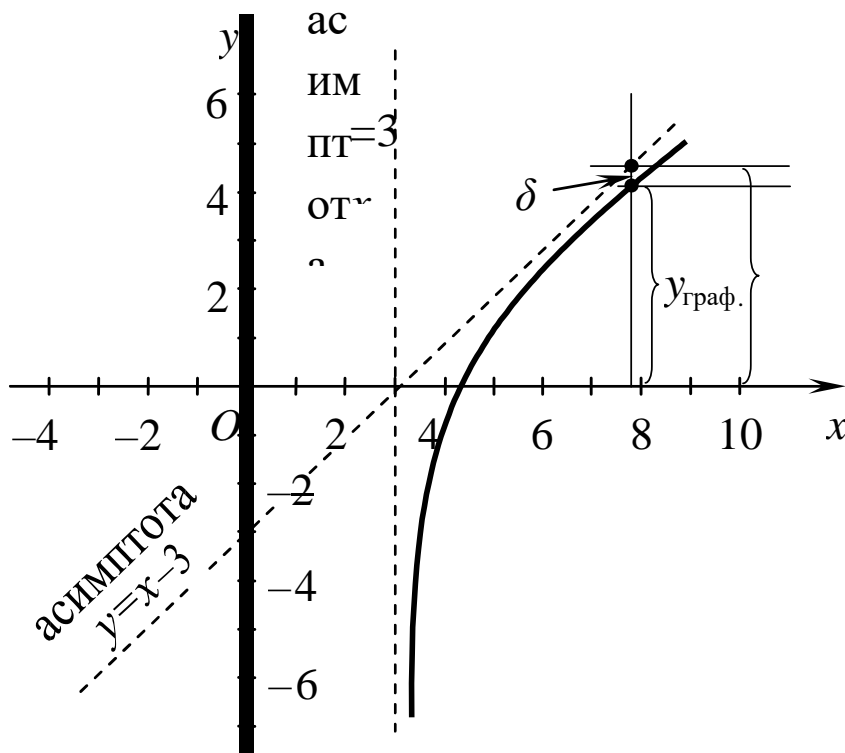


Рисунок –2.14

Из условия $kx + b - f(x) = \delta$ найдем значение углового коэффициента k .

$$\text{Так как } k + \frac{b}{x} - f(x) = \frac{\delta}{x}, \text{ то } k = f(x) + \frac{\delta}{x} - \frac{b}{x}.$$

Найдем предельное значение этого выражения при $x \rightarrow \infty$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) + \frac{\delta}{x} - \frac{b}{x} \right) \quad (2.1)$$

Из уравнения $kx + b - f(x) = \delta$ найдем $b = f(x) - kx + \delta$.

Предельное значение b при $x \rightarrow \infty$ будет равно $b =$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx + \delta] = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]. \quad (2.2)$$

Если существуют пределы (2.1) и (2.2), и они конечны, то и асимптота существует. Если такие пределы не существуют, то не вертикальных асимптот нет.

2.7. Общая схема исследования функций и построение графиков

Для проведения полного исследования функции и построения ее графика используется следующая общая схема.

Тема 2

1. Найти область существования (определения) функции и точки разрыва.
2. Выяснить вопрос о четности и нечетности функции.
3. Определить нули функции (точки, в которых функция равна нулю).
4. Найти интервалы положительности и отрицательности функции по нулям функции и точкам разрыва.
5. Определить асимптоты графика:
 - а) вертикальные $x = x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \infty$;
$$f(x)$$
 - б) наклонные $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$.
6. Установить периодичность функции.
7. Найти критические точки первой производной и точки ее разрыва (точки, в которых первая производная $f'(x) = 0$ не существует).
8. Найти интервалы возрастания $f'(x) > 0$ и убывания $f'(x) < 0$ по критическим точкам первой производной.
9. Исследовать критические точки на экстремум. При переходе через эти критические точки производная меняет знак.
10. Определить экстремальные значения функции.
11. Найти точки разрыва и нули второй производной.

12. Найти интервалы выпуклости $f''(x) < 0$ и вогнутости

$f''(x) > 0$ по критическим точкам второй производной.

13. Найти точки перегиба по изменению знака второй производной при переходе через критические точки.

14. Нанести на график полученные результаты.

15. Рекомендуется построить дополнительные точки графика для большей точности.

ПРИМЕР 2.8. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x+1}$ и построить ее график.

РЕШЕНИЕ

1. Знаменатель этой дроби обращается в ноль ($x + 1 = 0$) при $x_1 = -1$, значит в этой точке функция не определена.

Областью определения функции есть вся числовая ось, кроме точки $x_1 = -1$.

$$D(f) = \{x \in]-\infty, -1[\cup]-1, \infty [\}.$$

Точка $x = -1$ есть точка разрыва функции:

а) при подходе к точке $x_1 = -1$ слева x всегда будет оставаться меньше (-1) , а значит знаменатель $(x + 1) < 0$ а числитель $x^2 > 0$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2}{x+1} = -\infty ;$$

Тема 2

б) при подходе к точке $x_1 = -1$ справа x всегда будет больше, (-1) , и значит $x + 1 > 0$ и $x^2 > 0$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2}{x+1} = \infty.$$

2. Для этой функции не выполняется условие четности $f(-x) = f(x)$ и условие нечетности $f(-x) = -f(x)$. Значит, это функция общего вида.

3. Функция $y = \frac{x^2}{x+1}$ обращается в ноль, если ее числитель равен $x + 1$

нулю $x^2 = 0$, тогда $x_2 = 0$. В точке $x_2 = 0$ функция равна нулю.

4. Проведем исследование поведения функции в точке разрыва $x_1 = -1$ и точке $x_2 = 0$, в которой функция обращается в ноль. Определим интервалы положительности и отрицательности функции.

Слева от точки $x_1 = -1$ функция всегда отрицательна, а справа положительна. На интервале $]-\infty, -1[$ функция отрицательна, а на интервале $]-1, \infty[$ функция положительна. При переходе через точку $x = 0$ функция не меняет знак и остается положительной. 5. Уравнением вертикальной асимптоты будет $x = -1$, так как

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2}{x+1} = \infty.$$

Запишем уравнение наклонной асимптоты $y = kx + b$ и найдем

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{x+2} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 - x^{x+2}] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 + x^{-x-2}] = -1.$$

$\rightarrow \infty$

Уравнение наклонной асимптоты будет $y = x - 1$.

6. Функция неперiodична.

7. Найдем производную функции $y'(x) = \frac{x_2 + 2x}{(x+1)^2}$.

Критические точки первой производной определим из следующих условий:

- а) первая производная обращается в ноль, если $x^2 + 2x = 0$. Решением этого уравнения будут две точки $x_3 = -2$ и $x_4 = 0$;
- б) первая производная не существует, если $(x+1)^2 = 0$. Решением этого уравнения будет точка $x_5 = -1$;
- в) точка $x_5 = -1$ это точка разрыва производной, и она совпадает с точкой разрыва функции $x_1 = -1$;
- г) точка $x_4 = 0$ совпадает с точкой $x_2 = 0$, в которой функция обращается в ноль.

Таким образом, для функции и ее первой производной имеем три критические точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$:

- а) в точке $x_1 = -1$ функция и ее первая производная не существуют (точка разрыва функции и ее первой производной);
- б) в точке $x_2 = 0$ функция и ее первая производная обращаются в ноль;
- в) в точке $x_3 = -2$ только первая производная обращается в ноль.

Тема 2

8. Рассмотрим интервалы между критическими точками и определим знак производной внутри каждого интервала. Для удобства работы составим таблицу 2.5. В эту таблицу внесем следующие интервалы изменения переменной и ее значения в критических точках:

а) интервал изменения x от $-\infty$ до критической точки $x_3 = -2$

$$]-\infty, -2[;$$

б) интервал изменения x между критическими точками $x_3 = -2$ и $x_1 = -1$ будет $]-2, -1[$;

в) интервал изменения x между критическими точками $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$ будет $]-1, 0[$;

г) интервал изменения x от критической точки $x_2 = 0$ до $+\infty$ будет $]0, \infty[$.

Таблица 2.5

	$]-\infty, -2[$	-2	$]-2, -1[$	-1	$]-1, 0[$	0	$]0, \infty[$
y'	> 0	0	< 0	Не существует	< 0	0	> 0
y	< 0	-4	< 0	Не существует	> 0	0	> 0
Выводы	Функция возрастает	max	Функция убывает	Точка разрыва	Функция убывает	min	Функция возрастает

Для определения знака производной из каждого интервала возьмем по одной точке и вычислим значение производной в этих точках.

Из интервала $]-\infty, -2[$ возьмем точку $x = -3$. Вычислим производную в этой точке и занесем знак производной в таблицу $y'(-3) = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} > 0$.

$$(-3+1)^4$$

На интервале $]-\infty, -2[$ первая производная положительна, $y'(x) > 0$.

Аналогично вычислим знак производной:

а) для интервала $]-2, -1[$ в точке $x = -\frac{3}{2}$, $y'\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$;

б) для интервала $]-1, 0[$ в точке $x = -\frac{1}{2}$, $y'\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$;

в) для интервала $]0, \infty[$ в точке $x = 1$, $y'(1) > 0$.

Полученные результаты занесем в таблицу 2.5.

Из таблицы видно:

- на интервале $]-\infty, -2[$ функция возрастает, $y' > 0$;
- на интервале $]-2, 0[$ функция убывает, $y' < 0$;
- на интервале $]0, \infty[$ функция вновь возрастает, $y' > 0$.

При переходе через критическую точку $x = -2$ первая производная меняет знак с «плюса» на «минус». В точке $x = -2$ находится экстремум функции. Это максимум функции.

В точке $x = -1$ производная и сама функция не существуют. Это точка разрыва функции.

9. При переходе через точку $x = 0$ знак первой производной изменяется с «минуса» на «плюс». В точке $x = 0$ находится экстремум. Это минимум функции.

10. Найдем экстремальные значения функции

Тема 2

$$y_{\max}(-2) = -4, y_{\min}(0) = 0.$$

11. Найдем вторую производную функции

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Вторая производная ни при каких значениях переменной x не обращается в ноль.

В точке $x = -1$ вторая производная не существует, так как знаменатель дроби обращается в ноль.

В критической точке $x = -1$ будет точка разрыва функции.

12. Для второй производной имеется только одна критическая точка $x = -1$, поэтому рассмотрим два интервала изменения знака второй производной:

а) в интервале $]-\infty, -1[$ вторая производная будет отрицательна

$$y''(-2) = \frac{2}{(-2+1)^3} = -2 < 0,$$

график функции выпуклый;

б) в интервале $]-1, +\infty[$ вторая производная будет положительна

$$y''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = 2 > 0,$$

график функции вогнутый.

13. Точек перегиба нет.

14. Дополним таблицу 2.5 результатами анализа второй производной.

Таблица 2.6

x	$]-\infty, -2[$	-2	$]2, -1[$	-1	$] -1, 0[$	0	$]0, \infty[$
y'	> 0	0	> 0	Не существует	< 0	0	> 0
y	< 0	-4	< 0	Не существует	> 0	0	< 0
Выводы	Функция возрастает 	max	Функция убывает 	Точка разрыва	Функция убывает 	min	Функция возрастает 
y''	< 0			Не существует	> 0		
Выводы	Кривая выпуклая			Точка разрыва	Кривая вогнутая		

15. По результатам, представленным в таблице 2.6, построим график функции (рис. 2.15).

Для этого на оси Ox нанесем критические точки и значения функции в этих точках. После этого построим асимптоты функции и вычислим значения функции в дополнительных точках

$$x = \left\{ -5, -4, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 2, 3 \right\} .$$

$$y(-5) = \frac{25}{-4} = -6,25 ;$$

$$y(-4) = \frac{16}{-3} = -5,33 ;$$

$$y(-3) = \frac{9}{-2} = -4,5 ;$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 2} = 9 ;$$

$$y(2) = \frac{4}{3} = 1,33 ;$$

$$y(3) = \frac{9}{4} = 2,25 ;$$

Тема 2

$$\left(y - \frac{3}{2} \right) = 9 = -\frac{18}{2} = -4,5; \quad \frac{16}{5}$$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = 4 \quad y(4) = 3,2;$$

$$\left(\frac{1}{y-2} \right) = \frac{1}{2} = 2; \quad y(5) = \frac{25}{6} = 4,16.$$

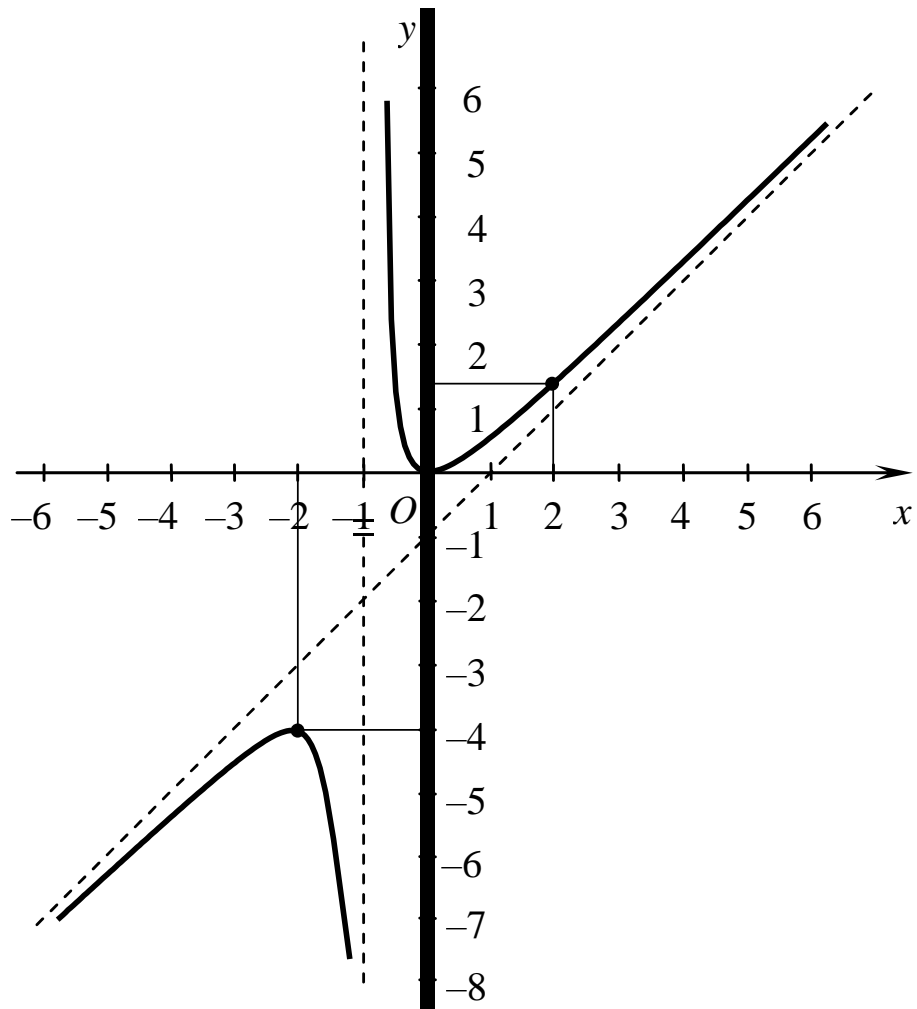


Рисунок – 2.15

2.8. Приложения производной в экономике

В практике экономических исследований широкое применение получили производственные функции, с помощью которых:

- устанавливают зависимость выпуска продукции от затрат ресурсов;
- делают прогнозы развития отраслей; – решают задачи оптимизации.

Например, производственная функция Кобба-Дугласа

$$y = qK^\alpha L^{1-\alpha}$$

устанавливает зависимость между следующими величинами:

- 1) y – величиной выпуска продукции;
- 2) K – величиной производственных фондов;
- 3) L – затратами труда (ресурсов); 4) q , α – постоянные величины.

Функция Кобба-Дугласа является функцией двух переменных K и L .

Чтобы принять правильное решение о вложении капитала или объеме выпуска продукции, нужно рассчитать показатели *предельной прибыли* MP_f и *средней прибыли* AP_f , *предельных издержек* MC и *средних издержек* ATC .

Предельные издержки (MC – marginal costs) – это дополнительные издержки на производство дополнительной единицы продукции. Размеры предельных издержек имеют важное значение, так как от них зависит планирование объема производства.

В экономике производная $y' = \lim_{\Delta q} \frac{\Delta TC}{\Delta q} = MC$ выража-

Тема 2

ет предельные (маргинальные) издержки производства. Здесь Δq – прирост продукции;

ΔTC – приращение (увеличение) издержек производства на единицу продукции;

$\frac{\Delta TC}{\Delta q}$

– среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Аналогично определяют предельный доход, предельную выручку и другие предельные величины.

Например, если производственная функция $y = f(x)$ устанавливает зависимость выпуска продукции y от затрат ресурса x , то $f'(x)$ называют предельным продуктом.

Если $y = f(x)$ устанавливает зависимость издержек производства y от объема продукции x , то $f'(x)$ называют предельными издержками.

В исследовании различных экономических процессов используют понятие *эластичности*.

↑ *Эластичность* представляет собой процентное изменение одной переменной в результате однопроцентного изменения другой.

Понятие эластичности помогает выяснить, как происходит адаптация рынка при изменении его факторов:

цены товара, объема спроса-предложения, покупательной способности и других.

Если абсолютная эластичность спроса (по величине) больше единицы $E_x(y) > 1$, то спрос считают *эластичным* (спрос меняется на больший процент, чем цена). При эластичном спросе падение цены вызывает увеличение выручки от реализации товара.

Если $E_x(y) = 1$, то спрос *нейтрален* (или спрос с единичной эластичностью). При этом цена и величина спроса меняются на одинаковый процент. По мере изменения цены общий доход остается неизменным.

Если $E_x(y) < 1$, то спрос *неэластичен* (спрос изменяется на меньший процент, по сравнению с ценой). По мере падения цены общий доход от реализации товара уменьшается.

Коэффициент эластичности $E_x(y)$ определяется по формуле

$$E_x(y) = y' \frac{x}{y} \cdot y$$

ПРИМЕР 2.9. Проанализировать эластичность функции $y = 6x - 3$.

РЕШЕНИЕ. По определению эластичности имеем

Тема 2

$$E_x(y) = x y' = \frac{6x}{2x-1} = \frac{2x}{2x-1} = 1 + \frac{1}{2x-1} \cdot y$$

1. Пусть $x = 1$, тогда эластичность функции равна $\frac{4}{3} > 1$.

Пусть $x = 2$, тогда эластичность функции равна $2 > 1$.

3. Пусть $x = 3$, тогда эластичность функции равна $1\frac{1}{5} > 1$.

$$E_x(y) > 1,$$

следовательно, спрос эластичный.

ОТВЕТ. При рыночно обоснованной цене спрос является эластичным.

ПРИМЕР 2.10. Пусть функция спроса является обратно пропорциональной c к цене $q = \frac{c}{p}$, где $c - \text{const}$. Проанализировать эластичность спроса.

РЕШЕНИЕ. Эластичность спроса равна

$$E_p(q) = - q p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c}{p} \right) = - \frac{c}{p} \left(- \frac{c}{p^2} \right) = 1.$$

Значит, если спрос обратно пропорционален цене, то спрос является нейтральным для любой цены на товар.

ОТВЕТ. Спрос нейтральный.

Экономическая интерпретация теорема Ферма

ТЕОРЕМА ФЕРМА

Если функция, дифференцируемая на промежутке, достигает наибольшего или

наименьшего значения во внутренней точке q_A этого промежутка, то производная в этой точке равна нулю.

В экономике оптимальным уровнем производства считают такой, при котором **прибыль** $Pf(q)$ максимальна. По теореме Ферма в точке q_A , где функция $Pf(q)$ имеет экстремум (максимум), ее производная равна нулю $Pf'(q) = 0$.

Значения прибыли $Pf(q)$ определяют как разность между доходом и издержками. Определим максимальную прибыль Pf_{\max} из условия $Pf'(q) = 0$

$$Pf'(q) = MR - MC,$$

где MR – производная от величины дохода или предельный доход;

MC – производная от величины издержек или предельные издержки.

Тогда **максимальная прибыль** в точке q_A будет равна

$$Pf'(x) = MR(q_A) - MC(q_A) = 0 \quad \rightarrow \quad MR(q_A) = MC(q_A).$$

3 АПОМНИТЕ

Для	производителя	оптимальным	уровнем
	производства	будет	такой, при
	предельные	издержки	равны предельному

Тема 2

доходу, При этом прибыль $Pf(q)$ максимальна.
Математически –

функция $Pf(q)$ имеет максимум (экстремум).

ПРИМЕР 2.11. Предприятие производит q единиц продукции по цене

$p(q) = 50 - \frac{1}{10}q$, а издержки производства заданы функцией

$C(q) = \frac{1}{50}q^2 + 14q + 800$. Найти оптимальный объем выпуска продукции для предприятия и соответствующую ему максимальную прибыль.

РЕШЕНИЕ. Пусть $TR(q)$ – валовой доход, а $Pf(q)$ – прибыль от реализации q единиц продукции по цене $p(q)$. Тогда

$$TR(q) = qp(q); \text{ и } Pf(q) = TR(q) - C(q),$$

где $C(q), p(q)$ – заданные функции.

Для решения этой задачи исследуем функцию на экстремум. Прибыль будет максимальна для такого объема q выпуска продукции, для которого $Pf'(q) = 0, Pf''(q) < 0$.

$$\text{Учтем, что } TR(q) = 50q - \frac{1}{10}q^2 \text{ и } C(q) = \frac{1}{50}q^2 + 14q + 800.$$

$$1. \text{ Формируем } Pf(q) = TR(q) - C(q) = 36q - \frac{6}{50}q^2 - 800.$$

$$\text{Находим } Pf'(q) = TR'(q) - C'(q) = 36 - \frac{12}{50}q.$$

$$\text{Решаем уравнение } Pf'(q) = 0, TR'(q) = C'(q) \cdot \frac{12}{50}q = 36.$$

$$36 \cdot 50$$

Получаем критическую точку. $q = 150$.

12

2. Находим $Pf''(q)$ и определяем ее знак при $q = 150$

$$Pf''(q) = TR''\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{6}{25} \cdot 0q\right) - C''(q) = - = - <$$

для $\forall q$.

Значит, $q = 150$ – точка максимума функции $Pf(q)$. Оптимальный объем производства составляет 150 единиц продукции.

3. Определим максимальную прибыль производства $Pf_{\max} = Pf(150)$.
При

$q = 150$ цена $p = 50 - \cdot 150 = 35$, а валовой
доход $TR = 35 \cdot 150 = 5250$.

Издержки производства

$$C = \cdot 150 + 14 \cdot 150 + 800 = 450 + 2100 + 800 = 3350$$

Максимальная прибыль

$$Pf_{\max} = 5250 - 3350 = 1900.$$

ОТВЕТ. Оптимальный объем производства составит 150 единиц продукции. Максимальная прибыль от продажи составит 1900 ден. ед.

ПРИМЕР 2.12. ЗАДАЧА ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СОЛНЕЧНОЙ ЭНЕРГИИ

Фирма планирует выпуск солнечных батарей. На основе исследований была установлена зависимость спроса q от цены p за батарею.

$$q = 100000 - 200p,$$

где q – количество батарей для продажи в год.

Издержки фирмы на выпуск q солнечных батарей составляют

$$TC = 150000 + 100q + 0,003q^2$$

Тема 2

где TC – функция затрат.

Рассчитать прибыль и определить ее максимальное значение.

РЕШЕНИЕ. Валовой доход составляет $TR = pq$. Запишем функцию p через переменную q $p = 500 - 0,005q$.

Валовой доход зависит от количества изготовленных солнечных батарей q .

$$TR(q) = q(500 - 0,005q).$$

Вычтем из валового дохода $TR(q)$, издержки фирмы на изготовление q солнечных батарей. Получим прибыль

$$\begin{aligned} Pf &= TR - TC = 500q - 0,005q^2 - (150000 + 100q + 0,003q^2) = \\ &= -0,008q^2 + 400q - 150000 \text{ (грн.)}. \end{aligned}$$

Для определения максимальной прибыли исследуем функцию на экстремум

$$Pf(q) = -0,008q^2 + 400q - 150000.$$

Найдем точку экстремума. Для этого вычислим первую производную и приравняем ее нулю.

$$Pf'(q) = -0,016q + 400, \quad -0,016q + 400 = 0, \quad q = 25000 \text{ единиц}.$$

Найдем вторую производную $Pf''(q) = -0,016 < 0$.

Точкой максимума будет точка $q = 25000$. В этой точке $Pf = Pf(25000) = 4850000$ грн. Это максимальная прибыль.

На графике (рис 2.16) мы получаем параболу с вершиной $(25000, 4850000)$ и ветвями, направленными вниз.

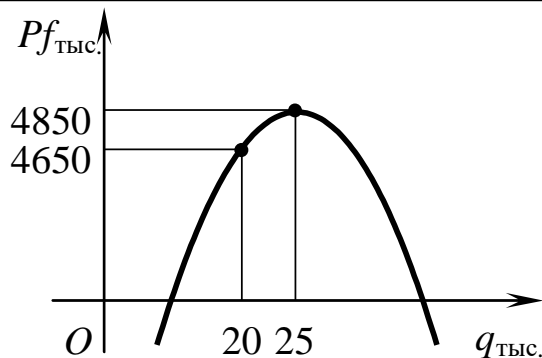


Рисунок – 2.16. Зависимость спроса от цены

ОТВЕТ. Максимальная прибыль от выпуска солнечных батарей

$Pf(25000) = 4850000$ грн. Количество солнечных батарей при этом должно быть $q = 25000$ единиц.



ОТВЕТЕ НА ВОПРОСЫ

1. Дайте характеристику терминам: производная слева, производная справа.
2. Назовите условие, при котором функция будет постоянна на интервале.
3. При каких значениях производной функция:
 - а) возрастает на интервале;
 - б) убывает на интервале?
4. Какие точки графика функции называются:
 - а) стационарными;
 - б) экстремальными;
 - в) критическими?
5. Назовите необходимое и достаточное условие экстремума.
6. Как исследовать функцию на экстремум?

Тема 2

7. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции на интервале $]a, b[$? Назовите порядок действий.
8. Какую точку графика функции называют точкой перегиба?
9. Какой знак имеет вторая производная, если дуга графика функции на интервале выпуклая?
10. Какой знак имеет вторая производная, если дуга графика на интервале вогнутая?
11. Назовите второй достаточный признак экстремума.
12. Как найти экстремум функции, если

$$y'(x_0) = y''(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 ,$$

а $n^{\text{ая}}$ производная $y^{(n)} \neq 0$?

13. Назовите условия, при которых график функции будет иметь:
 - а) вертикальные асимптоты;
 - б) невертикальные (наклонные) асимптоты.
14. Сформулируйте теорему Ролля.
15. Для каких функций будет верным равенство

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\phi(x_2) - \phi(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)} \quad ?$$

16. Назовите основные пункты общей схемы исследования функции.

17. Из каких условий находят интервалы знакопостоянства функции $y = f(x)$?

18. Как найти:

а) интервалы возрастания или убывания функции;

б) экстремальные точки функции;

в) интервалы выпуклости, вогнутости?

19. Как построить асимптоты графика?



ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

I. Определите интервалы возрастания, убывания функций:

1) $y = 2x^2 - 14x + 24$; 2) $y = -x^2 + 7x - 6$; 3) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

4) $y = \lg(x + 5)$; 5) $y = \frac{x-1}{x^2}$; 6) $y = 2^{x^2-5x+4}$; $x + 1$

7) $y = 3x^3 + 2x^2 - x - 4$.

II. Определите экстремумы функций:

1) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 3) $y = \sin x + \cos x$; 23)

$y = \sin x + \cos x$;
2) x

4) $y = x^2 e^{-x}$; 5) $y = \frac{x-2}{x+5}$; 6) $y = x^2 - 2x - 35$;

7) $y = \sqrt{x-1}$; 8) $y = -x^2 + 5x - 6$; 9) $y = 2x^3 - 3x^2 + x + 6$.

Тема 2

$$10) y = \frac{x^4 - 2x^2 + 2(x-6)}{\ln x}; \quad 11) y = x^2 - 5x + 4; \quad 12) y = x$$

III. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном интервале:

1) $y = 2x^2 - 14x + 12$ на интервале $[0,7]$;

2) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на интервале $[0,3]$;

3) $y = x - 2\ln x$ на интервале $[1,e]$;

4) $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на интервале $[-2,2]$;

5) $y = 2x + 2\sqrt{x}$ на интервале $[0,4]$; $x - 1$

6) $y = \frac{x}{x+1}$ на интервале $0 \leq x \leq 4$;

7) $y = \sin 2x - x$ на интервале $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;

8) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ на интервале $0 \leq x \leq 1$.

IV. Определите интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции:

1) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; 2) $y = (x+2)^6 + 2x + 2$;

$$3) y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}; \quad 4) y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4;$$

$$5) y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$$

V. Найдите экстремумы функции при помощи второй производной:

$$1) y = x \sqrt{2 - x^2}; \quad 2) y = x^2 (a - x)^2.$$

VI. Найдите экстремум функции при помощи производных высших порядков:

$$1) y = -6x^4; \quad 2) y = 4x^6 + 15.$$

VII. Найдите асимптоты графика функции:

$$1) y = xe^x; \quad 2) y = x + \frac{\sin x}{x}; \quad 3) y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}; \quad x$$

$$4) y = \frac{x-1}{x+2}; \quad 5) y = \frac{2x^2-9}{x-3}; \quad 6) y = \ln(4-x^2).$$

VIII. Исследуйте функции и постройте их графики:

$$1) y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1; \quad 2) y = 4x^3 - 1,5x^4;$$

$$3) y = 2 + 9x + 3x^2 - x^3; \quad 4) y = x^4 - 2x^2;$$

$$5) y = x^2 - 3 - 2; \quad 6) y = 8x^2 - x^4; \quad 7) y = -1.$$

x

Тема 3

ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

- 1. ТАБЛИЦА ПРОСТЕЙШИХ ИНТЕГРАЛОВ.**
- 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА**
- 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.**
- 4. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА.**
- 5. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ.**
- 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.**
- 7. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.**

Лексика темы

интеграл	integral	积分
верхний предел <i>интегрирования</i>	top limit of <i>integration</i>	上部积分域
<i>интегральная</i> сумма	integrated sum	总和总结
<i>интегрирование</i> по частям	<i>integration in</i> parts	综合化部分
интервал <i>интегрирования</i>	interval of <i>integration</i>	间隔时间综合 化
неопределенный <i>интеграл</i>	indefinite <i>integral</i>	不定积分
нижний предел <i>интегрирования</i>	bottom limit of <i>integration</i>	底部的极限一 体化
определенный <i>интеграл</i>	definite <i>integral</i>	定积分
переменная <i>интегрирования</i>	variable of <i>integration</i>	可变一体化
подынтегральная функция	<i>underintegral</i> function	被积函数
подынтегральное выражение	<i>underintegral</i> expression	综合化的元素
предел <i>интегрирования</i>	limit of <i>integration</i>	综合化极限
криволинейная трапеция	curvilinear trapezium	曲线梯形

Тема 4

метод замены переменной	method of variable's changing	方法所取代的变化量
метод разложения	method of factorizing	分解的方法
основание трапеции	basis of trapezium	梯形的基地
первообразная	antiderivative	原型

3. 1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

В науке, технике и экономике многие задачи требуют решения проблем, когда по данной производной $F'(x) = f(x)$ нужно найти функцию $F(x)$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ в интервале $[a,b]$, если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$. Например,

функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на всей числовой оси $x \in R$, так как

$f(x) = x^2$ на всей числовой оси $x \in R$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = x^2 = f(x), x \in R. \text{ Очевидно, что } \frac{x^3}{3} + C, \text{ где}$$

3 3

$C = \text{const}$, также является первообразной для функции $y = x^2$.

Всякая функция, непрерывная в интервале $[a,b]$, имеет множество первообразных в этом интервале, которые отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Основная задача *интегрального исчисления*: по данной функции найти ее первообразную.

Множество всех первообразных $F(x) + C$ для данной функции $f(x)$ на интервале $[a,b]$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается символом $\int f(x)dx$. Читают: «Интеграл эф от икс де-икс». Если $F(x)$ —любая первообразная функции

$$f(x), \text{ то } \int f(x)dx = F(x) + C.$$

где $f(x)$ – *подынтегральная* функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования; \int – знак неопределенного интеграла;

C – произвольная постоянная.

Например, $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$

Тема 4

Нахождение неопределенного интеграла (или первообразной) от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

Интегрирование есть действие, обратное дифференцированию.

3.2. Таблица простейших интегралов

Из основных формул дифференциального исчисления получим следующие выражения для простейших интегралов:

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1), \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = (n+1) \frac{x^{n+1-1}}{n+1} = x^n;$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), (\ln|x| + C)' = \frac{1}{x};$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C, (x \in \mathbb{R}), (-\cos x + C)' = \sin x;$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C, (x \in \mathbb{R}), (\sin x + C)' = \cos x;$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right), (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}), (-\operatorname{ctg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$6. \int \sin x \sin x$$

$$[\arctg x + C, (\arctg x + C)'] = 1$$

$$7. \int \frac{dx}{1+x^2} = \{[-\operatorname{arctg} x + C, (x \in R), (-\operatorname{arctg} x + C)']\} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \{[\arcsin x + C, (x < 1), (\arcsin x + C)'], [-\arccos x + C, (x < 1), (-\arccos x + C)']\} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$9. \int a^x dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1), \quad \left(\ln \frac{a^x}{a} + C\right)' = a^x;$$

$$10. \int e^x dx$$

$$\frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \quad \left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right)$$

$$= e^x + C, \quad (e^x + C)' = e^x;$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2}, \quad \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| \right)' = \frac{1}{x^2 - a^2};$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Все эти формулы легко проверить дифференцированием обеих частей.

Надо отметить, что существуют интегралы, которые нельзя найти при помощи элементарных функций

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx \text{ и другие.}$$

3.3. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен его подынтегральному выражению.

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx. \quad (3.1)$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (3.2)$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределенного интеграла.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k = \text{const}, \quad k \neq 0).$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых.

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx. \quad (3.3)$$

5. Все формулы интегрирования сохраняют свой вид, если вместо независимой переменной подставить в них любую дифференцируемую функцию от этой переменной.

Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int f(u) du = F(u) + C, \quad (3.4)$$

где $u = \phi(x)$ – любая дифференцируемая функция от x .

ПРИМЕР 3.1. Найти интеграл $\int \sin x \cos x dx$.

РЕШЕНИЕ. $\cos x$ есть производная от $\sin x$, поэтому перепишем интеграл так:

$$\int \sin x \cos x dx = \int \sin x d(\sin x) = \int u du.$$

Здесь $u = \sin x$, а $\cos x dx = d(\sin x) = du$. Полученный интеграл табличный, и он равен

$$\int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Тема 4

ОТВЕТ. $\int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

ПРИМЕР 3.2. Найти интеграл $\int e^{-5x} dx$.

РЕШЕНИЕ. Умножим и разделим интеграл на (-5) . Внесем множитель

(-5) под знак интеграла $\int (-5)e^{-5x} dx = \int e^{-5x} d(-5x)$.

$$= \int e^u du$$

Обозначим $u = -5x$, тогда $du = -5dx$. Мы приходим к табличному интегралу

$$\int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} \int e^u du = -\frac{1}{5} e^{-5x} + C$$

ОТВЕТ

$$\int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x} + C$$

Чтобы найти некоторые интегралы, нужно **подынтегральное выражение** данного интеграла преобразовать к виду подынтегрального выражения табличного интеграла.

3.4. Основные методы интегрирования

Рассмотрим некоторые методы интегрирования.

Первый метод. Интегрирование методом замены переменной.

Замена переменной интегрирования (подстановка) является одним из важнейших методов вычисления интегралов.

Если известно, что $\int f(x)dx = F(x) + C$, то справедливо равенство

$$\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt = F[\phi(t)] + C, \quad (3.5)$$

где $\phi(t)$ – дифференцируемая функция.

ПРИМЕР 3.3. Найти интеграл $\int \cos 5x dx$.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену переменной x на переменную t , где

$$= 5x, \text{ тогда } dt = 5dx, \text{ а } dx = \frac{dt}{5}.$$

Интеграл принимает вид табличного интеграла

$$\int \cos t \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int \cos t dt = \frac{1}{5} \sin t + C = \frac{1}{5} \sin 5x + C.$$

ОТВЕТ $\int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x + C$.

ПРИМЕР 3.4. Найти интеграл $\int \sin x \cos^7 x dx$.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $\cos x = t$, и найдем $dt = -\sin x dx$, тогда

$$\int \sin x \cos^7 x dx = - \int t^7 dt = -\frac{t^8}{8} + C = -\frac{\cos^8 x}{8} + C.$$

Тема 4

ОТВЕТ. $\int \sin x \cos^7 x dx = -\frac{\cos^8 x}{8} + C$.

ПРИМЕР 3.5. Найти интеграл $\int \frac{\ln^3 x dx}{x}$.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $\ln x = t$ и найдем $dt = \frac{1}{x} dx$, тогда x

$$\int \frac{\ln^3 x dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

ОТВЕТ $\int \frac{\ln^3 x dx}{x} = \frac{\ln^4 x}{4} + C$.

ПРИМЕР 3.6. Найти интеграл $\int (2x^{dx} - 1)^5$.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $2x - 1 = t$, откуда $2dx = dt$, а $dx = \frac{dt}{2}$, тогда 2

$$\int (2x - 1)^5 dx = \frac{1}{2} \int dt t^5 = \frac{1}{2} (-t^{-5+1} + 1) = -\frac{t^{-4}}{4} + C = -\frac{(2x-1)^{-4}}{4} + C.$$

ОТВЕТ. $\int (2x-1)^5 dx = -\frac{(2x-1)^{-4}}{4} + C$.

$$\int \frac{(9x^2 + 2)dx}{(3x^3 + 2x - 4)^2}.$$

ПРИМЕР 3.7. Найти интеграл

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $3x^3 + 2x - 4 = t$, тогда $dt = (9x^2 + 2)dx$, а

$$\int \frac{(9x^2 + 2)dx}{(3x^3 + 2x - 4)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3x^3 + 2x - 4} + C.$$

ОТВЕТ. $\int \frac{(9x^2 + 2)dx}{(3x^3 + 2x - 4)^2} = -\frac{1}{3x^3 + 2x - 4} + C.$

Второй метод. Метод разложения подынтегральной функции на слагаемые.

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \quad (3.6)$$

Тема 4

ПРИМЕР 3.8. Найти интеграл $\int (x^5 - 5x^4 - 3x + 4)dx$.

РЕШЕНИЕ. Запишем этот интеграл как алгебраическую сумму интегралов и найдем каждый из них отдельно

$$\int (x^5 - 5x^4 - 3x + 4)dx = \int x^5 dx - 5 \int x^4 dx - 3 \int x dx + 4 \int dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - 5 \frac{x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C = \frac{x^6}{6} - x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C.$$

ПРОВЕРКА. Возьмем производную от полученного результата

$$\left(\frac{x^6}{6} - x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C \right)' = x^5 - 5x^4 - 3x + 4.$$

Мы получили подынтегральную функцию. Значит, решение правильное.

ОТВЕТ. $\int (x^5 - 5x^4 - 3x + 4)dx = \frac{x^6}{6} - x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$.

ПРИМЕР 3.9. Найти интеграл $\int \frac{2x + 3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}} dx$.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем подынтегральную функцию, для чего разделим каждый член многочлена числителя на знаменатель и запишем результат как сумму интегралов

$$\int dx = 2 \int \frac{2x}{\sqrt{x^3}} = \sqrt{x} + 3^{-12} \quad -56 \quad \frac{dx}{x} x^{-1/2+1}$$

$$dx + 3 \int x dx - \int x = 2 \quad \frac{1}{x} +$$

$$- \quad + 1$$

2

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{-+1}$$

$$+3 \frac{x^6}{- \ln x} + C = 2 + 3 - \ln x + C = 4x + 18x - \ln x + C.$$

$$\frac{5}{-+1}$$

$$\frac{6}{2} \quad \frac{1}{6}$$

$$\text{ОТВЕТ} \int \frac{2x + 3\sqrt{x^2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 4x + 18x - \ln x + C.$$

ЗАПОМНИТЕ

Если в подынтегральной функции наибольшие показатели степени многочлена числителя и знаменателя равны, то необходимо разделить числитель на знаменатель, и представить интеграл в виде алгебраической суммы интегралов.

$$\frac{x-1}{x}$$

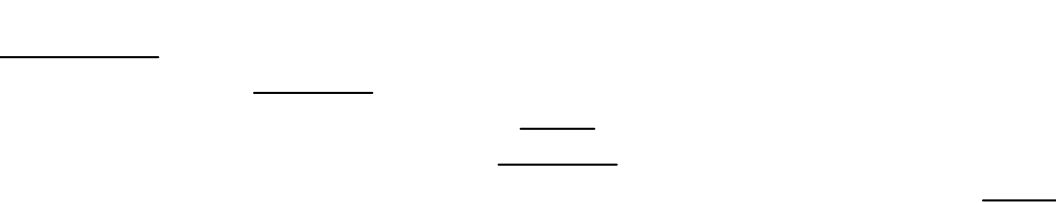
ПРИМЕР 3.10. Найти интеграл $\int dx \cdot x +$

4

Тема 4

РЕШЕНИЕ. Преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы выделить целую часть дроби. Для этого в числителе прибавим и вычтем $4x+4-4-1x+4-5(5)x+4-5(5)$

$$\int \frac{x+4}{x+4} dx = \int \frac{x+4}{x+4} dx = \int \frac{(1-x+4)}{x+4} dx = \int \frac{x+4}{x+4} dx = \int (1 - \frac{x-4}{x+4}) dx$$



Полученный интеграл представим в виде суммы

интегралов $\int \left(1 - \frac{x-4}{x+4}\right) dx = \int dx - \int \frac{x-4}{x+4} dx =$

$$\int dx - 5 \int \frac{dx}{x+4} = x - 5 \ln|x+4| + C.$$

Здесь $\int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{1}{d(x+4)} = \ln|x+4| + C$, потому что $d(x+4) = dx$.

ОТВЕТ. $\int \frac{x-1}{x+4} dx = x - 5 \ln|x+4| + C.$

ЗАПОМНИТЕ

Если числитель дроби подынтегральной функции постоянное число, а знаменатель есть квадратный трехчлен, то знаменатель дополняется до полного квадрата, и интеграл сводится к интегралу табличного вида.

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$$

или $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$

ПРИМЕР 3.11. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 5}.$

РЕШЕНИЕ. В знаменателе дроби прибавим и вычтем 4, тогда интеграл будет иметь вид

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 5 + 4 - 4} = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 9 - 4} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+3)^2 - 4} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 - (2)^2}.$$

Перейдем к новой переменной $u = x + 3$, тогда $du = dx$.
Интеграл перепишем так:

$$\int \frac{dx}{(x+3)^2 - (2)^2} = \int \frac{du}{u^2 - 2^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + C =$$

Тема 4

$$\frac{1}{x+3} - \frac{2}{1-x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{4x+5} \right| + C$$

ОТВЕТ: $\int \frac{1}{x^2+6x+5} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{4x+5} \right| + C$.

ПРИМЕР 3.12. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем знаменатель и перепишем интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+9+4} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+(2)^2}$$

Перейдем к новой переменной $u = x+3$.

$$\int \frac{dx}{(x+3)^2+(2)^2} = \int \frac{du}{u^2+(2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C$$

ОТВЕТ: $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C$.

Третий метод. Интегрирование по частям.

Из формулы производной произведения $(UV)' = U'V + V'u$ следует $d(UV) = UdV + VdU$.

Интегрируя обе части равенства, имеем

$$\int d(UV) = \int UdV + \int VdU \text{ или } UV = \int UdV + \int VdU,$$

откуда следует **формула интегрирования по частям**

$$\int UdV = UV - \int VdU. \quad (3.7)$$

ПРИМЕР 3.13. Найти $\int x \sin x dx$.

$$[U = x, \quad dV = \sin x dx]$$

РЕШЕНИЕ. Обозначим $[[dU = dx, V = -\cos x]]$, тогда по формуле (3.7) имеем

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$.

3_АПОМНИТЕ

Интегралы вида $\int P(x)e^{kx} dx, \int P(x)\sin kx dx,$

$\int P(x)\cos kx dx$, где $P(x)$ – многочлен, берут по

частям, если через U обозначить $P(x)$.

$$\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx = (x^4 + 3x^2 - 7x) \ln x - \int \frac{x^4 + 3x^2 - 7x}{x^2} dx =$$

$$= (x^4 + 3x^2 - 7x) \ln x - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 7x \right) + C.$$

ОТВЕТ. $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx = (x^4 + 3x^2 - 7x) \ln x - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2} x^2 - 7x \right) + C.$

Четвертый метод. Интегрирование рациональных функций.

Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях. Целая рациональная функция

(многочлен) интегрируется непосредственно $\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx =$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 x^n}{n} + \dots + a_{n-1} x + a_n x + C. \quad (3.8)$$

Интеграл дробной рациональной функции можно найти путем его разложения на слагаемые.

Если степень многочлена числителя $[P(x)]$ больше или равна степени многочлена знаменателя $[Q(x)]$ то, разделив многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, получим целую рациональную функцию $N(x)$ и дробно-рациональную

Тема 4

$P_1(x)$ функцию . Степень многочлена $P_1(x)$ будет меньше $Q(x)$

степени многочлена $Q(x)$

$$P(x) \{ P_1(x) \}$$

$$\int Q(x) dx = \int \{ N(x) + Q(x) \} dx . \quad (3.9)$$

Интегрирование целой рациональной функции не составляет трудностей. Правильную рациональную дробь можно разложить на элементарные, всегда интегрируемые слагаемые-дроби двух видов

$$\frac{A}{x - a} + \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} ,$$

где m и n – целые положительные числа.

Для того, чтобы разложить правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые-дроби, нужно знаменатель $Q(x)$ разложить на простейшие множители.

1. Если уравнение $Q(x)=0$ имеет только действительные кор-

A ни, и они разные, то получаем все слагаемые вида $(x-a)$

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x-a_1} dx + \int \frac{A_2}{x-a_2} dx + \dots + \int \frac{A_n}{x-a_n} dx \quad (3.10)$$

2. Если уравнение $Q(x) = 0$ имеет только действительные, но кратные корни, кратности k , тогда

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{B}{(x-b)^k} dx =$$

$$= \int \frac{B_1 dx}{(x-b)} + \int \frac{B_2 dx}{(x-b)^2} + \dots + \int \frac{B_k dx}{(x-b)^k} \quad (3.11)$$

3. Если уравнение $Q(x) = x^2 + px + q = 0$ не имеет действительных корней, но имеет одну пару комплексных сопряженных чисел $(\alpha, \bar{\alpha})$, тогда

$$P(x)$$

Тема 4

$$\int \frac{Q_1(x) dx}{x^2 Cx + px + D + q} = \int \frac{x^2 Cx + px + D + q}{x^2 Cx + px + D + q} dx \quad (3.12)$$

4. Если уравнение $Q(x) = (x^2 + px + q)^t$ имеет пары комплексных сопряженных чисел кратности t , тогда

$$\int \frac{P_1(x) Mx + N}{x^2 Cx + px + D + q} dx = \int \frac{M^2 x + N^2 M'x + N^t}{(x^2 + px + q)^t} dx + \int \frac{M^2 x + N^2 M'x + N^t}{(x^2 + px + q)^t} dx \quad (3.13)$$

В формулы (3.10, 3.11, 3.12, 3.13) входят неопределенные коэффициенты A, B, C, D, M и N , которые надо найти. Для этого составляем систему уравнений: берем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой части равенств и приравниваем их коэффициентам при тех же степенях переменной x в правой части равенств.

Уравнение $Q(x) = 0$ может иметь действительные и комплексно-сопряженные корни одновременно. Тогда в

разложении правильной рациональной дроби будут присутствовать слагаемые всех приведенных видов.

Рассмотрим примеры интегрирования дробно-рациональных функций.

ПРИМЕР 3.16. Найти интеграл $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx$.

РЕШЕНИЕ. Подынтегральная функция — это неправильная дробь (наибольшая степень переменной x в числителе равна 3, а наибольшая степень переменной x в знаменателе равна 2). Выделим целую часть дроби. Для этого разделим числитель дроби $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ на знаменатель дроби $x^2 - x$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x \\ x + 4 \end{array} \right. \\ \hline 4x^2 + 3x + 1 \\ 4x^2 - 4x \\ \hline 7x + 1 \end{array} .$$

Подынтегральное выражение можно представить в виде

$$\frac{(x+1)^3}{x^2-x} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2-x} = x + 4 + \frac{7x+1}{x^2-x}$$

Корни уравнения $x^2 - x = 0$ разные действительные числа

$x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Правильную дробь $\frac{7x+1}{x^2-x}$ можно представить как

Тема 4

сумму слагаемых согласно (3.11)

$$\frac{7x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1}$$

Найдем неизвестные коэффициенты A и B . Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в полученном равенстве. Для этого правую часть последнего равенства приведем к общему знаменателю

$$\frac{7x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x - A}{x^2-1}$$

$$\frac{7x+1}{x^2-1} = \frac{(A+B)x - A}{x^2-1}$$

В равенстве $\frac{7x+1}{x^2-1} = \frac{(A+B)x - A}{x^2-1}$ знаменатель в левой и пра-

$$x^2-1 = x(x-1)$$

вой части одинаков $x^2-1 = x(x-1)$. Чтобы дроби были равны, числители тоже должны быть равны $7x+1 = (A+B)x - A$. Поэтому $A+B = 7$ и $-A = 1$. Мы получили систему двух уравнений, из которой найдем коэффициенты A и B .

$$\begin{cases} A+B = 7, \\ -A = 1, \end{cases} \rightarrow A = -1, B = 8, \text{ значит } \frac{7x+1}{x^2-1} = \frac{8}{x-1} - \frac{1}{x+1}, \text{ все}$$

подынтегральное выражение можно записать так:

$$\frac{7x+1}{x^2-1} = \frac{8}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{8(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{7x+9}{x^2-1}$$

Заданный интеграл можно представить в виде суммы интегралов, которые легко вычислить

$$\int \frac{(x^2+1)^3}{x^2-x} dx = \int \frac{1}{x} + 4 - \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int 4 dx - \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x - \ln|x-1| + C$$

ПРОВЕРКА. Возьмем производную от полученного выражения

$$\left(\frac{x^2}{2} + 4x - \ln|x-1| + C \right)' = x + 4 - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - x^2 + 4x^2 - 4x + 8x - x + 1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x(x-1)}$$

Тема 4

$$(x+1)^3$$

Полученное выражение $\frac{(x+1)^3}{x^2-x}$ – это подынтегральная функция.

Интеграл найден правильно.

ОТВЕТ $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx = 2 + 4x - \ln|x-1| + 8\ln|x+1| - 1 + C.$

ПРИМЕР 3.17. Найти интеграл $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx.$

РЕШЕНИЕ. Подынтегральное выражение представляет собой правильную дробь. Найдем корни уравнения $Q(x) = x^4 + x = 0.$ Чтобы найти корни, разложим многочлен на множители

$$x^4 + x = x(x^3 + 1) = x(x+1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Корнями этого уравнения будут два действительных различных корня $x_1 = 0$ и $x_2 = -1$ и пара комплексных сопряженных чисел $x_3 = 1+i\sqrt{3}$ и $x_4 = 1-i\sqrt{3}.$ Подынтегральную дробь можно разложить на элементарные слагаемые-дроби на основании формул (3.10) и (3.12).

$$\frac{(x^3 + 4x^2 - 2x + 1)dx}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 - x + 1}$$

$$\int \frac{(x^3 + 4x^2 - 2x + 1)dx}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \int \left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 - x + 1} \right) dx.$$

Приравняем левую и правую части данного подынтегрального выражения.

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - 2x + 1 &= A_1(x+1)(x^2 - x + 1) + A_2x(x^2 - x + 1) + (Bx + C)x(x+1) \\ &= \frac{}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} \end{aligned}$$

После преобразований получим $\frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = (A_1 + A_2 + B)x^3 + (B + C - A_2)x^2 + (C + A_2)x + A_1$.

$$= \frac{}{x(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

Умножим левую и правую часть равенства на $Q(x) = x(x+1)(x^2 - x + 1)$, тогда $x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = (A_1 + A_2 + B)x^3 + (B + C - A_2)x^2 + (C + A_2)x + A_1$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим четыре уравнения, из которых найдем A_1, A_2, B и C .

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + B = 1, \\ B + C - A_2 = 4, \\ C - A_2 = -2, \\ A_1 = 1. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений будет $A_1 = 1, A_2 = -2, B = 2, C = 0$.

Подставим полученные значения A_1, A_2, B и C в формулу (3.14)

Тема 4

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1} dx = \int \left(\frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + C + \frac{D}{x^2 - x + 1} \right) dx =$$

$$\int \left(\frac{1x - 2}{x^2 - x + 1} + 2 + \frac{2}{x^2 - x + 1} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{2-x}{x^2-x+1} dx + 2x$$

Найдем каждый из интегралов отдельно. Первый интеграл – это

табличный интеграл $I_1 = \int \frac{dx}{x} = \ln |x|$.

Во втором интеграле $I_2 = 2 \int \frac{dx}{x+1}$ сделаем замену переменной $t = x + 1$, тогда $dt = dx$. Получим табличный интеграл относительно t

$$I_2 = 2 \int \frac{dx}{x+1} = 2 \int \frac{dt}{t} = 2 \ln |t| = 2 \ln |x+1|$$

В третьем интеграле $I_3 = \int \frac{2-x}{x^2-x+1} dx$ в числителе прибавим и вычтем 1, тогда

$$I_3 = \int \frac{2-x-1+1}{x^2-x+1} dx = \int \frac{1-x}{x^2-x+1} dx + \int \frac{1}{x^2-x+1} dx = I_4 + I_5$$

Введем новую переменную $U = x^2 - x + 1$, тогда $dU = (2x - 1)dx$.

Запишем интеграл I_4

$$I_4 = \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{dU}{U} = \ln|x^2 - x + 1|.$$

$$\text{Интеграл } I_5 = \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Если в интеграле I_5 обозначить $z = x - \frac{1}{2}$, то $dz = dx$. Получаем, что

$$I_5 = \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dz}{z^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \int \frac{dz}{z^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3}z}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}.$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}.$$

Найдем $I_3 = I_4 + I_5 = \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$. Теперь можем записать, что

Тема 4

$$I = \int \frac{x^3 + 4x^2 + x + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx = I_1 - I_2 + I_3 = \ln x - 2 \ln |x^2 + 1| + \ln x^2 -$$

$$+ \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C = \ln \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

ОТВЕТ. $\int \frac{x^3 + 4x^2 + x + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \ln x - 2 \ln |x^2 + 1| + \ln x^2 -$

$$\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

3.5. Понятие определенного интеграла и его основные свойства

В системе координат xOy рассмотрим плоскую фигуру $ABCD$ (рис. 3.1). Эта фигура называется **криволинейной трапецией**.

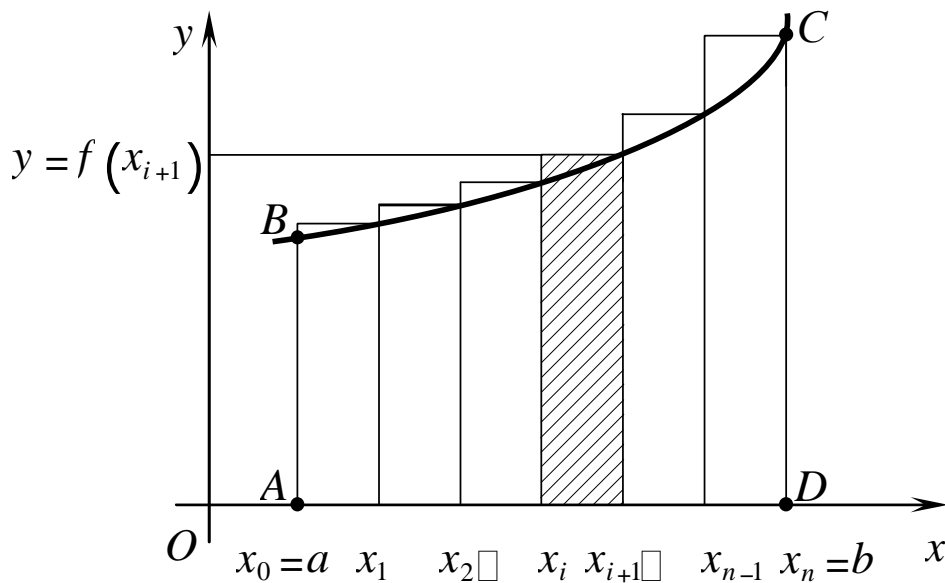


Рисунок – 3.1

Криволинейная трапеция – это фигура, которая ограничена осью Ox , линией $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$.

Любая прямая, параллельная оси Oy , пересекает линию $y = f(x)$ только в одной точке.

Интервал $[a, b]$ оси Ox называется *основанием* криволинейной трапеции. Разделим интервал $[a, b]$ на n отрезков длиной $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. На каждом таком отрезке построим прямоугольник с основанием Δx и высотой $f(x)$. Площадь

$i^{\text{го}}$ прямоугольника равна $f(x_i) \Delta x$, а сумма всех площадей

$$S_n = f(x_0) \Delta x_0 + f(x_1) \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x_{n-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i. \quad (3.14)$$

При $\Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) площадь криволинейной трапеции равна $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. При этом предел не зависит от спосо-

ба деления интервала $[a, b]$ на части. Необходимо только, чтобы наибольший из Δx стремился к нулю.

Тема 4

ТЕОРЕМА

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на

$$[a,b], \text{ существует предел } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i.$$

$\rightarrow 0$

Этот предел не зависит от способа разбиения интервала и от выбора точек разбиения x^i .

Сумма $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \Delta x_i$ называется *интегральной* сум-

мой функции $f(x)$ на $[a,b]$.

3_АПОМНИТЕ

Операция нахождения предела этой суммы называется *интегрированием* функции на интервале. *Предел* интегральной суммы называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на $[a,b]$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx - \text{это определенный интеграл от } a \text{ до}$$

b . Следовательно, площадь криволинейной трапеции

$$S = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.15)$$

где a – нижний предел интегрирования;
 b – верхний предел интегрирования;

$[a,b]$ – интервал интегрирования.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, k - \text{const}.$
2. $\int_a^b [f(x) + \phi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \phi(x) dx.$
3. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$
4. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$
5. $\int_a^b f(x) dx \geq 0,$ если $f(x) \geq 0$ на $[a,b].$
6. $\int_a^a f(x) dx = 0,$ если $a = b.$

3_АПОМНИТЕ

Неопределенный интеграл – это **функция**.

~~Определенный интеграл – это **число**.~~

Для вычисления определенных интегралов применяют основную формулу интегрального исчисления – формулу

Ньютона-Лейбница

Тема 4

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (3.16)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ПРИМЕР 3.18. Вычислить определенный интеграл $\int_2^3 (2x^3 + x^2 - 5)dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем первообразную подынтегральной функции

$$\int (2x^3 + x^2 - 5)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x.$$

Используем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_2^3 (2x^3 + x^2 - 5)dx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5x \right]_2^3$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 3^4}{4} + \frac{3^3}{3} - 5 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2 \cdot 2^4}{4} + \frac{2^3}{3} - 5 \cdot 2 \right) = \frac{203}{6}.$$

ОТВЕТ $\int_2^3 (2x^3 + x^2 - 5)dx = \frac{203}{6}$.

ПРИМЕР 3.19. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем первообразную подынтегральной функции и используем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

ОТВЕТ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1.$

3.6. Методы определенного интегрирования

Правила неопределенного интегрирования можно применить для вычисления определенного интеграла.

ПРИМЕР 3.20. Найти интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $U = 2-x$, а $dV = \sin 3x dx$. Найдем, что $dU = (2-x)' dx = -dx$, а $V = \int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3}$. Используем формулу интегрирования по частям

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx = \left[(2-x) \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) (-dx) =$$

Тема 4

$$= (2-x) \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = -\frac{1}{3} \left[(2-x) \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= -\frac{1}{9} \left[\left(2 - \frac{\pi}{6} \right) 3 \cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} - (2-0) 3 \cos 3 \cdot 0 + \sin 3 \cdot \frac{\pi}{6} - \sin 3 \cdot 0 \right] = -\frac{1}{9} [0 - 23 \cdot + 1 - 0] = 9 \frac{5}{9}$$

$$\frac{\pi}{6}$$

ОТВЕТ. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x) \sin 3x dx = 9 \frac{5}{9}$.

ПРИМЕР 3.21. Вычислить интеграл $\int_1^{e^4} x \ln x dx$.

РЕШЕНИЕ. Обозначим $U = \ln x$, а $dV = \sqrt{x} dx$. Найдем

$$dU = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \text{ и } V = \int dV = \int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x} x.$$

Используем формулу частям

$$\int_1^{e^4} x \ln x dx = \left. \sqrt{x} \ln x \right|_1^{e^4} - \int_1^{e^4} \sqrt{x} dx = \left. \sqrt{x} \ln x \right|_1^{e^4} - \left. \frac{2}{3} \sqrt{x} x \right|_1^{e^4} = \left(e^4 \sqrt{e^4} \ln e^4 - \frac{2}{3} e^4 \sqrt{e^4} \right) - \left(1 \sqrt{1} \ln 1 - \frac{2}{3} \sqrt{1} \cdot 1 \right) = 3 e^4 \sqrt{e^4} - \frac{2}{3} e^4 \sqrt{e^4} - \left(0 - \frac{2}{3} \right) = 3 e^4 \sqrt{e^4} - \frac{2}{3} e^4 \sqrt{e^4} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3} e^4 \sqrt{e^4} + \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[4]{\quad} \quad \sqrt{e^4}$$

ЗАПОМНИТЕ

Если в интервале $[t_1, t_2]$ функция $x = \Psi(t)$ и ее производная $\Psi'(t)$ непрерывны, и $x = \Psi(t)$ не выходит из интервала непрерывности функции $f(x)$, когда t изменяется в интервале $[t_1, t_2]$, а $\Psi(t_1) = x_1, \Psi(t_2) = x_2$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f[\Psi(t)] \Psi'(t) dt. \quad (3.17)$$

$$\frac{2}{3} \frac{22^4}{3} \left(\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \right) \right) = \frac{x}{3} \quad x = e^{-} + \ln e + \ln 1 =$$

$$= \frac{2}{3} e^6 \left(-\frac{2}{3} + 4 \right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{9} (5e^6 + 1).$$

ОТВЕТ. $\int_1^{e^4} \sqrt{x} \ln x dx = \frac{4}{9} (5e^6 + 1).$

Из этой формулы видно, что подынтегральное выражение преобразуется так же, как при замене переменной в неопределенном интеграле. Старые пределы интегрирования x_1 и x_2 связаны с новыми пределами интегрирования

Тема 4

t_1 и t_2 так, как старая переменная x с новой переменной t .

3

ПРИМЕР 3.22. Найти определенный интеграл $\int (2x - 1)^3 dx$.

2

РЕШЕНИЕ. Введем новую переменную $t = 2x - 1$, тогда $dt = 2dx$, откуда $dx = \frac{dt}{2}$. Новые пределы интегрирования будут следующие: 2 при $x_1 = 2$ $t_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$; при $x_2 = 3$ $t_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

$$\int (2x - 1)^3 dx = \int t^3 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4} = 68.$$

3

ОТВЕТ. $\int (2x - 1)^3 dx = 68$.

2

Часто при замене переменной в определенном интеграле используется формула $U = \phi(x)$, при этом новую переменную выражают через старую.

Тогда новые пределы интегрирования U_1 и U_2 определяются по формулам $U_1 = \phi(x_1)$, а $U_2 = \phi(x_2)$.

π

2 $\sin x$

ПРИМЕР 3.23. Найти интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$.

0

РЕШЕНИЕ. Введем новую переменную $U = \cos x$. Тогда $dU = -\sin x dx$, а пределы интегрирования вычисляем так:

$$U_1 = \cos 0 = 1, \quad U_2 = \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Перепишем интеграл с новой переменной и вычислим его

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = \int_1^0 \frac{-dU}{1 + U}$$

ОТВЕТ. $I = \int_1^0 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = 4$.

$$= \int_0^1 \frac{dU}{1+U} = \left. \operatorname{arctg} U \right|_0^1 = 4$$

¹ ОТВЕТ. $\int x^5 dx = 0$.

-1

Тема 4

Можно показать, что определенный интеграл по сим-

ЗАПОМНИТЕ

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) = -f(-x); \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{если } f(x) = f(-x). \end{cases} \quad (3.18)$$

метричному пределу $[-a, a]$ равен нулю, если подынте-

гральная функция нечетная, и равен $2 \int_0^a f(x) dx$, если подынтегральная функция четная.

ПРИМЕР 3.24. Найти интеграл $\int_{-1}^1 x^5 dx$.

РЕШЕНИЕ. Подынтегральная функция нечетная $x^5 = (-x)^5 = -x^5$,

значит $\int_{-1}^1 x^5 dx = 0$.

ПРОВЕРКА. Найдем интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_{-1}^1 x^5 dx = \int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{x^6}{6} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^6}{6} - \frac{(-1)^6}{6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0.$$

ПРИМЕР 3.25. Найти интеграл $\int_{-1}^1 x^4 dx$.

РЕШЕНИЕ. Подынтегральная функция четная $x^4 = (-x)^4 = x^4$, значит

$$-\int_{-1}^1 x^4 dx = 2 \int_0^1 x^4 dx = 2 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

ПРОВЕРКА. Найдем интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница

$$-\int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{1}{5} - \frac{-1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

ОТВЕТ $\int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}.$

3.7. Вычисление площадей плоских фигур, длины дуги плоской кривой, объема тел вращения, площади поверхности вращения

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ Площадь плоской фигуры определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.19)$$

Для того, чтобы найти площадь плоской фигуры, нужно:

- 1) выполнить чертеж;
- 2) найти пределы интегрирования;

Тема 4

3) вычислить площадь по формуле (3.19).

ПРИМЕР 3.26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$\frac{1}{2}x^2$ линией $y = x + 1$, прямыми линиями $x = -2$ и $x = 3$ и осью Ox .

РЕШЕНИЕ

1. Выполним чертеж. Для этого в системе координат xOy построим графики заданных формулами функций. Из рисунка 3.2 мы видим, что необходимо вычислить площадь криволинейной трапеции $ABCDE$.
2. Пределы интегрирования определим как пределы изменения аргумента x . Кривая BCD пересекается с прямой $x = -2$ в точке

$B(-2, 3)$, а с прямой $x = 3$ в точке $D\left(3, 5\frac{1}{2}\right)$. Мы видим, что

минимальное значение аргумент принимает в точке B , где $x = -2$, а максимальное значение – в точке D , где $x = 3$. Значит, нижний предел интегрирования $a = -2$, а верхний предел $b = 3$.

3. Вычислим площадь по формуле

$$S = \int_{ab} f(x) dx = \int_{-2}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + x \right]_{-2}^3 = \left(\frac{1}{6} \cdot 27 + 3 \right) - \left(\frac{1}{6} \cdot (-8) + (-2) \right) = \frac{27}{6} + 3 + \frac{8}{6} - 2 = \frac{35}{6} + 1 = \frac{41}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(27 + 8) + (3 + 2) = \frac{35}{6} + \frac{30}{6} = \frac{65}{6} = 10\frac{5}{6} \text{ кв. ед.}$$

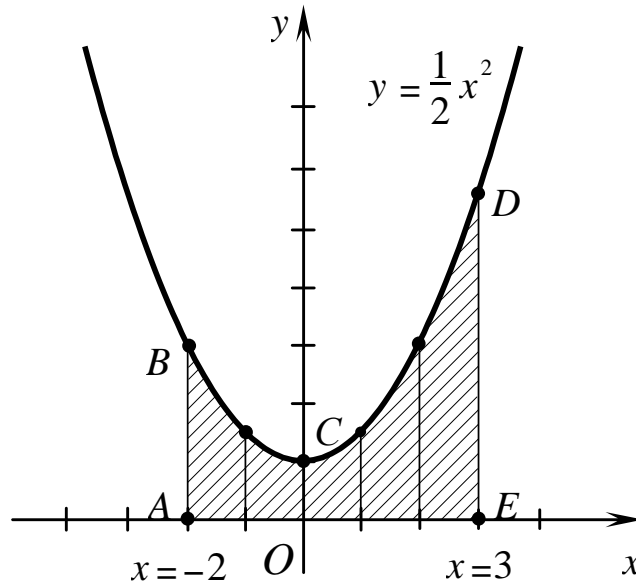


Рисунок – 3.2

1

ОТВЕТ. Площадь криволинейной трапеции равна $10\frac{5}{6}$ квадратных единиц.

ПРИМЕР 3.27. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin x$ и осью Ox на полупериоде изменения аргумента x .

РЕШЕНИЕ. Построим график функции $y = \sin x$ на полупериоде изменения аргумента x . Нам необходимо вычислить площадь криволинейной трапеции OAK (рис. 3.3).

Нижний предел интегрирования $a = 0$, а верхний предел $b = \pi$.

Площадь вычисляем по формуле

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2 \text{ кв. ед.}$$

Тема 4

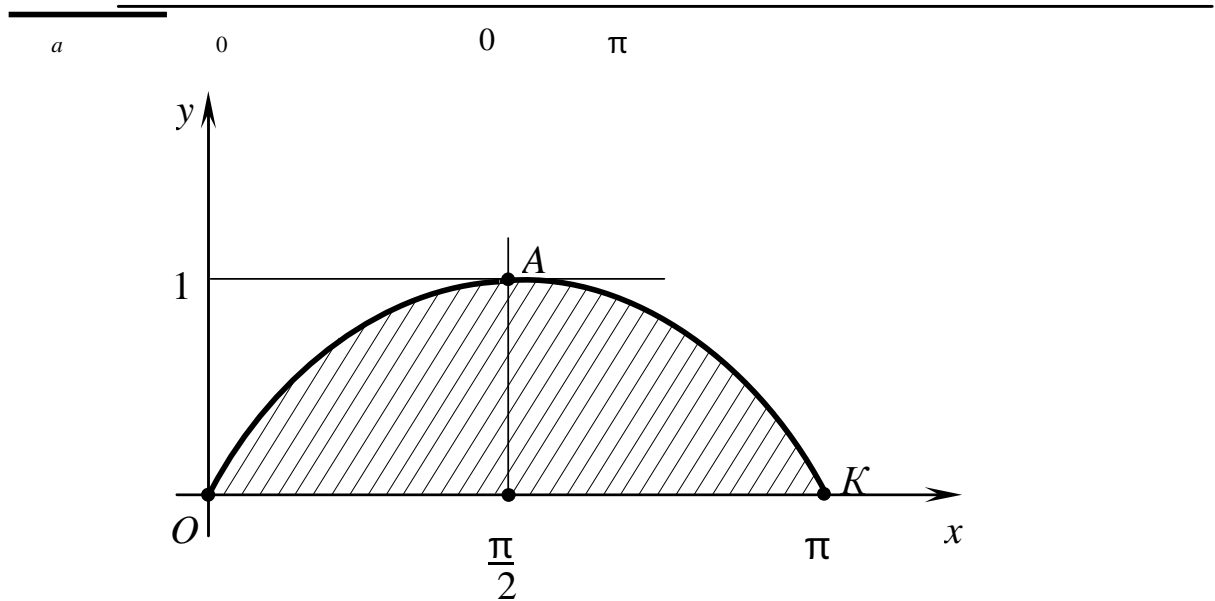


Рисунок – 3.3

ОТВЕТ. Площадь фигуры составляет 2 квадратные единицы.

ПРИМЕР 3.28. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ и прямой } y = x + 1.$$

$$\frac{1}{2}x^2 = x + 1$$

РЕШЕНИЕ. Построим графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = x + 1$.

Необходимо найти площадь криволинейного треугольника ABO (рис. 3.4). Найти пределы интегрирования можно, если решить совместно систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = x + 1; \end{cases} \quad \frac{1}{2}x^2 = x + 1, \text{ откуда } x^2 - x - 2 = 0.$$

Решением этого уравнения будут координаты x точек пересечения графиков функций. Эти координаты равны $x_A = -1$ и $x_B = 2$.

Нижним пределом интегрирования будет $a = -1$, а верхним $b = 2$.

Площадь криволинейного треугольника S_{ABO} будет равна разности площади трапеции S_{KABM} и площади трапеции S_{KAOBM} . $S_{ABO} = S_{KABM} - S_{KAOBM}$. Найдем площадь трапеции $KABM$.

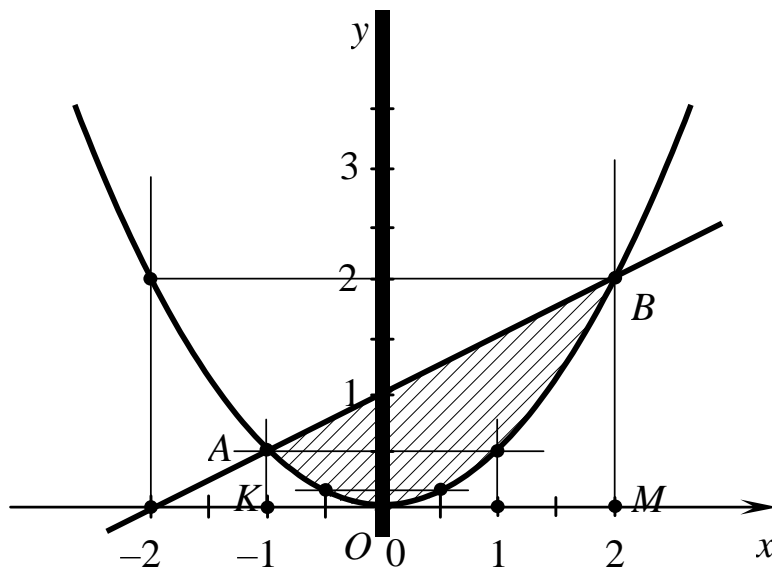
$$S_{KABM} = \frac{AK + BM}{2} \cdot KM = \frac{1 + 2}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2} \text{ кв. ед.}$$

Найдем площадь трапеции $KAOBM$.

$$S_{KAOBM} = \int_{-1}^2 2x \, dx = \left[x^2 \right]_{-1}^2 = 4 - 1 = 3 \text{ кв. ед.}$$

Найдем площадь криволинейного треугольника ABO .

$$S_{ABO} = \frac{15}{2} - 3 = \frac{15 - 6}{2} = \frac{9}{2} \text{ кв. ед.}$$



Тема 4

Рисунок – 3.4

ОТВЕТ. Площадь треугольника ABO равна $\frac{9}{4}$ квадратных единиц.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

↑ Длина кривой линии – это предел, к которому стремится длина ломаной, вписанной в нее (или описанной) при неограниченном увеличении числа ее сторон и при стремлении наибольшей из них к нулю.

В прямоугольной системе координат дифференциал длины линии $y = f(x)$ равен

$$\sqrt{\quad} dl = 1 + (y')^2 dx, \quad (3.20)$$

а длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{(A)}^{(B)} dl = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{1 + (x')^2} dy. \quad (3.21)$$

ПРИМЕР 3.29. Найти длину дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$ между точками $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

РЕШЕНИЕ. По формуле (3.21) длина дуги

$$\int_0^2 \sqrt{\quad} l = \int 1 + (y')^2 dx. \quad (*)$$

Из уравнения окружности найдем, что $y = \sqrt{4 - x^2}$, а производная

$$[2 \sqrt{4-x^2}]' = \frac{1}{2} (4-x^2)^{-1/2} (-2x) = -\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(**) y' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Подставим значение производной (***) в формулу

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}} dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} dx = 2 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

ОТВЕТ. Длина дуги окружности равна π .

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим тело, которое образуется вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 3.5). Любое его плоское сечение, перпендикулярное оси Ox , будет представлять собой круг. Радиус этого круга будет равен ординате кривой $y = f(x)$.

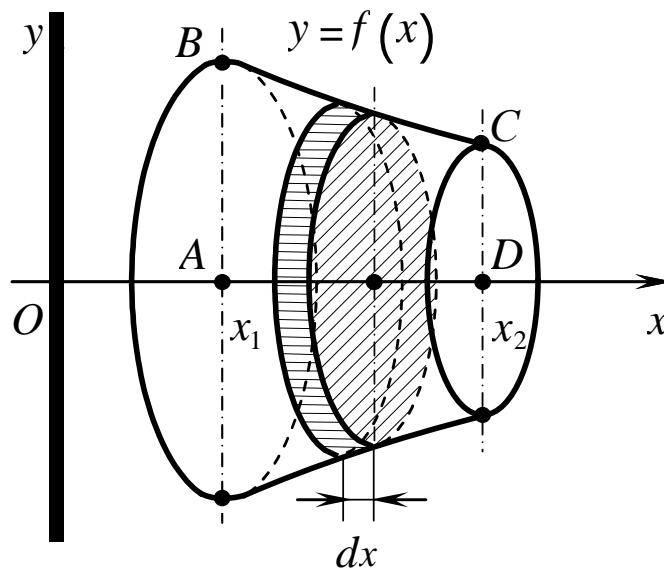


Рисунок – 3.5

Тема 4

Площадь сечения $S(x)$, которое соответствует абсциссе x , будет равна πy^2 . Элементарный объем, который соответствует приращению dx , будет равен объему элементарного цилиндра $dV = \pi y^2 dx$.

Весь объем тела вращения определяется формулой

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2 dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad (x_1 < x_2). \quad (3.22)$$

Если тело получено вращением вокруг оси Oy , то

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 dy = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy \quad (y_1 < y_2). \quad (3.23)$$

ПРИМЕР 3.30. Найти объем тела, которое образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $y^2 = 2px$, $x_1 = a$, $x_2 = b$.

РЕШЕНИЕ. Построим параболу $y^2 = 2px$ и прямые $x_1 = a$ и $x_2 = b$.

При вращении вокруг оси Ox получим часть параболоида вращения.

Объем его будем вычислять по формуле (3.22)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b 2px dx = 2\pi p \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \pi p (b^2 - a^2).$$

ОТВЕТ. $V = \pi p (b^2 - a^2)$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

При вращении вокруг оси Ox дуги плоской кривой, дифференциал площади поверхности записывается как

$$dS = 2\pi y dl = 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Площадь всей поверхности вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3.24)$$

При вращении дуги вокруг оси Oy площадь поверхности равна

$$S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x \sqrt{1 + (x')^2} dy. \quad (3.25)$$

ПРИМЕР 3.31. Найти площадь поверхности, которая получена при вращении дуги кубической параболы $y = x^3$ вокруг оси Ox между прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

РЕШЕНИЕ. При вращении дуги кривой вокруг оси Ox используем формулу (3.24)

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{2}{3}} y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

Для вычисления интеграла введем новую переменную $z = 1 + 9x^4$, тогда $dz = 36x^3 dx$, а пределы интегрирования будут равны $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{25}{9}$.

$$\frac{25}{9} \sqrt{\frac{25}{9}}$$

Тема 4

$$S = 2\pi \int_9^{25} 36z dz = 18\pi \int_9^{25} z dz = 18\pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_9^{25} = 9\pi (25^2 - 9^2) = 9\pi (625 - 81) = 9\pi \cdot 544 = 4896\pi$$

ОТВЕТ. $S = 4896\pi$.

3.8. Несобственные интегралы

3. АПОМНИТЕ

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования или от разрывных функций называются несобственными.

I. Несобственные интегралы с бесконечными пределами определяются при помощи предельного перехода.

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (3.26)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (3.27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

$$\int_c f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x)dx, \quad (3.28)$$

где c – произвольное действительное число.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, +\infty[$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$ называют

не-

собственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty[$ (рис. 3.6).

↑ Если указанный предел существует, то несобственный интеграл называют **сходящимся**. Если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется **расходящимся**.

Так же определяется несобственный интеграл первого рода для промежутка $]-\infty, b]$ (рис. 3.7).

Тема 4

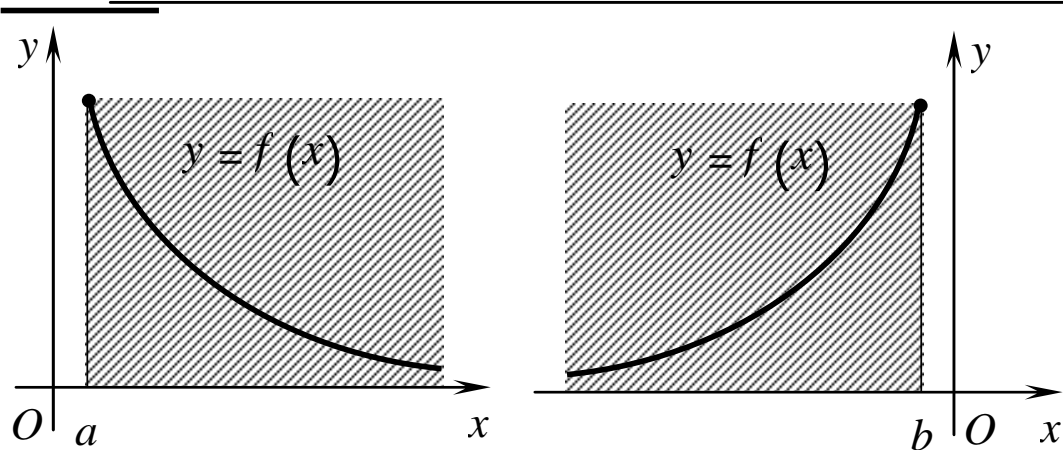


Рисунок – 3.6 Рисунок – 3.7

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $]-\infty, \infty[$, а точка $c \in]-\infty, \infty[$, тогда несобственный интеграл первого рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

сходится, когда оба интеграла $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ и $\int_c^{\infty} f(x) dx$ сходятся. Сумма не зависит от выбора точки c .

II. Несобственные интегралы от функции с бесконечными разрывами также определяются при помощи предельного перехода. Если функция $f(x)$ принадлежит интервалу $[a, b]$, имеет бесконечный разрыв в точке $x = c$, но непрерывна во всех других точках этого интервала, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_a^c f(x)dx, \quad (3.29)$$

Здесь ε_1 и ε_2 изменяются независимо друг от друга.

Интеграл называется *несобственным интегралом второго рода* от функции $f(x)$.

↑ Если предел конечен, то интеграл *сходится*, если бес-

Тема 4

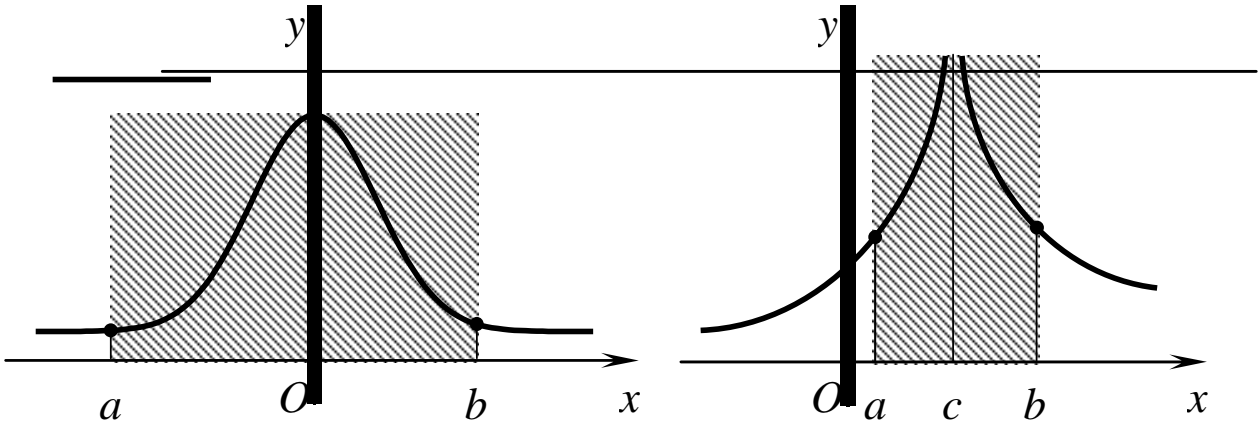


Рисунок – 3.8 Рисунок – 3.9

+∞

ПРИМЕР 3.32. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

РЕШЕНИЕ. По формуле 3.28 имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg x) \Big|_a^b = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg b - \arctg a) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

ОТВЕТ. Данный интеграл сходится и его значение равно π .

+ ∞ ПРИМЕР

3.33. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{\infty} \cos x dx$.

0

РЕШЕНИЕ. По формуле 3.26 имеем

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin x) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b.$$

Этот предел не существует.

ОТВЕТ. Данный интеграл расходится.

∞ ПРИМЕР

3.34. Найти несобственный интеграл $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

РЕШЕНИЕ. По формуле 3.26 имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-b} + e^0 \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^b} \right) = 1.$$

ОТВЕТ. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$.

∞ dx

ПРИМЕР 3.35. Найти несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$.

РЕШЕНИЕ. Используя формулу 3.28, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2 + 1} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg x + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x - \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg x = \arctg(-\infty) + \arctg(\infty) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

∞ dx

Тема 4

ОТВЕТ $\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{x+1} = \pi.$

$$\frac{dx}{x+1}$$

ПРИМЕР 3.36. Найти несобственный интеграл $\int_{-1}^2 \sqrt[3]{(x-1)^2} dx.$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \sqrt[3]{(x-1)^2} dx &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{1-\varepsilon_1} \sqrt[3]{(x-1)^2} dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{1+\varepsilon_2}^2 \sqrt[3]{(x-1)^2} dx = 3 \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left. \sqrt[3]{x-1} \right|_{-1}^{1-\varepsilon_1} + \\ &+ 3 \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left. \sqrt[3]{x-1} \right|_{1+\varepsilon_2}^2 = 3 \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (\sqrt[3]{-\varepsilon_1} - \sqrt[3]{-2}) + 3 \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} (\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\varepsilon_2}) = 3(\sqrt[3]{-2} + 1). \end{aligned}$$

РЕШЕНИЕ. Подынтегральная функция имеет разрыв в точке $x = 1$, поэтому используем формулу 3.29

$$\left. \sqrt[3]{x-1} \right|_{-1}^2 = 3(\sqrt[3]{-2} + 1)$$

ОТВЕТ. $\int_{-1}^2 \sqrt[3]{(x-1)^2} dx = 3(\sqrt[3]{-2} + 1).$

3.9. Экономический смысл определенного интеграла. Использование понятия интеграла в экономике

Интегральное исчисление дает богатый математический аппарат для моделирования и исследования процессов экономики.

Экономический смысл определенного интеграла – это объем произведенной продукции при известной функции производительности труда.

$$U = \int_0^{t_0} y = f(t) dt ,$$

где U – объем произведенной продукции за промежуток времени $[0, t_0]$;

$y = f(t)$ – функция, описывающая производительность труда в момент времени t .

С помощью определенного интеграла оценивают последствия мер экономической политики. При подготовке налоговых реформ рассчитывают изменения потребительских излишков в зависимости от разных вариантов налогообложения.

Рассмотрим примеры определения потребительских излишков. Для этого вспомним некоторые экономические понятия и их обозначения.

1. D (demand) – *спрос на данный товар*. На графике (рис. 3.10 а) кривая спроса показывает связь между ценой p (price) единицы этого товара и q (quantity) – количеством товара по цене p .

Тема 4

2. S (supply) **предложение товара**. Это зависимость между ценой товара и его количеством в данный момент времени. На графике кривая предложения показывает связь между ценой единицы товара p и количеством товара q для продажи по этой цене p .

3. E_0 (equilibrium) – **точка рыночного равновесия**. Состояние равновесия характеризуют такие цена и количество, при которых объем спроса совпадает с величиной предложения (рис. 3.10 б).

4. CS (consumers surplus) – **потребительский излишек**.

Это превышение общей стоимости товара над реальными расходами на его изготовление. Формула потребительского излишка

$$CS = \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0, \quad (3.30)$$

где $f(q)$ – это функция, которая характеризует обратную зависимость между спросом и предложением. Для удобства вычислений рассматривают обратные функции p и q ;

$p_0 q_0$ – параметры рыночного равновесия.

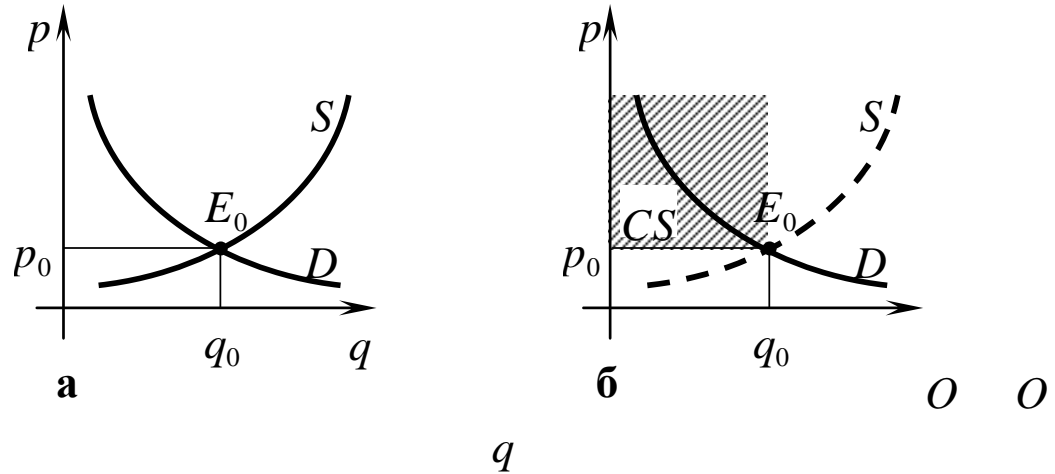


Рисунок – 3.10

ПРИМЕР 3.37. Спрос на товар задан функцией $p = 4 - q^2$, где q – количество товара (в шт.); p – цена единицы товара (в грн.).

Равновесие на рынке будет при $p_0 = q_0 = 1$. Найти величину потребительского излишка.

РЕШЕНИЕ

$$CS = \int_0^{q_0} f(q) dq - p_0 q_0 = \int_0^1 (4 - q^2) dq - 1 \cdot 1 = \left(4q - \frac{1}{3} q^3 \right) \Big|_0^1 - 1 = 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2 \frac{2}{3} \text{ грн.}$$

ОТВЕТ. Величина потребительского излишка будет $2 \frac{2}{3}$ грн.

8000

ПРИМЕР 3.38. Спрос на товар задан функцией $q = 3$, а предложение p данного товара $q = 500p$. Найти величину потребительского излишка.

РЕШЕНИЕ. Сначала определим параметры рыночного равновесия p_0 и q_0 .

Тема 4

Для этого решим систему уравнений.

$$\begin{cases} q = 8000p^3, \\ p^4 = 16, \\ p_0 = 2, \\ q_0 = 1000. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leftrightarrow \\ p \leftrightarrow \\ p \leftrightarrow \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 500p; \\ q = 500p; \\ q = 500p; \end{cases}$$

Найдем функцию, обратную функции $q = 8000p^3$, получим

$$f(q) = \sqrt[3]{\frac{8000}{q}} = 20q^{-\frac{1}{3}}.$$

По формуле вычисления потребительского излишка (3.30)

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{1000} 20q^{-\frac{1}{3}} dq - 2 \cdot 1000 = \left. \frac{3 \cdot 20q^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right|_0^{1000} - 2000 = \\ &= 30 \cdot 1000^{\frac{2}{3}} - 2000 = 1000 \end{aligned}$$

ОТВЕТ. Величина потребительского излишка будет 1000 грн.

В экономике часто используют понятие определенного интеграла для вычисления:

- суммарных экономических эффектов;
- объема производства;
- дополнительной стоимости;
- суммарного общего дохода и т.д.

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 3.39. Вычислить общий доход TR от продажи 1500 единиц продукции, если предельный доход MR от реализации постоянен

Тема 4

11

В нашем случае

$$V = \int_0^3 (2t + 5) dt = \left(2 \frac{t^2}{2} + 5t \right) \Big|_0^3 = 9 + 15 = 24 \text{ единицы продукции.}$$

ОТВЕТ. За три часа рабочего времени рабочий изготовит 24 единицы продукции.

Для решения некоторых задач удобно использовать теорему о среднем значении.

ТЕОРЕМА

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, равен значению подынтегральной функции в некоторой «средней» точке ζ из промежутка интегрирования, умноженному на длину этого промежутка

b

$$\int_a^b f(x) dx = f(\zeta)(b - a), \quad a \leq \zeta \leq b.$$

a

ПРИМЕР 3.41. Найти среднее значение издержек $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от «0» до «3» единиц. Найти объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

b

РЕШЕНИЕ. Из теоремы о среднем значении имеем: $f(\zeta) = b - \frac{1}{a} \int_a^b f(x) dx$.

Найдем среднее значение издержек. В нашей задаче

$$f(\zeta) = \frac{1}{3} \int_0^3 (3x^2 + 4x + 1) dx = \frac{1}{3} \left(3 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{4}{2} x^2 + x \right) \Big|_0^3 =$$

$$\frac{1}{3} (x^3 + 2x^2 + x) \Big|_0^3 = \frac{1}{3} (27 + 18 + 3) = 16 \text{ ден. ед.}$$

Среднее значение издержек равно 16.

Найдем объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение. Решим уравнение $3x^2 + 4x + 1 = 16$ или $3x^2 + 4x - 15 = 0$. Учитывая, что объем продукции не может быть отрицательным, из последнего уравнения получим

$$\frac{7.5x}{3} = \frac{-2 + \sqrt{4 + 45}}{3} = 3$$

т.е. $\zeta = \frac{5}{3}$ единиц продукции.

ОТВЕТ. Среднее значение издержек равно 16 при объеме продукции в $\zeta = \frac{5}{3}$ единиц.

Среднее время t_{cp} , затраченное на изготовление одного изделия в период его освоения, есть определенный интеграл

Тема 4

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx, \quad (3.31)$$

где $t(x)$ – функция изменения затрат времени на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства;

x_1, x_2 – порядковые номера изделия в партии.

При этом, функция изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$ часто имеет вид

$$t = ax^{-b},$$

где a – затраты времени на изготовление первого изделия; b – показатель производственного процесса.

ПРИМЕР 3.42. Найти среднее время, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий.

Считаем, что в формуле (3.31) $a = 600$ мин., $b = 0,5$.

РЕШЕНИЕ. Используя формулу (3.31), получим

$$t_{cp} = \frac{1}{121 - 100} \int_{100}^{121} 600x^{-0,5} dx = \frac{600}{21} \left[2\sqrt{x} \right]_{100}^{121} = 7 \cdot 20 = 140 \approx 57,2 \text{ мин.}$$

ОТВЕТ. $t_{cp} \approx 57,2$ мин.

При решении экономических задач с использованием

b

определенного интеграла $\int f(x)dx$ предполагается, что

a числа a и b – это конечные, определенные числа, а функция $f(x)$ ограничена на интервале $[a,b]$. Иногда при решении экономических задач нужно отказываться от одного или обоих этих условий. Тогда вводятся дополнительные условия для функции $f(x)$.

Однако в экономике иногда возникают проблемы, которые разрешаются без учета некоторых определенных параметров. Это вопросы долгосрочного планирования, привлечения инвестиций и т.д. Для расчетов в таких случаях используют несобственные интегралы. В нашем пособии мы не рассматриваем такие задачи. С задачами такого рода можно ознакомиться в учебных пособиях, приведенных в разделе «Литература» [1], [2], [3].



ОТВЕТЬТЕ НА ВОПРОСЫ

1. Какая функция называется первообразной функции $f(x)$ в интервале $[a,b]$?
2. Сколько первообразных имеет функция, непрерывная в интервале $[a,b]$?
3. Сформулируйте основную задачу интегрального исчисления.
4. Что такое неопределенный интеграл?
5. Чему равны интегралы от функций:

Тема 4

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{x-a}; \quad \text{б) } y = x^n; \quad \text{в) } y = x^{-1}.$$

6. Напишите формулы интегралов основных тригонометрических функций.
7. Напишите подынтегральную функцию, если первообразная ее равна $\operatorname{arctg} x$ или $\operatorname{arcctg} x$.
8. Можно ли вынести постоянный множитель за знак интеграла?
9. Какие основные методы интегрирования вы знаете?
10. Напишите формулу интегрирования по частям.
11. Чему равна площадь криволинейной трапеции?
12. Напишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.
13. Как найти площадь любой плоской фигуры в прямоугольной системе координат?
14. Как найти объем тела при помощи определенного интеграла?
15. Чему равен объем тела вращения?
16. Как найти длину дуги плоской кривой?
17. Какой формулой определяется площадь поверхности вращения?
18. Какой интеграл называется несобственным?
19. Какой экономический смысл определенного интеграла?



ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ I.

Найдите неопределенные интегралы:

$$1) \int x^{2x+2} dx; \quad 2) \int (3x^2 - 2x + 5) dx; \quad 3) \int \left(\frac{x}{x^2} - 2\frac{x}{x^2}\right)^2 dx;$$

$$4) \int e^{3x} x dx; \quad 5) \int (3x + 1)^{100} dx; \quad 6) \int x^2 \ln x dx;$$

$$7) \int \sin 3x dx; \quad 8) \int \cos^2 x dx.$$

II. Вычислите определенные интегралы:

$$1) \int_0^1 e^x \ln x dx; \quad 2) \int_1^8 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx; \quad 3) \int_0^1 e^x \sin(x \ln x) dx$$

$$4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad 5) \int_1^4 (x^2 - 2x + 3) dx; \quad 6) \int_{3x^2+4}^{dx} \frac{dx}{4x+5}.$$

III. Вычислите площади плоских фигур, ограниченных линиями:

Тема 4

- 1) прямой $y = 3 - 2x$ и кривой $y = x^2$;
- 2) кривой $x = 2 - y - y^2$ и осью Oy ;
- 3) кривой $y = 2 - x^2$ и кривой $y^2 = x^2$;
- 4) кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$, и осью Oy ;

- 5) кривой $y = \frac{x^2}{2}$ и прямыми линиями $x = 1$ и $x = 3$.

IV. Найдите объем тела, образованного вращением фигур, ограниченных линиями:

- 1) $y^2 = 6x$ и $x = 5$ вокруг оси Ox ;
- 2) $\frac{x^2 y^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси Oy ;
- 3) $x^2 = 2y$ и $2x + 2y - 3 = 0$ вокруг оси Ox .

V. Найдите длину дуги плоской кривой:

- 1) $y = \sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$;
- 2) $y^2 = x^3$ от начала координат до точки $A(4, 8)$;
- 3) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ от $y = 1$ до $y = e$;
- 4) $y = e^x$ от $A(0, 1)$ до $B(1, e)$.

VI. Найдите площадь поверхности вращения:

- 1) эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$ вокруг оси Oy ;
- 2) дуги окружности $x^2 + (y - 3)^2 = 25$ вокруг оси Oy ,
где $y_1 = 2$, $y_2 = -8$;
- 3) дуги параболы $y^2 = 2x$ между точками пересечения
ее с прямой $2x = 3$ вокруг оси Ox .

VII. Решите задачу с экономическим содержанием.

- 1) Найдите среднее значение издержек $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x меняется от «0» до «3» единиц. Найдите объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение.
- 2) Найдите среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от: $x_1 = 25$ до $x_2 = 36$ изделий, считая, что в формуле $a = 300$ мин., $b = 0,5$.
- 3) Спрос на товар задан функцией $p = 10 - \frac{1}{2}q$,
где q – количество товара (в шт.); p – цена единицы товара (в грн.).

Тема 4

Равновесие на рынке будет при $p_0 = q_0 = 1$. Найдите величину потребительского излишка.

VIII. Найдите несобственные интегралы или исследовать на сходимость:

$$1) \int_0^{+\infty} \cos x dx; \quad 2) \int_1^{\infty} x; \quad 3) \int_1^{+\infty} x^2; \quad 4) \int_1^{\infty} x^{-\alpha}, \text{ где } \alpha \neq 1.$$

Тема 4

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. **ОБОЗНАЧЕНИЕ И ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.**
2. **ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.**
3. **ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.**
4. **ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.**
5. **КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.**

Лексика темы

<i>n</i> -мерное пространство	<i>n</i> -metric measure	n-度量措施
громоздкий	cumbersome	笨重的, 便的
двойной интеграл	double integral	二重积分
замкнутая область	closed area	闭区间
кратные интегралы	multiple integrals	多重积分
линии уровня	level lines	水平线
открытая область	open area	开区间
парабола	parabola	抛物线
поверхность	surface	曲面
полный дифференциал	complete differential	全微分
совокупность	set	合计 总额
тройной интеграл	triple integral	三重积分
фиксировать	to fix	固定
частная производная	partial derivative	偏导数
частный дифференциал	partial differential	偏微分方程
эллипс	ellipse	椭圆形

4.1. Обозначение и область определения функции многих переменных

Переменная U называется *функцией многих переменных* (аргументов) $x, y, z \dots t$, если каждому множеству значений аргументов из области их изменения соответствует определенное значение U .

Функциональная зависимость обозначается как $U = f(x, y, z, \dots, t)$.

Геометрически каждая пара двух переменных x и y определяет положение точки на плоскости, а функция двух переменных $U = f(x, y)$ определяет некоторую **поверхность в пространстве**.

Геометрически совокупность трех переменных x, y, z определяет положение точки в пространстве, а функция трех переменных $U = f(x, y, z)$ определяет множество точек, составляющих некоторое **геометрическое тело**.

Совокупность четырех и большего количества переменных не имеет геометрического изображения.

Для упрощения рассуждений и записей систему значений любого числа n переменных x, y, z, \dots, t называют точкой n -мерного пространства $M(x, y, z, \dots, t)$. Функцию n переменных называют функцией точки n -мерного пространства.

Способы задания функции многих переменных такие же, как и для функции с одной переменной, но имеют особенности.

Аналитический способ отличается только количеством переменных под знаком функции $U = f(x, y, z, \dots, t)$.

Тема 4

Табличный способ становится громоздким. Функцию двух переменных $U = f(x, y)$ задают таблицей-матрицей, в которой каждый элемент имеет два индекса (табл. 4.1).

Таблица 4.1

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_n
x_1	$U_{11} = f(x_1, y_1)$	$U_{12} = f(x_1, y_2)$	$U_{1n} = f(x_1, y_n)$
x_2	$U_{21} = f(x_2, y_1)$	$U_{22} = f(x_2, y_2)$	$U_{2n} = f(x_2, y_n)$
.....
x_n	$U_{n1} = f(x_n, y_1)$	$U_{n2} = f(x_n, y_2)$	$U_{nn} = f(x_n, y_n)$

Если число значений для x и y большое, то таблицу трудно составить. Можно составить систему таблиц, если фиксировать одну из переменных. Тогда для функций двух переменных мы получим набор таблиц 4.2 для различных значений x .

Для $x = x_1$ Таблица 4.2

y	y_1	y_2	y_n
U	$U_{11} = f(x_1, y_1)$	$U_{12} = f(x_1, y_2)$	$U_{1n} = f(x_1, y_n)$

Для $x = x_2$

y	y_1	y_2	y_n
U	$U_{21} = f(x_2, y_1)$	$U_{22} = f(x_2, y_2)$	$U_{2n} = f(x_2, y_n)$

.....

Для $x = x_n$

y	y_1	y_2	y_n
U	$U_{n1} = f(x_n, y_1)$	$U_{n2} = f(x_n, y_2)$	$U_{nn} = f(x_n, y_n)$

Для функций трех переменных $U = f(x, y, z)$ каждому значению одной переменной будет соответствовать таблица значений функции оставшихся независимых переменных. Множество таких таблиц будет описывать функцию.

График функции двух переменных – это поверхность, которая состоит из точек (значений функции) для всех возможных значений независимых переменных (аргументов).

Графически поверхности в пространстве построить сложно. На практике используют принцип фиксирования одной переменной. Получают систему графиков.

Постоянное значение одной из переменных определяет линию в плоскости двух других аргументов. Эти линии называются **линиями уровня**.

Рассмотрим график функции $z = ax^2 + by^2 (a, b > 0)$.

Эта функция будет определять некоторую поверхность в пространстве. Исследуем вид этой поверхности (рис. 4.1).

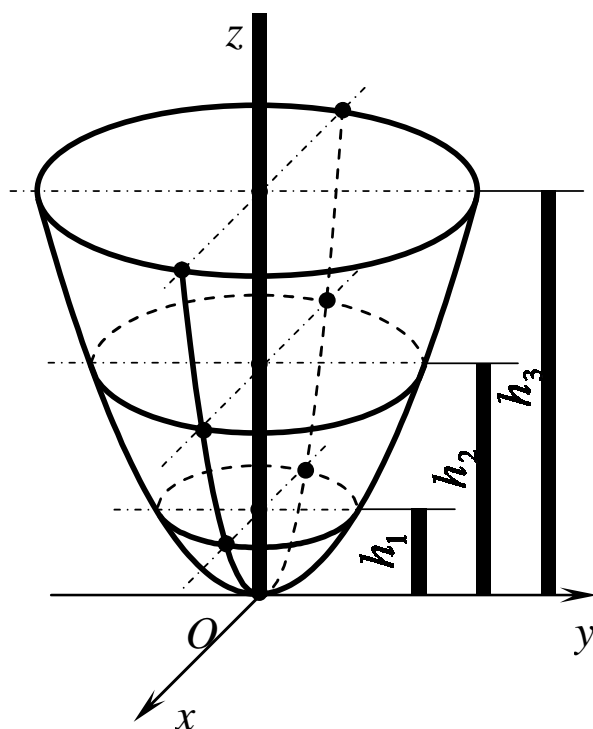


Рисунок – 4.1

График функции пересекается плоскостями, параллельными координатной плоскости xOy . Все точки плоскости, которая проведена на расстоянии h от плоскости xOy , имеют одинаковую координату $z = h$ ($h > 0$).

В пересечении этой плоскости с поверхностью $z = ax^2 + by^2$ ($a, b > 0$) образуется кривая, описанная уравнением $h = ax^2 + by^2$.

Приведем это уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{\frac{h}{a}} + \frac{y^2}{\frac{h}{b}} = 1.$$

Полученное уравнение описывает эллипс с полуосями

$$\sqrt{\frac{h}{a}} \text{ и } \sqrt{\frac{h}{b}}.$$

С увеличением h эллипсы будут подобно увеличиваться до бесконечности. При $z = 0$ эллипс вырождается в точку.

Таким образом, *горизонтальными линиями уровня* для графика данной функции будут эллипсы.

В сечениях графика функции с плоскостями, параллельными плоскости yOz ($x = h$), получается кривая, описанная уравнением

$$z = by^2 + ah^2.$$

Это уравнение параболы, симметричной относительно оси Oz .

Такое же уравнение параболы, симметричной относительно оси Oz , получается при пересечении графика функции плоскостями, параллельными плоскости xOz ($y = h$). В этом случае

$$z = ax^2 + bh^2.$$

Вертикальными линиями уровня для графика функции $z = ax^2 + by^2$ будут параболы.

При $h = 0$ обе параболы имеют вершины в начале координат.

Тема 4

График функции $z = ax^2 + by^2$ ($a, b > 0$) – это эллиптический параболоид (рис. 4.1).

↑ **Областью определения** функции называется совокупность всех точек, в которых функция имеет определенные действительные значения.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ область определения – это некоторая совокупность точек плоскости, а для функции трех переменных $U = F(x, y, z)$ – это совокупность точек пространства.

ПРИМЕР 4.1. Найти область определения функции $z = 2 - x - y$.

РЕШЕНИЕ. Функция z может быть вычислена (определена) при любых значениях x и y . Область определения этой функции есть вся числовая плоскость xOy ($-\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq y \leq \infty$).

Графиком этой функции будет плоскость, которая проходит через точки $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,2)$ (рис. 4.2).

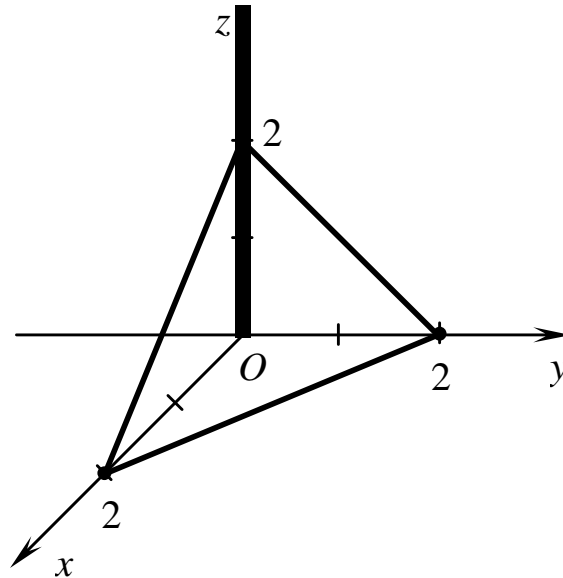


Рисунок – 4.2

ОТВЕТ. Область определения этой функции – это вся числовая плоскость xOy ($-\infty \leq x \leq \infty, -\infty \leq y \leq \infty$).

ПРИМЕР 4.2. Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

РЕШЕНИЕ. Функция будет иметь действительные значения при любых x и y , которые удовлетворяют неравенству $4 - x^2 - y^2 \geq 0$. Поэтому областью определения функции z будет круг радиуса $R = 2$ с центром в начале координат, включая и его границу. Все точки плоскости xOy , которые находятся внутри круга и на его границе, будут удовлетворять данному неравенству. Графиком функции z будет полусфера над плоскостью xOy (рис. 4.3).

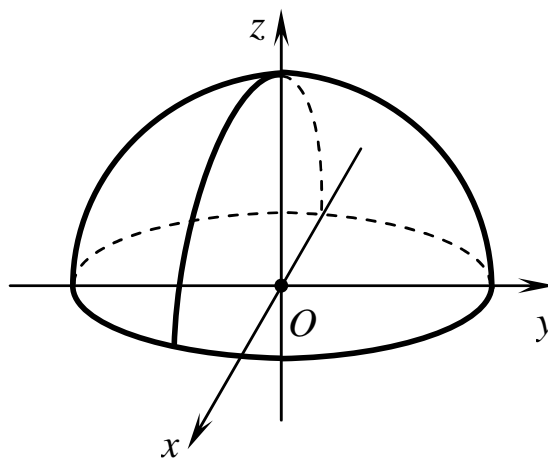


Рисунок – 4.3

Тема 4

ОТВЕТ. Область определения функции z – это круг радиуса $R = 2$ с центром в начале координат, включая и его границу.

Если граница входит в область изменения переменных x и y , то эта область называется **замкнутой**.

Если граница не входит в область изменения переменных, то область называется **открытой**.

ПРИМЕР 4.3. Найти область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{\cdot} \cdot xy}$

РЕШЕНИЕ. Функция будет иметь действительные значения, если $xy > 0$

Областью определения функции z будет часть плоскости xOy , в которой x и y имеют одинаковые знаки. Это первый квадрант плоскости xOy , где $x > 0$, $y > 0$ и третий квадрант, где $x < 0$, $y < 0$. Границами области будут оси координат ($x = 0$, $y = 0$). Границы не могут входить в область определения. Область будет открытой (рис. 4.4).

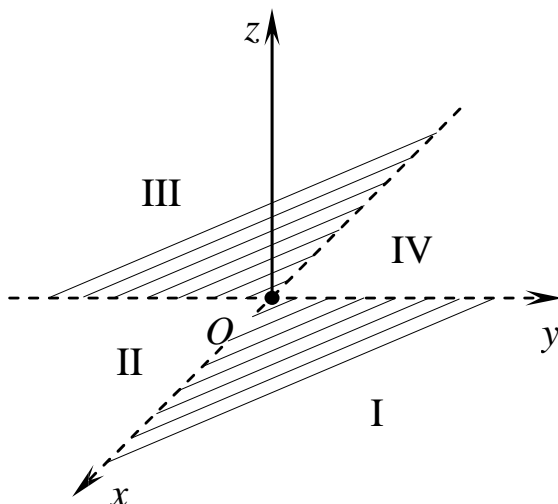


Рисунок –4.4

ОТВЕТ. Область определения функции z – это часть плоскости xOy , в которой x и y имеют одинаковые знаки.

4.2. Частные производные и дифференциалы функций многих переменных

Рассмотрим функцию многих переменных $U = f(x, y, z, \dots, t)$. Если зафиксировать все переменные кроме одной, то U будет функцией одной переменной. Возьмем производные и дифференциалы по известным правилам для одной переменной. Такие производные называются *частными производными*

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta z},$$

.....,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z, \dots, t + \Delta t) - f(x, y, z, \dots, t)}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Тема 4

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

В качестве примера найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

и функции двух переменных $z = x^2 + 3xy - y^2$.

Зафиксируем переменную y , тогда функция z будет зависеть только от одной переменной x . Частную производную по этой переменной запишем так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y.$$

Если не изменяется координата x , тогда функция z зависит только от переменной y . Частная производная по переменной y будет записана так:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 2y.$$

Частным дифференциалом функции $U = f(x, y, z, \dots, t)$ по x называется главная часть частного приращения $\Delta_x U = f(x + \Delta x, y, z, \dots, t) - f(x, y, z, \dots, t)$, линейная относительно приращения Δx .

Аналогично определяют частные дифференциалы функции U по другим ее переменным.

Частные дифференциалы обозначают символом d с индексом, который показывает, по какой переменной идет дифференцирование.

Частный дифференциал $U = f(x, y, z, \square, t)$ по x, y, z, \square, t обозначают соответственно $d_x U, d_y U, d_z U, \square, dU_t$.

На основании определения частных производных можно записать

$$d_x U = \frac{\partial U}{\partial x} dx, d_y U = \frac{\partial U}{\partial y} dy, \square, d_t U = \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (4.2)$$

3. АПОМНИТЕ

Полным дифференциалом функции

$$U = f(x, y, z, \square, t)$$

называется главная часть ее полного приращения

$$\Delta U = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \square, t + \Delta t) -$$

$$f(x, y, z, \square, t), \text{ линейная относительно}$$

приращений $\Delta x, \Delta y, \square, \Delta t$ или dx, dy, \square, dz .

Полный дифференциал dU функции U , (если он существует), равен сумме всех ее частных дифференциалов

$$dU = d_x U + d_y U + d_z U + \square + dU_t =$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \square + \frac{\partial U}{\partial t} dt. \quad (4.3)$$

Тема 4

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

3_ АПОМНИТЕ

Функция $U = f(x, y, z, t)$ называется дифференцируемой в точке, если в этой точке она имеет полный дифференциал.

Чтобы найти полный дифференциал функции $z = 5x^3 y^2$, необходимо:

1) найти частные производные данной функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 15x^2 y^2 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 10x^3 y$$

2) умножить частные производные на дифференциалы соответствующих аргументов и найти частные дифференциалы

$$d_x z = 15x^2 y^2 dx, \quad d_y z = 10x^3 y dy;$$

3) сумма частных дифференциалов и будет полным дифференциалом $dz = d_x z + d_y z = 15x^2 y^2 dx + 10x^3 y dy$.

При малых (по абсолютному значению) приращениях аргументов полное приращение функции можно заменить ее полным дифференциалом

$$\Delta U \approx dU. \quad (4.4)$$

Полный дифференциал функции вычислить легче, чем ее полное приращение, поэтому равенство (4.4) используют для приближенных вычислений.

ПРИМЕР 4.4. Найти приближенно значение функции $U = x^y$ в точке $M_1(1,06; 3,98)$.

РЕШЕНИЕ. Выберем вспомогательную точку $M_0(1, 4)$ и найдем $dx = x_{M_1} - x_{M_0} = 1,06 - 1 = 0,06$; $dy = y_{M_1} - y_{M_0} = 3,98 - 4 = -0,02$.

Найдем значение функции в точке M_1 . Из формулы приращения функции $\Delta U = U(M_1) - U(M_0)$.

$$U(M_1) = U(M_0) + \Delta U.$$

Заменим приращение функции ее полным дифференциалом $\Delta U \approx dU$, тогда

$$U(M_1) = U(M_0) + dU = U(M_0) + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy.$$

Значение функции в точке M_0 будет $U(M_0) = x^4 = 1^4 = 1$. Найдем частные производные функции $U = x^y$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x \ln x.$$

Вычислим их числовые значения в точке $M_0(1, 4)$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{M_0} = 4 \cdot 1^{4-1} = 4 \cdot 1 = 4, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{M_0} = 1 \cdot \ln 1 = 0.$$

Найдем приближенное значение функции $U(M_1)$.

$$U(M_1) = 1,06^{3,98} = 1 + 4 \cdot 0,06 + 0 \cdot (-0,02) = 1,24.$$

ОТВЕТ. $U(M_1) = 1,24$.

Если функция Φ задана через аргументы u, v, \square, w
 $\Phi = F(u, v, \square, w)$, где $u = f(x, y, \square, t)$, $v = \phi(x, y, \square, t)$, \square , $w = \psi(x, y, \square, t)$, то такая функция называется **сложной функцией от независимых переменных** x, y, \square, t .

↑ Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных (x, y, \square, t) равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным переменным (u, v, \square, w), умноженным на частные производные этих аргументов по независимым переменным.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y},$$

.....,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.5)$$

Если все аргументы u, v, w будут функциями только одной независимой переменной x , то и Φ будет сложной функцией одной независимой переменной x . Производная такой сложной функции (по одной независимой) называется **полной производной** и определяется формулой

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{dv}{dx} \quad (4.6)$$

ПРИМЕР 4.5. Найти частные производные сложной функции: 1)

$$\Phi = u^3 e^v, \text{ где } u = \sin x, v = x^3;$$

$$2) Z = u^v, \text{ где } u = \ln(x - y), v = e^y.$$

РЕШЕНИЕ 1

Функции u и v зависят только от одной независимой переменной x (формула 4.6).

Найдем частные производные функции Φ по аргументам u и v .

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{d(u^3 e^v)}{du} = 3u^2 e^v = 3 \sin^2 x \cdot e^{x^3},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{d(u^3 e^v)}{dv} = u^3 e^v = \sin^3 x \cdot e^{x^3}.$$

Найдем частные производные u и v по независимой переменной x

Тема 4

$$\frac{\partial u}{\partial x} d(\sin x) = \cos x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} d(x^3) = 3x^2.$$

Подставим эти значения в формулу 4.6.

Функция Φ есть сложная функция только одной независимой переменной x , поэтому

$$d\Phi = 3\sin^2 x \cdot e^{x^3} \cdot \cos x + x^3 \sin^3 x \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2 = 3e^{x^3} \sin^2 x (\cos x + x^2 \sin x) \cdot dx$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = 3e^{x^3} \sin^2 x (\cos x + x^2 \sin x). \text{ ОТВЕТ 1.} = 3e^{x^3} \sin^2 x (\cos x + x^2 \sin x)$$

РЕШЕНИЕ 2

Функция Z сложная функция двух переменных x и y (формула 4.5).

Найдем частные производные данной функции по переменным u и v .

$$\frac{\partial Z}{\partial u} d(u^v) = v u^{v-1}, \quad \frac{\partial Z}{\partial v} d(u^v) = u \ln u.$$

Найдем частные производные u и v по переменным x и y . $\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial [\ln(x-y)]}{\partial x} = \frac{1}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (e^{xy})}{\partial x} = y e^{xy};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial [\ln(x-y)]}{\partial y} = -\frac{1}{x-y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (e^{xy})}{\partial y} = x e^{xy}.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \nu u^{v-1} \left(\frac{1}{x-y} + u \ln u \left| \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \right| \right),$$

Подставим полученные значения в формулу 4.5.

$$\frac{\partial \partial Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \nu u^{v-1} \left(-\frac{1}{(x-y)^2} \right) + u^v \ln u \left(\frac{x}{y^2} \right) e^{\frac{x}{y}}.$$

$$\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \nu u^{v-1} \left(-\frac{1}{(x-y)^2} \right) + u^v \ln u \left(\frac{x}{y^2} \right) e^{\frac{x}{y}}.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \nu u^{v-1} \left(\frac{1}{x-y} + u \ln u \left| \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \right| \right),$$

ОТВЕТ 2. $\frac{\partial Z}{\partial x} = \nu u^{v-1} \left(\frac{1}{x-y} + u \ln u \left| \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \right| \right),$

$$\frac{\partial \partial Z}{\partial y \partial x} = \nu u^{v-1} \left(-\frac{1}{(x-y)^2} \right) + u^v \ln u \left(\frac{x}{y^2} \right) e^{\frac{x}{y}}.$$

4.3. Экстремум функции многих переменных

Экстремум функции многих переменных определяют так же, как для функции одной переменной.

Значение функции $U = f(x, y, z, \dots, t)$ в точке M_0 называется **максимумом**, если оно является наибольшим, по сравнению с ее значениями во всех точках, достаточно близких к M_0 .

Значение функции $U = f(x, y, z, \dots, t)$ в точке M_0 называется **минимумом**, если оно является наименьшим, по сравнению с ее значениями во всех точках, достаточно близких к M_0 .

Тема 4

Сформулируем *необходимое* и *достаточное* условие экстремума функции многих переменных.

ТЕОРЕМА 1 (Необходимое условие экстремума)

Функция многих переменных $U = f(x, y, z, \dots, t)$ может иметь экстремум только в точках, которые лежат в области определения функции, и все ее частные производные при этом равны нулю.

ТЕОРЕМА 2 (Достаточное условие экстремума)

Точка M_0 будет точкой экстремума функции $U = f(M)$, если во всех точках M , достаточно близких M_0 , приращение функции

$\Delta f = f(M) - f(M_0)$ не изменяет знак.

Если приращение функции всегда остается положительным, то точка M_0 есть точка *минимума* функции.

Если приращение функции всегда остается отрицательным, то точка M_0 есть точка *максимума* функции.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ вместо исследования знака приращения функции можно исследовать каждую критическую точку M_0 , в которой функция дважды дифференцируема.

Пусть в некоторой области, которая содержит точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $U = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, и в точке $M_0(x_0, y_0)$, выполняется необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0,$$

тогда достаточное условие экстремума можно сформулировать так:

1. **Функция имеет максимум**, если

$$\frac{\begin{matrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ и} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0. \end{matrix}}{\partial x^2} \quad (4.7)$$

2. **Функция имеет минимум**, если

$$\frac{\begin{matrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \text{ и} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0. \end{matrix}}{\partial x^2}$$

Тема 4

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y^2 - (\partial x \partial y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$$

$$> 0. \quad (4.8)$$

3. **Функция не имеет ни максимума, ни минимума**, если

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - (\partial x \partial y)^2 < 0. \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - (\partial x \partial y)^2 < 0. \quad (4.9)$$

4. **Функция может иметь или не иметь экстремум** (требуется дополнительное исследование), если

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - (\partial x \partial y)^2 = 0. \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} - (\partial x \partial y)^2 = 0. \quad (4.10)$$

ПРИМЕР 4.6. Найти экстремумы функции $z = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 2$.

РЕШЕНИЕ. Найдем частные производные первого порядка функции z по переменным x и y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x - 2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2(y - 3).$$

Эти производные существуют во всей области определения функции. Найдем координаты точек, в которых эти производные равны нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x - 2) = 0 \text{ или } x = 2.$$

Из условия $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ находим, что 2

$$\frac{\partial z}{\partial y}(y - 3) = 0 \text{ или } y = 3.$$

Из условия $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ находим, что 2

В точке M_0 с координатами $x = 2$ и $y = 3$ первые частные производные по x и y равны нулю. Точка M_0 будет критической точкой функции z .

Найдем вторые производные функции z

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \right) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \right) = 2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| \right) = 0.$$

Проверим выполнение условия достаточности (4.6–4.9)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0.$$

ОТВЕТ. В точке $M_0(2, 3)$ функция имеет минимум.

ПРИМЕР 4.7. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 12xy + 18$.

РЕШЕНИЕ. Найдем частные производные первого порядка функции z по переменным x и y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 12y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 24y^2 - 12x.$$

Тема 4

Производные существуют во всей области определения функции. Найдем координаты точек, в которых эти производные равны нулю. Для этого решим систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x^2 - 12y = 0, \\ 24y - 12x = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений будет две пары чисел $(x_1 = 0, y_1 = 0)$ и $(x_2 = 2, y_2 = 1)$.

Производные обращаются в ноль в двух точках $K_1(0, 0)$ и $K_2(2, 1)$. Найдем частные производные второго порядка и проверим выполнение условий достаточности.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12.$$

В точке $K_1(0, 0)$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \cdot 0 - (-12)^2 = -144 < 0.$$

В точке $K_2(2, 1)$ условие достаточности будет следующим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 12 \cdot 48 - (-12)^2 = 12 \cdot (4 - 1) > 0,$$

где $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12 > 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 48, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12.$

В точке $K_2(2, 1)$ функция имеет минимум.

ОТВЕТ. В точке $K_1(0, 0)$ функция не имеет ни максимума, ни минимума. В точке $K_2(2, 1)$ функция имеет минимум.

Функция $f(M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D , обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения будут или в точках экстремума внутри области определения или в точках, которые лежат на границе области.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(M)$ в ограниченной замкнутой области D , где

функция непрерывна, необходимо:

- найти критические точки, которые лежат внутри области D и вычислить значения функции в этих точках;
- найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе;
- сравнить полученные значения функции: самое большое значение функции будет наибольшим значением, а самое маленькое будет наименьшим значением функции во всей области.

ПРИМЕР 4.8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 + 12$ в области D , ограниченной кривой $x^2 + y^2 \leq 4$.

РЕШЕНИЕ. Найдем критические точки функции z , которые лежат в области D и вычислим ее значения в этих точках. С этой целью найдем частные производные первого порядка от z по x и y

Тема 4

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

Из условия $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ найдем, что критическая точка у этой

функции всего одна, и она имеет координаты $x = 0$ и $y = 0$ $\{K(0,0)\}$.

Значение функции z в этой точке $z(K) = 12$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе области D . Для этого из уравнения $x^2 + y^2 = 4$ найдем $y^2 = -x^2 + 4$ и подставим это значение в выражение функции z

$$z = x^2 + x^2 - 4 + 12 = 2x^2 + 8.$$

Полученная функция зависит от одной переменной x и изменяется на отрезке $[-2, 2]$. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции z :

- найдем критические точки функции $z = 2x^2 + 8$ и вычислим значение функции в этих точках. Найдем первую производную этой функции $z' = 4x$. Из условия $z' = 0$ находим, что критическая точка $x = 0$ лежит внутри интервала $[-2, 2]$. Вычислим значение функции в этой точке $z(0) = 8$;
- вычислим значение функции на концах интервала $[-2, 2]$ $z(-2) = z(2) = 16$;
- сравнивая значение функции на концах отрезка и во внутренней критической точке, делаем вывод, что наибольшее значение $z = 16$ функция достигает на границе области $x^2 + y^2 = 4$, а наименьшее $z = 8$ в точке $x = 0$.

Сравним значение z во внутренней точке $K(0,0)$ с ее наибольшим и наименьшим значениями на границе области. Наибольшее значение $z = 16$ функция достигает на границе $x^2 + y^2 = 4$ в точках $A_1(2,0)$ и $A_2(-2,0)$, а наименьшее значение $z = 8$ будет так же на границе в точках $A_3(0, -2)$ и $A_4(0, 2)$. Ординаты точек A_1, A_2, A_3, A_4 вычислены по известным абсциссам из уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

ОТВЕТ. Наибольшее значение $z = 16$ функция достигает в точках

$A_1(2,0)$ и $A_2(-2,0)$ Наименьшее значение $z = 8$ функция достигает в точках $A_3(0, -2)$ и $A_4(0,2)$.

4.4. Экстремум функций двух переменных

В экономике часто требуется найти наилучшее или оптимальное значение различных показателей:

- максимальной производительности труда;
- максимальной прибыли;
- максимального выпуска продукции; –
- минимальных издержек и т.д.

Экономические показатели зависят от многих факторов. Для решения таких задач используют функции многих переменных. Например, выпуск продукции рассматривают как функцию затрат труда и капитала. Каждый показатель представляет собой функцию одной или нескольких переменных.

Рассмотрим пример на определение экстремумов функций двух переменных для нахождения наибольшей возможной прибыли фирмы.

Тема 4

ПРИМЕР 4.9. Фирма производит товары X и Y в количествах x и y и продает их по ценам $p_x = 6$, $p_y = 10$. Функция издержек производства фирмы имеет вид $MC = x^2 + 2xy + 2y^2 + 5$. Найти наибольшую возможную прибыль фирмы (MPf_{\max}).

РЕШЕНИЕ. Запишем, функцию максимума прибыли, как разность между доходами от продаж $p_x x + p_y y$ и издержками MC

$$MPf_{\max} = p_x x + p_y y - MC = 6x + 10y - x^2 - 2xy - 2y^2 - 5.$$

Чтобы определить MPf_{\max} , нужно найти наибольшее значение из всех локальных максимумов внутри области определения функции $\Delta(MPf)$ и на ее границах. Областью определения функции

MPf будет $\Delta(MPf) : x \geq 0, y \geq 0$.

Запишем необходимое условие максимума прибыли в нашем примере $MC_x = p_x, MC_y = p_y$.

Найдем предельные издержки

$$MC_x = \frac{\partial MC}{\partial x} = 2x + 2y, \quad MC_y = \frac{\partial MC}{\partial y} = 2x + 4y.$$

Из этого условия получим систему уравнений. Решим ее.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6, \\ 2x + 4y = 10, \end{cases} \leftrightarrow x = 1, y = 2.$$

Проверим достаточное условие экстремума в критической точке $x = 1, y = 2$ (или проверим, обеспечивают ли найденные значения x и y максимум прибыли). Так как

$$\frac{\partial^2 MPf}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 MPf}{\partial y^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 MPf}{\partial x \partial y} = -2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 MPf}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 MPf}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 MPf}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 MPf}{\partial y^2} \end{vmatrix} \Bigg|_{x=1, y=2} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-4) - (-2) \cdot (-2) = 4 > 0.$$

В точке $x = 1, y = 2$ есть локальный экстремум. Так как

$$\frac{\partial^2 MPf}{\partial x^2} \Bigg|_{x=1, y=2} = -2 < 0,$$

то это максимум. Значение прибыли в этой точке

$$MPf_{\max} = 6 \cdot 1 + 10 \cdot 2 - 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 5 = 8.$$

Теперь исследуем функцию прибыли на границах ее области определения при $x = 0, y = 0, x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.

Если $x = 0$, то

$$MPf^* = 10y - 2y^2 - 5.$$

Найдем критические точки этой функции, в которой $dMPf^* = 0$. Так как $dMPf^* = 10 - 4y$, то $10 - 4y = 0$. Критическая точка будет $y = 2,5$.

Значение прибыли в критической точке $y = 2,5$ на границах области определения $y = 0$ и $y \rightarrow \infty$ равны соответственно

$$MPf^*_{y=2,5} = 7,5; MPf^*_{y=0} = -5; \lim_{y \rightarrow \infty} MPf^* = -\infty.$$

Следовательно, максимум функции $MR^* = 7,5$.

Тема 4

Если $y = 0$, то функция будет $MPf^{**} = 6x - x^2 - 5$. Найдем критические точки этой функции, в которых $dMPf^* = 0$. Так как

$$\overline{dMPf^*}$$

$= 6 - 2x$, то $6 - 2x = 0$. Критическая точка будет $x = 3$.

x

Определим значение функции прибыли в критической точке $x = 3$ и на границах области определения $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$.

$$MPf^{**} x = 3 = 4, \quad \left| \quad MPf^{**} x \right|_{x=0} = -5, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} MPf^{**} = -\infty.$$

Следовательно, максимум функции

$$MPf_{\max}^{**} = 4.$$

Если $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} MPf^{**} = -\infty$, $\lim_{y \rightarrow \infty} MPf^{**} = -\infty$ при любом конечном y .

Наибольшее значение функции прибыли на границах ее области определения равно 7,5. Это меньше, чем внутренний локальный максимум функции, равный 8. Тогда, наибольшее возможное значение прибыли совпадает с локальным максимумом и равно 8.

ОТВЕТ. Наибольшая возможная прибыль $MPf_{\max} = 8$.

4.5. Кратные интегралы

Рассмотрим в пространстве конечную область Ω . В каждой точке M этой области функция $U = f(M)$ принимает конечные значения. Разобьем область Ω на маленькие области $\Delta\Omega_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) и в каждой из этих маленьких

областей произвольно выберем точки $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ соответственно $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^n U_i \Delta\Omega_i = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i.$$

Найдем предел этой суммы, если n (количество областей разбиения) будет стремиться к бесконечности, а диаметр области $\Delta\Omega_i$, бесконечно уменьшаясь, стремится к нулю.

Такой предел называется объемным интегралом от функции f по области Ω

$$\int_{(\Omega)} U d\Omega = \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\Omega_i. \quad (4.11)$$

Разобьем область интегрирования D ($ABCA$) (рис. 4.5) в плоской прямоугольной системе координат xOy на частичные области прямыми, параллельными осям Ox и Oy . Тогда площадь частичной области будет $dS = dx dy$, и интеграл (4.11) запишется в виде

$$\int \int_D f(M) dS = \int \int_D f(x, y) dx dy. \quad (4.12)$$

Такой интеграл называется двойным интегралом от функции $f(M)$ по области D .

Тема 4

Если область D такая, что любая прямая, параллельная оси Oy , пересекает ее границу в двух точках (рис. 4.5), то $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ при $a \leq x \leq b$. В этом случае двойной интеграл можно записать так:

$$\int_D \int_a^{\phi_2(x)} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (4.12)$$

Вначале интегрирование выполняется по y в пределах от $y_1 = \phi_1(x)$ до $y_2 = \phi_2(x)$. Здесь $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ – это границы изменения y при постоянном произвольном значении x .

После этого интегрирование выполняется по x в пределах от $x_1 = a$ до $x_2 = b$. Здесь x_1 и x_2 являются наименьшим и

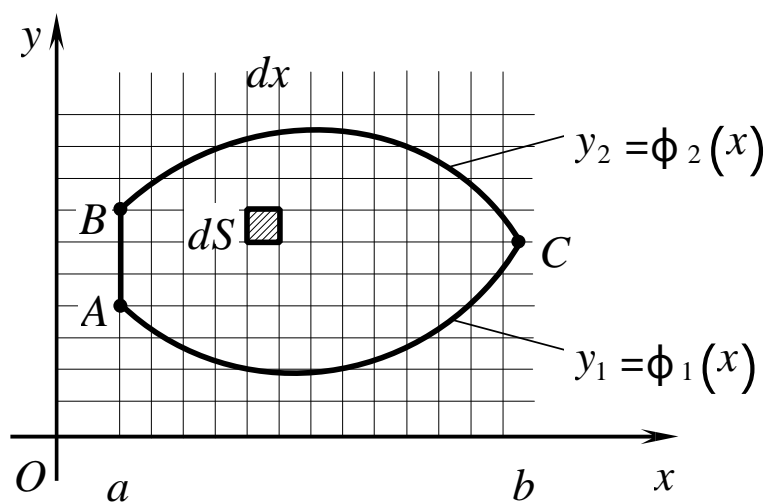


Рисунок – 4.5

наибольшим значениями x во всей области D .

Если нижняя или верхняя границы состоят из нескольких участков, которые имеют различные уравнения,

то вычисление двойного интеграла сводится к вычислению суммы двух двойных интегралов (рис. 4.6).

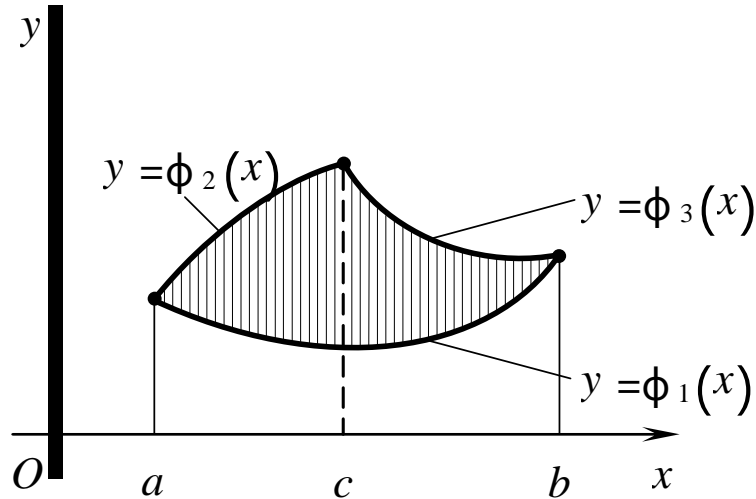


Рисунок – 4.6

Таким образом, двойной интеграл вычисляют так:

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_a^c dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy + \int_c^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_3(x)} f(x, y) dy . \quad (4.14)$$

$$D \quad a \quad \phi_1(x) \quad c \quad \phi_1(x)$$

Если область D такая, что любая прямая, параллельная оси Ox пересекает ее границы в двух точках (рис. 4.7), то

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx . \quad (4.15)$$

$$D \quad c \quad \phi_1(x)$$

Тема 4

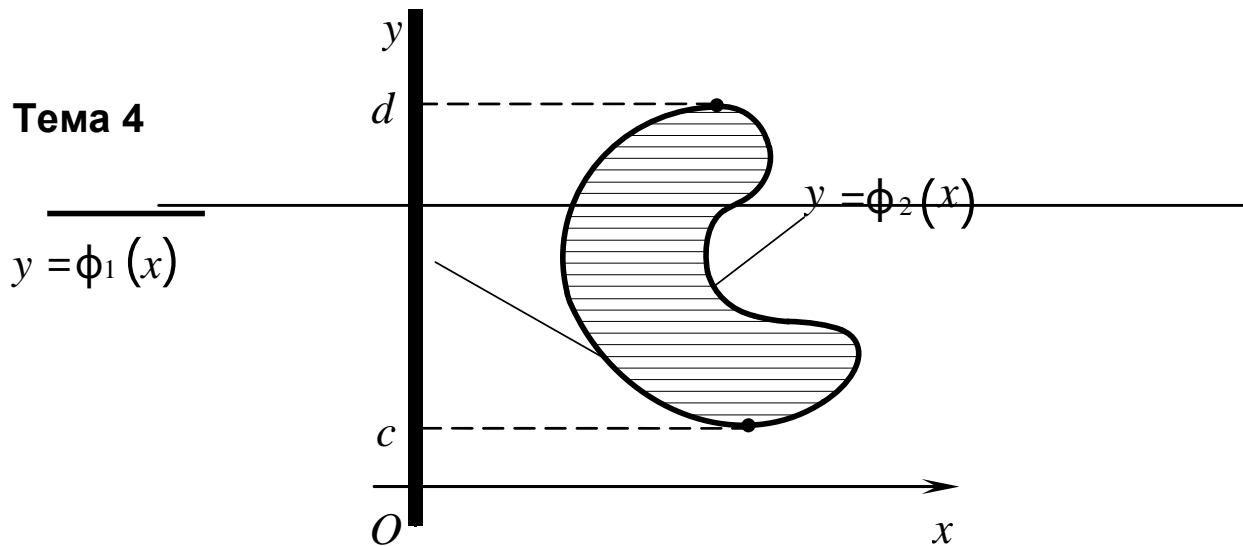


Рисунок -4.7

Здесь интегрирование ведется в другом порядке. Пределы внутреннего интеграла указывают изменение x при постоянном произвольном значении y , а пределы внешнего интеграла указывают наименьшее и наибольшее значения y в области D .

Пределы внешнего интеграла всегда постоянны, а пределы внутреннего интеграла переменны и зависят от переменной, которая рассматривается как постоянная.

ПРИМЕР 4.9. Вычислить двойной интеграл $I_1 = \int dx \int (x - 2y + 3) dy$.

РЕШЕНИЕ.

2 x

1 2 x

Вычисляем внутренний интеграл

$$\int (x - 2y + 3) dy = x \left[\frac{y}{1} - 2 \frac{y^2}{2} \right] = xy - y^2 + 3y = x \left(x - 2 \frac{x}{2} \right) - x^2 + \frac{x}{4} + 3x - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}x - \frac{x}{4}$$

2x22

Вычисляем внешний интеграл

$$\int_{12} (23x - x4_2) dx = 43 \quad x212 - 12x31 2 = 94 - 127 =$$

$$1220 = 53 .$$

ОТВЕТ $\int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^x (x - 2y + 3) dy = \frac{5}{3}$.

Пример 4.10. Вычислить двойной интеграл $I_2 = \int_0^2 dy \int_0^3 (x - 2y + 3) dx$.

РЕШЕНИЕ. Вычисляем внутренний интеграл

$$\int_0^3 (x - 2y + 3) dx = \left. \frac{x^2}{2} - 2yx + 3x \right|_0^3 = \frac{9}{2} - 6y + 9 = \frac{3}{2}(y^2 - 6y) .$$

Вычисляем внешний интеграл

$$\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}y^2 + 3y \right) dy = -\frac{3}{2} \cdot \left. \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right|_0^2 = -\frac{1}{2} (27 - 8) + \frac{3}{2} (9 - 4) = -\frac{19}{2} + \frac{15}{2} = -2 .$$

ОТВЕТ. $\int_0^2 dy \int_0^3 (x - 2y + 3) dx = -2$.

Пример 4.4. Вычислить двойной интеграл $\iint_D xy dx dy$, если область D

Тема 4

D есть прямоугольник, ограниченный линиями $x = a, x = b, y = c, y = d$.

РЕШЕНИЕ. Построим данные линии (рис. 4.8). Областью интегрирования D будет прямоугольник $ABCD$, стороны которого параллельны осям координат.

В области интегрирования переменная y изменяется от c до d , а переменная x от a до b . Интегрируя вначале по x , а потом по y , получим

$$\int_c^d \int_a^b y dx = \int_a^b \int_c^d y dy = \frac{1}{2} (b-a)(d^2 - c^2) = \frac{1}{2} (d^2 - c^2)(b-a)$$

Интегрируя в другом порядке – вначале по y , а затем по x , получим тот же результат

$$\int_a^b \int_c^d x dy = \int_c^d \int_a^b x dx = \frac{1}{2} (d^2 - c^2)(b-a) = \frac{1}{2} (d^2 - c^2)(b-a)$$

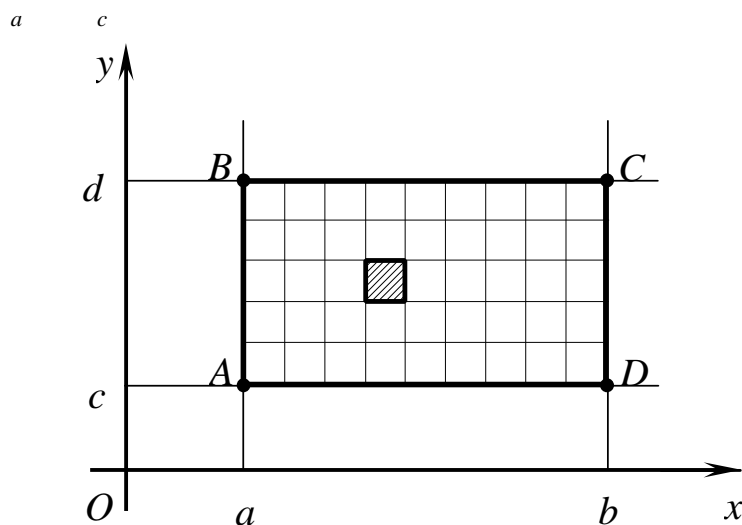


Рисунок – 4.8

$$\text{ОТВЕТ. } \int \int_{\substack{a < x < b \\ c < y < d}} xy dx dy = \frac{(b_2 - a_2)(d_2 - c_2)}{4}.$$

При помощи двойного интеграла можно вычислять: 1) площадь плоской области D , которая равна $S = \int \int_D dS$,

– в прямоугольной системе координат

$$dS = dx dy \text{ и } S = \int \int_D dx dy; \quad (4.16)$$

– в полярных координатах

$$dS = \rho d\phi d\rho \text{ и } S = \int \int_D \rho d\phi d\rho; \quad (4.17)$$

2) объем вертикального цилиндрического тела с основанием D на плоскости xOy и ограниченного сверху поверхностью $Z = f(x, y)$

$$V = \int \int_D Z dx dy. \quad (4.18)$$

Объемы тел более сложной формы вычисляют при помощи алгебраической суммы объемов нескольких вертикальных цилиндрических тел;

Тема 4

- 3) массы плоской фигуры (материальной пластины), которая занимает область D и имеет поверхностную плотность в точке, $M(x, y)$ равную $\delta(M)$

$$m = \int \int_D \delta(M) dx dy; \quad (4.19)$$

- 4) статические моменты инерции плоской фигуры относительно осей Ox и Oy

$$m_x = \int \int_D y \delta dx dy, \quad m_y = \int \int_D x \delta dx dy; \quad (4.20)$$

- 5) координаты центра тяжести плоской фигуры

$$x_c = \frac{m_y}{m} = \frac{\int \int_D x \delta dx dy}{\int \int_D \delta dx dy}, \quad y_c = \frac{m_x}{m} = \frac{\int \int_D y \delta dx dy}{\int \int_D \delta dx dy} \quad (4.21)$$

Рассмотрим решение задач с использованием двойных интегралов.

ПРИМЕР 4.12. Найти площадь области D , ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{2}x + 1, \quad x = -2, \quad x = 3, \quad y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Выполним чертеж. В системе координат xOy построим графики заданных линий (рис. 4.9).

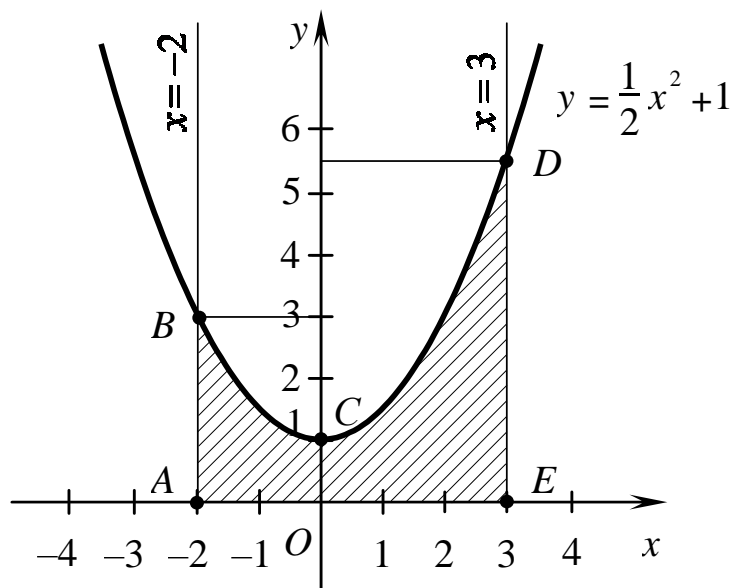


Рисунок – 4.9

Из рисунка видно, что необходимо вычислить площадь криволинейной трапеции $ABCDE$.

В заданной области переменная x изменяется от -2 до 3 , а переменная y от 0 до $y = x^2 + 1$.

Площадь области D вычисляем при помощи двойного интеграла (4.16)

$$S = \int_{-2}^3 \int_0^{x^2 + 1} dx dy = \int_{-2}^3 dx \int_0^{x^2 + 1} dy = \int_{-2}^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^3 = \frac{27}{3} + 3 - \left(\frac{-8}{3} - 2 \right) = 9 + 3 + \frac{8}{3} + 2 = \frac{27}{3} + \frac{8}{3} + \frac{6}{3} + \frac{6}{3} = \frac{43}{3} \text{ кв.ед.}$$

ОТВЕТ. Площадь области D равна $\frac{65}{6}$ кв.ед.

Тема 4

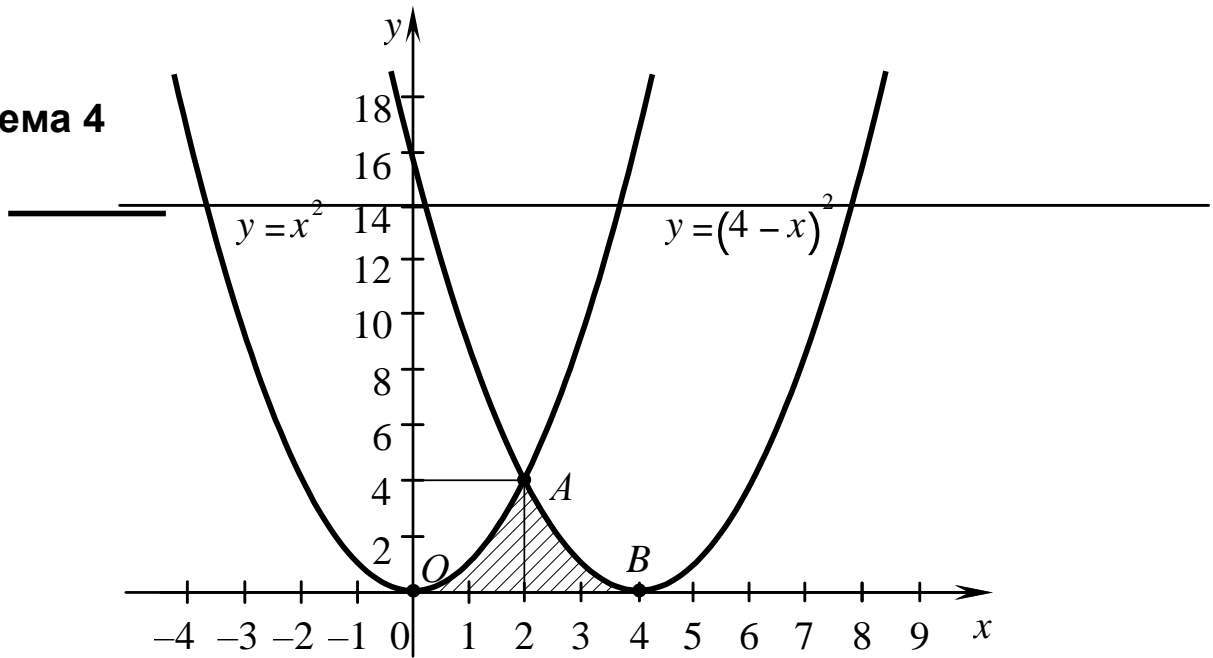


Рисунок – 4.10

ПРИМЕР 4.13. Найти площадь области D , ограниченной кривыми линиями $y = x^2$ и $y = (4 - x)^2$.

РЕШЕНИЕ. Построим данные параболы (рис. 4.10).

Найдем координаты точки пересечения этих кривых (точка A) и координаты точек пересечения кривых с осью Ox (точки O и B). Координаты точки A определим, решая совместно уравнения $y = x^2$ и $y = (4 - x)^2$. Из равенства ординат $x^2 = (4 - x)^2$ следует $x^2 = 16 - 8x + x^2$. Решением этого уравнения будет $x = 2$. При $x_A = 2$ значение функции $y_A = 4$.

Из графика видно, что точка O имеет координаты $x_O = 0$ и $y_O = 0$, точка B имеет координаты $x_B = 4$, $y_B = 0$ (рис. 4.10).

В области D переменная y меняется от 0 до 4, а переменная x меняется от $x = \sqrt{y}$ до $x = 4 - \sqrt{y}$.

Площадь области D равна

двойному интегралу от $dx dy$

$$S = \int_D \int dx dy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{4-\sqrt{y}} dx = \int_0^4 (4 - \sqrt{y} - \sqrt{y}) dy = \int_0^4 (4 - 2\sqrt{y}) dy =$$

$$= 2 \int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy = 2 [2y - \frac{2}{3} y^{3/2}]_0^4 = 2 [8 - \frac{16}{3}] = \frac{32}{3} \text{ кв.ед.}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & |0| & || & 3|| & 3 \\ & & & | & 2 & | \end{array}$$

32 ОТВЕТ.

Площадь области D равна кв.ед.
3

ПРИМЕР 4.14. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $(x - 3)^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 10$.

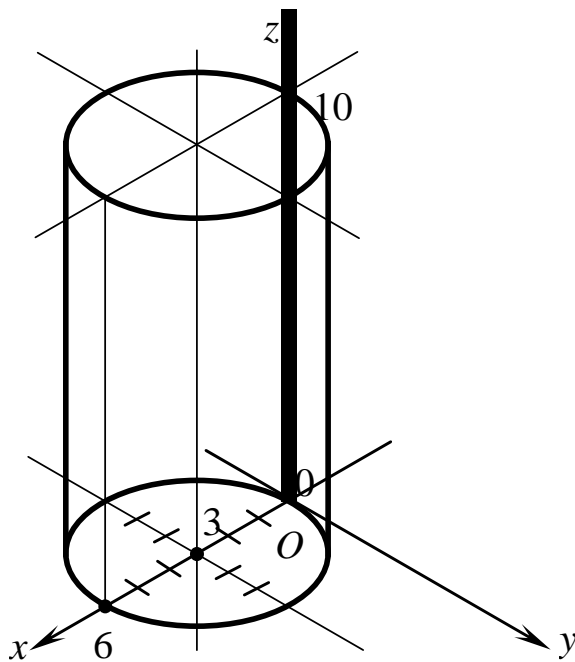


Рисунок – 4.11

РЕШЕНИЕ. Данное тело представляет собой прямой круговой цилиндр, нижнее основание которого лежит на плоскости xOy , и высота цилиндра равна 10 (рис. 4.11). Из курса геометрии мы знаем, что объем такого цилиндра равен $V = \pi R^2 \cdot h$, где R – радиус основания, h – высота цилиндра; тогда $V = \pi \cdot (3)^2 \cdot 10 = 90\pi$. Найдем объем цилиндра по формуле

4.18, где $V = \int \int_D z dx dy$.

Для вычисления объема необходимо найти пределы изменения переменных x и y . Областью изменения этих переменных будет круг

Тема 4

радиуса $R = 3$, который описан уравнением $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. В этом уравнении удобнее выразить y через x .

$$y^2 = 9 - (x - 3)^2 \text{ или } y = \sqrt{9 - x^2 + 6x - 9} = \sqrt{6x - x^2}.$$

Тогда x будет изменяться от 0 до 6, а y от $-\sqrt{6x - x^2}$ до $+\sqrt{6x - x^2}$. Объем вычислять через интеграл

$$V = \int_0^6 \int_{-\sqrt{6x-x^2}}^{\sqrt{6x-x^2}} 10 dy dx = \int_0^6 2\sqrt{6x-x^2} dx = 20 \int_0^6 \sqrt{6x-x^2} dx.$$

МОЖНО ДВОЙНОЙ

$$= 10 \int_0^6 2\sqrt{6x-x^2} dx = 20 \int_0^6 \sqrt{6x-x^2} dx$$

Полученный интеграл вычислим методом замены переменной. Новая переменная t связана с переменной x так $x = 6\sin^2 t$.

Выражение для дифференциала dx будет таким

$$dx = 6 \cdot 2\sin t \cos t dt = 6\sin 2t dt.$$

Подынтегральная функция будет иметь вид

$$\sqrt{6x - x^2} = \sqrt{36\sin^2 t - 36\sin^4 t} = 6\sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 6\sin t \cos t = 3\sin 2t.$$

Пределы интегрирования так же изменятся

$$\text{при } x = 0 \quad 6\sin^2 t = 0 \rightarrow \sin t = 0 \rightarrow t = 0;$$

$$6 \rightarrow \sin t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

2

Интеграл с новой переменной запишется так:

$$214 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{6x - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 2t \cdot 6\sin 2t dt = 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt$$

$$\begin{aligned}
 20 \int_0^{\pi/2} 6x - x^2 dx &= 20 \int_0^{\pi/2} 3 \sin 2t \cdot 6 \sin 2t dt = 360 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = 360 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \\
 (1 - \cos 4t) dt &= \\
 &= 180 \left[t - \frac{1}{4} \cos 4t \right]_0^{\pi/2} = 180 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cos 2\pi - 0 + \frac{1}{4} \cos 0 \right) = \\
 &= 180 \left(\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{4} \right) = 180 \frac{\pi}{2} = 90\pi.
 \end{aligned}$$

ОТВЕТ. Объем тела $V = 90\pi$.

Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$, распространенным на область V , называется предел трехкратной суммы

$$\begin{aligned}
 &\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\
 &= \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_j \rightarrow 0 \\ \max \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k. \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех однократных интегралов или к вычислению одного двойного и одного однократного интегралов.

Тема 4

ПРИМЕР 4.15. Вычислить интеграл $I = \int \int \int_V x^3 y^2 z dx dy dz$, где область

V определяется неравенствами $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy$.

РЕШЕНИЕ. Из условия определения области интегрирования расставим пределы интегрирования по переменным x, y и z

$$I = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x^3 y^2 z dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz.$$

Возьмем внутренний однократный интеграл

$$I = \int_0^1 \int_0^x x y z dz = x y \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{xy} = \frac{x^3 y^3}{2} \quad \text{и} \quad I = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{y^5}{5} dy.$$

Возьмем внутренний интеграл $I_2 = \int_0^x \frac{y^5}{5} dy = \frac{y^6}{30} \Big|_0^x = \frac{x^6}{30}$.

Наш тройной интеграл сводится к однократному интегралу

$$I = \int_0^1 \frac{x^6}{30} dx = \frac{1}{30} \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{210}.$$

Мы последовательно вычислили три однократных интеграла.

ОТВЕТ. $I = \frac{1}{210}$.

$dx dy dz$

ПРИМЕР 4.16. Вычислить тройной интеграл $I = \int \int \int 1 - x - y$, если

G

область G ограничена плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

РЕШЕНИЕ. Построим данные плоскости. Плоскость $x + y + z = 1$ пересекает оси координат в точках A, B, C . Уравнения $x = 0, y = 0, z = 0$ описывают координатные плоскости zOy, xOz и xOy соответственно.

Область G , ограниченная этими плоскостями, представляет пирамиду (тетраэдр) $OABC$. Любая прямая, которая проходит внутри этого тетраэдра параллельно z , пересекает его поверхность в двух точках M и N (рис. 4.12).

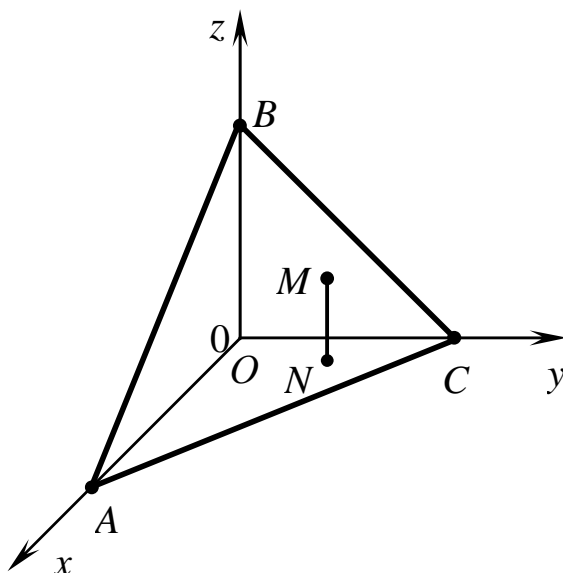


Рисунок – 4.12

Поэтому в нашей задаче тройной интеграл можно свести к вычислению обыкновенного интеграла по координате z и двойного интеграла по координатам x и y . Пределами однократного интеграла по z будут $z_1 = 0$ (из уравнения плоскости AOC) и $z_2 = 1 - x - y$ (из уравнения плоскости ABC).

Тема 4

$$\frac{dxdydz}{dz} = \int_{1-x-y}^{1-x-y} dxdy$$

$$\iiint_G 1 - x - y \, dxdydz = \iint_{AOC} \int_0^{1-x-y} 1 - x - y \, dz$$

Областью интегрирования двойного интеграла будет проекция тетраэдра $OABC$ на плоскость xOy (треугольник AOC). Вычислим внутренний однократный интеграл

$$\int dz = z \Big|_0^{1-x-y} = 1 - x - y$$

$$\int_0^{1-x-y} (1-x-y) \, dxdy$$

$$dxdy = S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OC$$

тогда $\iiint_G 1 - x - y \, dxdydz = \iint_{AOC} (1-x-y) \, dxdy = \iint_{AOC} 1 - x - y \, dxdy = 2$

ОТВЕТ. $\iiint_G 1 - x - y = 2$.

ПРИМЕР 4.17. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями $x + y + z = 4$, $x = 3$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

РЕШЕНИЕ. Объем пространственного тела вычисляется как тройной интеграл элементарного объема $dV = dxdydz$ по всей области этого тела

$$V = \iiint_G dV = \iiint_G dxdydz$$

В декартовой системе координат построим заданные плоскости, которые образуют тело G (рис. 4.13).

Из рисунка видно, что всякая прямая, которая проходит внутри тела, параллельно оси Oz , пересекает нижнее основание $AODCB$ в плоскости $z = 0$ и верхнее основание $FKMCB$ в плоскости $x + y + z = 4$. Поэтому вычисление тройного интеграла по области G , сводится к вычислению однократного интеграла с переменной z от

$z_1 = 0$ до $z_2 = 4 - x - y$ и двойного интеграла по переменным x и y

$$V = \int \int \int_G dV = \int \int \int_{G_{xy}} dx dy dz = \int \int_{G_{xy}} dx dy \int_0^{4-x-y} dz = \int \int_{G_{xy}} (4 - x - y) dx dy .$$

Полученный двойной интеграл вычисляется по области G_{xy} — проекции на плоскость xOy области G . Область G_{xy} представляет собой пятиугольник $OABCD$. Для вычисления двойного интеграла разобьем пятиугольник $OABCD$ на две части прямой BE параллельной оси Ox . Тогда двойной интеграл можно представить как сумму двух двойных интегралов по областям $OABE$ и $BCDE$.

$$\int \int_{G_{xy}} (4 - x - y) dx dy = \int \int_{OABE} (4 - x - y) dx dy + \int \int_{BCDE} (4 - x - y) dx dy .$$

В области $OABE$ переменная x изменяется от 0 до 3, а переменная y изменяется от 0 до 1. Первый двойной интеграл можно записать в виде

$$\int \int_{OABE} (4 - x - y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^3 (4 - x - y) dx .$$

Тема 4

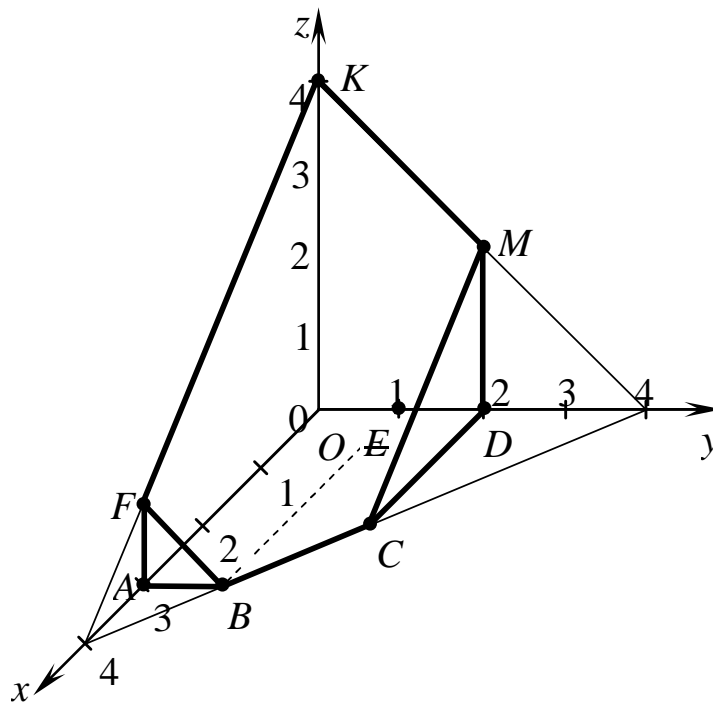


Рисунок 4.13

В области $BCDE$ переменная y изменяется от 1 до 2, а переменная x от 0 до прямой BC . Прямая BC – это линия пересечения плоскости $x + y + z = 4$ и плоскости $z = 0$, и ее уравнение будет $x + y = 4$ или $x = 4 - y$.

Тогда двойной интеграл по области $BCDE$ запишем так:

$$\int_{BCDE} \int_0^{4-y} (4 - x - y) dx dy = \int_1^2 dy \int_0^{4-y} (4 - x - y) dx.$$

Теперь мы можем записать, что

$$V = \int_{G_{xy}} \int_0^{4-y} (4 - x - y) dx dy = \int_1^2 dy \int_0^{4-y} (4 - x - y) dx + \int_0^1 dy \int_0^{4-y} (4 - x - y) dx$$

$$= \int_1^2 [(4 - y)x - \frac{x^2}{2}] \Big|_0^{4-y} dy + \int_0^1 [(4 - y)x - \frac{x^2}{2}] \Big|_0^{4-y} dy =$$

$$= \int_{10}^{12} (152 - 3y) dy + 12 \int_{12}^{16} (4 - y)^2 dy = \left(152y - \frac{3}{2}y^2 \right) \Big|_{10}^{12} + 16 \left(y - 4 \right) \Big|_{12}^{16} = 556 .$$

ОТВЕТ. $V = \int \int \int_G dx dy dz = \frac{55}{6} .$



ОТВЕТЬТЕ НА ВОПРОСЫ

1. Какая переменная называется функцией многих переменных?
2. Что определяет в пространстве функция двух переменных?
3. Какое геометрическое изображение в пространстве определяет функция трех переменных?
4. Какие способы задания функции многих переменных вы знаете?
5. Что такое линии уровня?
6. Что является областью определения функции двух переменных и функции трех переменных?
7. Когда область изменения переменных называется замкнутой, а когда открытой?
8. Какие производные называются частными производными функции многих переменных?

Тема 4

9. Что такое частный дифференциал функции многих переменных?
10. Напишите формулу полного дифференциала функции n переменных.
11. Какая функция многих переменных называется дифференцируемой в точке?
12. Как найти частную производную сложной функции?
13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие экстремума функции многих переменных.
14. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области?
15. Что называется объемным интегралом функции по области Ω ?
16. Какой интеграл называется двойным интегралом по области D ?
17. Напишите формулу вычисления площади плоской фигуры при помощи двойного интеграла.
18. Как вычислить объем цилиндрического тела при помощи двойного интеграла?



ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

- I. Напишите уравнения линий уровня функций. Что представляют собой сечения плоскостями $x = \text{const}$,
 $y = \text{const}$, $z = \text{const}$?

1) $z = xy$; 2) $z = y^2 - x^2$; 3) $z^3 = 2x^2 + 3y^2$;

4) $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

II. Найдите область определения следующих функций:

1) $z = \frac{1}{25 - x - y}$; 2) $z = \ln xy$; 3) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$;

4) $z = 8 - 3x - 5y$; 5) $z = \sqrt{x + y}$; 6) $z = \arcsin \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

III. Найдите частные производные функций:

1) $z = x^3 y - y^3 x$; 2) $z = \sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $z = x^3 + y^3$;

4) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 5) $z = (5x^3 y^3 + 2)^3$; 6) $u = e^{x(x^2 + y^2 + z^2)}$;

7) $u = \ln(x + y + z)$; 8) $z = x^y$; 9) $z = x^z y$; 10) $z = x^{23} + y^{32} \cdot x + y$

IV. Вычислите приближенные значения:

1) $1,04^{2,02}$; 2) $1,08^{3,96}$.

Тема 4

V. Найдите точки экстремума функций:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$; 2) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

3) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$; 4) $z = (x - y)^2 + (y - 1)^3$;

5) $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9$; 6) $z = x^2 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$.

VI. Вычислите двойные интегралы:

1) $\int_0^4 dy \int_0^2 dx (x - y + 1)$; 2) $\int_0^1 dx \int_0^{2x} dy (x - y + 1)$; $x + y$

3) $\iint_D xy dx dy$
 $(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$;

4) $\iint_D x^2 y e^{xy} dx dy$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$);

5) $\iint_D x^2 dx dy$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$).

$D: 1 + y$

VII. Вычислите тройные интегралы:

1) $\int_0^c dz \int_0^b dy \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2) dx$;

$\int_1^{\sqrt{x}} dy \int_{2-2x}^1 dz (x^2 + y^2 + z^2)$

$$2) \int_0^1 \int_0^{1-x} y dy \int_0^1 dz ; 3) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz .$$

VIII. Двойным интегрированием вычислите площадь, ограниченную линиями:

$$1) x = 0, y = 0, y = 6 - x ; 2) y = \frac{x^2}{2}, x = \frac{y^2}{2} ;$$

$$3) x = 5, y = 6x, y = x ; 4) x^2 + y^2 = 1; 16 25$$

$$5) y = x^2, y = (x - 6)^2 ; 6) x^2 + y^2 = 25, x^2 + y^2 = 9.$$

IX. Двойным интегрированием найдите объем тел, ограниченных поверхностями:

$$1) x = 4, y = 4, z = x^2 + y^2 + 1;$$

$$2) z = x^2 + y^2, z = 0, y = 1, y = 2x, y = 6 - x ;$$

$$3) y = x^2, y = 1, x + y + z = 4, z = 0; 4) z = 5, z = x^2 + y^2.$$

X. Тройным интегрированием вычислите объем тел, ограниченных поверхностями:

$$1) x + y + z = 6, x = 3, y = 2, x = 0, y = 0, z = 0;$$

Тема 4

$$2) x^2 + y^2 = z^2, z = 5; 3) x^2 + y^2 + z^2 = 4, 3z = x^2 + y^2; 4) 2z = x^2 + y^2, 4 = z + y.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО
ПОРЯДКА.**
2. **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ
ПОРЯДКОВ.**
3. **СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО
ПОРЯДКА.**

Тема 5

Лексика темы

	variation	变化
	value	值
зависимая	dependent <i>value</i>	依变数
	independent <i>value</i>	自变数
	<i>variable</i>	变量
	constant	常数
парные	cloven <i>variables</i>	偶变量
	arbitrary <i>value</i>	任意值
	differential	微分
дифференциальное (уравнение)	differential equation	微分方程
	linear <i>differential equation</i>	线性微分方程
нелинейное ДУ	heterogeneous <i>differential equation</i>	异构微分方程
обыкновенное ДУ	ordinary <i>differential equation</i>	常微分方程

однородное ДУ	homogeneous differential equation	齐次微分方程
расширенное ДУ	extended equation	扩展微分方程
интеграл	integral	积分
общий интеграл	general integral	普通积分
частичный интеграл	partial integral	部分积分
краевая задача	order of problem	边界值问题
второго порядка (ДУ)	order of differential equation	二阶微分方程
высшего порядка	higher order of differential equation	高阶微分方程
уравнения пониженного порядка	reduction of order of differential equation	可降阶的二阶微分方程
производная	derivative	导数
частичная производная	partial derivative	偏导数
решение	solution	解

Тема 5

	linearly independent solution	解的线性无关
ие	general solution	一般解, 通解
ПНЫХ лах	solution in total differentials	差分方程的解
ЬНЫЙ ий	fundamental set of solutions	根本解决方案
ние	particular solution	特解
	equation	方程
онулли	Bernoulli's equation	伯努利定理
ОЛНЫХ лах	equation in total differentials	总差方程
ческое	characteristic equation	特征方程
	number	数
ое	real number	实数
число	complex number	复数
число	complex-conjugate	共轭复数

<i>number</i>	
---------------	--

5.1. Общие понятия

Уравнение, которое связывает независимые переменные, функцию этих переменных и производные разных порядков этой функции называется **дифференциальным уравнением**.

Если функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**.

Если функция зависит от нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением с частными производными**.

Наивысший порядок производной, которая входит в такое уравнение, называется **порядком** дифференциального уравнения.

В этой главе мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

3_АПОМНИТЕ

1. Уравнение, которое содержит только первую производную $F(x, y, y') = 0$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка**.

2. Уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$, в котором наивысший порядок производной равен двум,

называется *обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка*.

3. В общем случае *дифференциальное уравнение*

$$n^{\text{го}} \text{ порядка имеет вид } F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0.$$

Решением дифференциального уравнения называют любую функцию, при подстановке которой в это уравнение получается тождество. Операцию нахождения решения называют *интегрированием дифференциального уравнения*.

Простейшее дифференциальное уравнение имеет вид

$$y' = f(x) \text{ или } dy = f(x) dx$$

Интегрируя левую и правую часть уравнения

$$\int dy = \int f(x) dx, \text{ получим } \textit{общее решение обыкновенного}$$

дифференциального уравнения

$$y = F(x) + c,$$

где $F(x)$ – это первообразная функции $f(x)$;

c – произвольная постоянная.

Дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые отличаются друг от друга произвольной постоянной.

ПРИМЕР 5.1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - x^2 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Перепишем заданное уравнение так: $y' = x^2$. Умножим обе части на dx , получим $y'dx = x^2dx$. Проинтегрируем правую и левую часть уравнения $\int dy = \int x^2dx$. Общим решением этого урав-

нения будет $y = \frac{x^3}{3} + c$.

ОТВЕТ. $y = \frac{x^3}{3} + c$.

Если произвольной постоянной задавать конкретные значения, то получим **частные решения** дифференциального уравнения.

Чтобы выделить из общего решения частные решения, необходимо задать дополнительные условия.

ПРИМЕР 5.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' - x^2 = 0$ при условии, что $y = 2$ при $x = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем общее решение данного уравнения $y = \frac{x^3}{3} + c$. Подставим в это решение значение $y = 2$ при $x = 0$ и найдем, что $c = 2$. Тогда частное решение дифференциального уравнения $y' - x^2 = 0$ запишем так:

$$y = \frac{x^3}{3} + 2 = \frac{1}{3}(x^3 + 6).$$

ОТВЕТ. $y = \frac{1}{3}(x^3 + 6)$.

В общем случае для обыкновенного дифференциального уравнения $n^{\text{го}}$ порядка

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \quad (5.1)$$

решение находят в результате n последовательных интегрирований.

Общее решение такого дифференциального уравнения содержит n произвольных постоянных и имеет вид

$$y = \phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n) . \quad (5.2)$$

Иногда общее решение дифференциального уравнения получается в неявном виде (y явно не выражается через x). Тогда получают выражение

$$\Phi = \phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) . \quad (5.3)$$

Равенство вида 5.3, которое неявно выражает общее решение дифференциального уравнения, называется **общим интегралом** этого дифференциального уравнения.

Во многих случаях требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям:

- в окрестности некоторой точки x_0 ; –
- на концах отрезка $[x_0, x_1]$.

↑ Дифференциальное уравнение $n^{\text{го}}$ порядка

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0, \text{ которое необходимо решить,}$$

если для $x = x_0$ заданы начальные условия

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \text{ называется}$$

задачей Коши.

Кроме задачи Коши, часто решаются **краевые задачи**.
 Например, для дифференциального уравнения второго
 порядка $y'' = f(x, y, y')$ находят решение на отрезке от x_0 до
 x_1 такое, что выполняются граничные (краевые условия).

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

ПРИМЕР 5.3. Найти решение дифференциального уравнения $y' - x = 0$,
 удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

РЕШЕНИЕ. Найдем общее решение данного уравнения $y = \frac{x^2}{2} + c$.

Подставим в решение начальные условия и найдем $y_0 = \frac{x_0^2}{2} + c$, отсюда

$$\text{куда } c = y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

Частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным
 условиям, будет

Тема 5

$$\frac{x^2}{2} - x_0^2 + y - y_0 = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2).$$

ОТВЕТ. $y = y_0 + \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$.

↑ Дифференциальные уравнения $n^{\text{го}}$ порядка

$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$, решения которых необходимо найти на отрезке $[x_0, x_1]$ с граничными (краевыми) условиями $G_k(y) = d_k$, называются **краевыми задачами**.

$G_k(y)$ является заданной комбинацией значений искомой функции и её производных при различных значениях аргумента, если $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

ПРИМЕР 5.4. Найти решение уравнения $y'' - x = 0$, удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = 1, y(1) = 2$.

РЕШЕНИЕ. Дважды последовательно интегрируя уравнение, находим

$$y' = \frac{x^2}{2} + c_1 \text{ и } y = \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2.$$

Подставив в решение граничное условие $y(0) = 1$, имеем $c_2 = 1$.

Подставив в решение граничное условие $y(1) = 2$, имеем $c_1 = \frac{5}{6}$.

Искомое решение запишем так:

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{5}{6}x + 1.$$

ОТВЕТ. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{5}{6}x + 1.$

5.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Если общее решение дифференциального уравнения получено в явной или неявной форме, то уравнение считается проинтегрированным. При этом решение может содержать еще не взятые интегралы от известной функции.

Многие, даже очень простые дифференциальные уравнения, невозможно проинтегрировать. Рассмотрим некоторые типы уравнений, которые интегрируются.

5.2.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

↑ Уравнения вида $y' = f(x)\phi(y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*. Это уравнение можно записать так:

$$\frac{dy}{\phi(y)} = f(x)dx. \quad (5.4)$$

Переменные x и y разделены. В правой части уравнения находится выражение, зависящее от переменной x , в левой части – от переменной y . Интегрируя правую и левую части уравнения, получим его общий интеграл

$$\int \phi(y) dy = \int f(x) dx + c .$$

Уравнение первого порядка $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ можно разложить на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной

$$f_1(x) f_2(y) dx + \phi_1(x) \phi_2(y) dy = 0.$$

В таком уравнении при делении его членов на $f_2(y)\phi_1(x)$ переменные разделяются.

$$\frac{f_1(x)\phi_2(y)}{\phi_1(x)f_2(y)} dx + dy = 0 .$$

Каждый член уравнения теперь зависит только от одной переменной. Общий интеграл уравнения находится

почленным
интегрированием

$$\int f_2(y) dy = C - \int \phi_1(x) dx .$$

ПРИМЕР 5.5. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x}$.

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, разделим переменные

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ и проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln y = \ln x + \ln c \rightarrow \ln y = \ln cx \rightarrow y = cx .$$

ОТВЕТ. $y = cx$.

5.2.2. Однородные уравнения первого порядка

↑ **Уравнение первого порядка** $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ является однородной функцией нулевой степени. В этом случае $f(x, y)$ удовлетворяет тождеству $f(tx, ty) = f(x, y)$, и ее всегда можно представить как функцию отношения $\frac{y}{x}$

$$f(x, y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \text{ или } y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Уравнение вида $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ называется **однородным уравнением**.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $y = ux$, где $u = u(x)$ новая искомая функция.

Так как $y' = u'x + u$, то дифференциальное уравнение $y' = \phi(u)$ запишется так:

$$u'x + u = \phi(u) \text{ или } \frac{du}{dx}x = \phi(u) - u \text{ и, откуда } \frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Переменные разделились. Выполним интегрирование и получим общий интеграл уравнения

$$\int \frac{du}{\phi(u) - u} = \ln x + \ln |c|.$$

Вернемся к переменной y и получим решение заданного уравнения с переменной y .

ПРИМЕР 5.6. Найти общий интеграл уравнения $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$.

РЕШЕНИЕ. Разделим все члены уравнения на x

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{x}{y} - \frac{1}{x}$$

Решим полученное уравнение относительно производной y'

$$y' = xy - xy \ln \frac{x}{y} = xy (|1 - \ln \frac{x}{y}|) = xy (1 + \ln xy).$$

Тема 5

Заданное уравнение является однородным дифференциальным уравнением, так как правая часть его представлена функцией y отношения переменных y/x . Вводим новую переменную $u = y/x$, тогда $y = ux$, а $y' = \frac{du}{dx}x + u$. С новой переменной уравнение имеет вид dx

$$u + x \frac{du}{dx} = u(1 + \ln u) \text{ или } x \frac{du}{dx} = u \ln u \cdot dx$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{dx}{x \ln u}$ и разделим переменные

$$\frac{du}{u \ln u} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{d(\ln u)}{\ln u} \cdot \frac{dx}{x}$$

или $= \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \frac{dx}{x}$

Интегрируя обе части, имеем

$$\int \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

$\ln |\ln u| = \ln |x| + \ln c$ или $\ln |\ln u| = \ln c |x|$, откуда $\ln u = cx$.

Общий интеграл уравнения запишем $u = e^{cx}$. Вернемся к переменной y и получим решение заданного уравнения $y = xe^{cx}$.

ОТВЕТ. $y = xe^{cx}$.

5.2.3. Линейные дифференциальные уравнения

первого порядка

↑ *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка* называется дифференциальное уравнение, в котором y и y' входят линейно (в первой степени).

$$A(x) y' + B(x) y = C(x) .$$

Если $A(x) \neq 0$, то уравнение приводится к виду

$$y' + P(x) y = Q(x) ,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – заданные непрерывные функции от x
или постоянные.

Если $Q(x) = 0$, то уравнение называется *однородным линейным уравнением*.

Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение называется *неоднородным линейным уравнением*.

Запишем и решим вначале однородное уравнение. Для этого изменим обозначение искомой функции

$$z' + p(x)z = 0 .$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{z} = -p(x)dx .$$

Интегрируя правую и левую часть уравнения, получим общее решение однородного уравнения

$$z = ce^{-\int p(x)dx} = cz_1 .$$

Здесь $z_1 = e^{-\int p(x) dx}$ это частное решение уравнения, по-

$$-\int p(x) dx \text{ при } c = 1.$$

лученное из общего решения $z = ce$

Общее решение неоднородного уравнения можно найти при помощи метода вариации произвольных постоянных. Для этого:

- 1) заменим произвольную постоянную (c) неизвестной функцией $\phi(x)$ в общем решении однородного уравнения $y = cz_1$. Такая замена называется **вариацией произвольной постоянной**;
- 2) решение неоднородного линейного дифференциального уравнения $y' + p(x)y = Q(x)$ найдем в виде $y = \phi(x)z_1$;
- 3) подставим $y = \phi(x)z_1$ и $y' = \phi'(x)z_1 + z_1'\phi(x)$ в заданное неоднородное уравнение (5.5)

$$[\phi(x)z_1]' + p(x)\phi(x)z_1 = Q(x);$$

4) приведем подобные члены и получим

$$\phi'(x)z_1 + (z_1' + p(x)z_1)\phi(x) = Q(x) ;$$

в полученном выражении $z_1' + p(x)z_1 = 0$, так как z_1 — это решение уравнения $z' + p(x)z = 0$. Тогда $\phi'(x)z_1 = Q(x)$,

$$\text{откуда } \phi'(x) = \frac{Q(x)}{z_1(x)} ;$$

5) интегрируем последнее выражение и получим

$$\phi(x) = \int \frac{Q(x)}{z_1(x)} dx + c ; \quad (5.6)$$

6) общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения будет

$$y = \phi(x)z_1 = \left(\int \frac{Q(x)}{z_1(x)} dx + c \right) z_1$$

$$\text{или } y = z_1(x) \int z_1^{-1}(x) dx + cz_1. \quad (5.7)$$

↑ Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме некоторого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

ПРИМЕР 5.7. Решить неоднородное дифференциальное уравнение

$$y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем однородное уравнение, изменив обозначение искомой функции, получим

$$x = 0 \text{ или } \frac{dz}{z} - z \operatorname{ctg} x = z \operatorname{ctg} x \cdot dx$$

Это уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dz}{z} = \operatorname{ctg} x dx$.

Интегрируя обе части уравнения, найдем общее решение однородного уравнения

$$\ln z = \ln \sin x + \ln c, \text{ откуда } z = c \sin x.$$

Если $c = 1$, то частное решение однородного уравнения равно $z_1 = \sin x$. Общее решение неоднородного уравнения найдем в виде $y = z_1 \phi(x)$, где $\phi(x)$ неизвестная функция, которую мы находим по формуле (5.6). В нашей задаче $Q(x) = \sin x$ и $z_1(x) = \sin x$, поэтому

Тема 5

Решая первое уравнение, имеем

$$\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x dx \text{ или } \ln v = \ln \sin x, \text{ откуда } v = \sin x.$$

Подставив значение v во второе уравнение, имеем

$$\sin x du = \sin x dx \text{ или } du = dx, \text{ откуда } u = x + c.$$

Зная u и v , найдем, что $y = (x + c)\sin x$, как в задаче 5.7.

ОТВЕТ. $y = (x + c)\sin x$.

5.2.4. Уравнение Бернулли

↑ Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

называется уравнением Бернулли,

где $P(x), Q(x)$ – заданные непрерывные функции от x ;

n – постоянное число.

Введением новой переменной $u = y^{1-n}$ уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Разделив все члены уравнения $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ на y^n ,

получим

$$y'y^{-n} + P(x) y^{1-n} = Q(x).$$

Умножим все члены уравнения на $(1-n)$

$$(1-n) y'y^{-n} + (1-n)P(x) y^{1-n} = (1-n)Q(x). \quad (5.8).$$

Введем новую переменную $u = y^{1-n}$, найдем ее производную $u' = (1-n) y^{-n} y'$ и подставим их значения в уравнение (5.8).

$$u'(x) + (1-n)P(x)u(x) = Q(x)(1-n)$$

или $u' + I(x)u = F(x)$, (5.9)

где $I(x) = (1-n)P(x)$, а $F(x) = (1-n)Q(x)$.

Это дифференциальное уравнение первого порядка и решать его можно методами, которые рассматривались ранее.

ПРИМЕР 5.9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 y^2 y' + xy^3 = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Разделив обе части уравнения на $x^2 y^2$, мы получим уравнение

$$y^{-2} \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x} y = y^{-2} \frac{1}{x}.$$

—
x x y x x

Полученное уравнение имеет вид уравнения Бернулли.

Тема 5

$$y' + P(x)y = y^n Q, \text{ где } P = \frac{1}{x}, Q = \frac{1}{2} \text{ и } n = -2.$$

Уравнение Бернулли приводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению заменой переменной $t = y^{1-n}$. Для

нашей задачи $t = y^3$ или $y = \sqrt[3]{t}$.

Найдем производную y' и подставим y и y' в уравнение

3

$$\frac{1}{3} t^{-2/3} t' + \frac{1}{x} t^{1/3} = \frac{1}{2} \text{ или } t' + \frac{3}{x} t = \frac{3}{2}.$$

Мы получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Представим переменную t как произведение двух вспомогательных функций $t = uv$. Найдем производную этой переменной $t' = u'v + v'u$. Уравнение переписется так:

$$u'v + v'u + \frac{3}{x} uv = \frac{3}{2} \text{ или } u'v + \left(v' + \frac{3}{x} v \right) u = \frac{3}{2}.$$

Вспомогательную функцию v выберем из условия, что

$$v' + \frac{3}{x} v = 0.$$

Уравнение $v' + \frac{3}{x} v = 0$ можно переписать

$$\frac{dv}{v} + \frac{3}{x} dx = 0 \text{ или } \ln v + 3 \ln x = 0 \text{ или}$$

Принтегрируем это уравнение. Получим $\ln v + 3 \ln x = 0$ или

$$\ln v + 3 \ln x = 0 \text{ или}$$

$\ln vx = 0$, откуда $vx = 1$. Полученная функция $v = \frac{1}{x}$ есть частный x интеграл уравнения $v' + \frac{3}{x}v = 0$. Найдем из уравнения $u'v = \frac{3}{2}x$ функцию u .

Подставим значение $v = \frac{1}{x}$ в уравнение $u'v = \frac{3}{2}x$ и получим

$$\frac{u'}{x} = \frac{3}{2} \frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad = 3x \quad \text{и} \quad du = 3x dx . x$$

Интегрируя последнее выражение, имеем

$$\frac{x^2 u}{2} = \frac{3}{2} x^2 + c .$$

Переменная $t = uv$ будет иметь вид

$$t = x^2 + c \quad \left(\frac{3}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{3}{x} + \frac{c}{x^3} \right) .$$

Возвращаясь к переменной y , имеем $y = \sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{c}{x^3}}$.

ОТВЕТ. $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{c}{x^3}}$.

5.3. Дифференциальные уравнения высших порядков

5.3.1. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Тема 5

1. Уравнение n -го порядка $y^n = f(x)$ решается последовательным интегрированием. Умножая обе части уравнения на dx , получаем уравнение $(n-1)$ -го порядка

$$y^{n-1} = \int f(x)dx + c_1 = \phi_1(x) + c_1.$$

Умножая обе части уравнения на dx и интегрируя выражение, получаем $y^{n-2} = \int \phi_1(x)dx + \int c_1 dx + c_2 = \phi_2(x) + c_1 x + c_2$.

После n -кратного интегрирования получаем y

$$= \phi_n(x) + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n.$$

2. Уравнение 2-го порядка $f(x, y', y'') = 0$ или $f(y, y', y'') = 0$, которое не содержит явно функцию y или аргумент x , преобразуются в уравнение 1-го порядка подстановкой dp
 $y' = p$ и $y'' = \frac{dp}{dx}$

ПРИМЕР 5.11. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y''' = 5x^4.$$

РЕШЕНИЕ. Умножим обе части уравнения на dx и проинтегрируем полученное уравнение.

$$\int y''' dx = \int 5x^4 dx \rightarrow y'' = x^5 + c_1.$$

Повторим эту операцию два раза, имеем

$$\int y'' dx = \int x^5 dx + \int c_1 dx \rightarrow y' = \frac{x^6}{6} + c_1 x + c_2,$$

$$\int y' dx = \int \frac{x^6}{6} dx + \int c_1 x dx + \int c_2 dx \rightarrow y = \frac{42x^7}{42} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3.$$

ОТВЕТ. $y = \frac{x^7}{42} + \frac{c_1}{2} x^2 + c_2 x + c_3.$

ПРИМЕР 5.12. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $xy'' + y' = 0.$

РЕШЕНИЕ. Обозначим $y' = p$, тогда $y'' = \frac{dp}{dx}$, и уравнение переписываем так:

$$p = 0 \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{dx}{x}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{p} + \frac{dx}{x} = 0$$

Интегрируя обе части уравнения, имеем $\ln p + \ln x = \ln c \rightarrow \ln |px| = \ln c \rightarrow px = \pm c = c_1$.

Так как $p = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{x}$ и $dy = \frac{c_1}{x} dx$. Интегрируя последнее равенство, получим общий интеграл уравнения

$$\int dy = \int c_1 \frac{dx}{x} \rightarrow y = c_1 \ln |x| + c_2.$$

ОТВЕТ. $y = c_1 \ln x + c_2$.

5.3.2. Линейные однородные уравнения высших

порядков с постоянными коэффициентами

↑ Линейным однородным уравнением называется

$$y_n + p_1 y_{(n-1)} + p_2 y_{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

(5.10) все члены которого имеют первую степень

относительно функции и ее производных, а

коэффициенты p_1, p_2, \dots, p_n – известные функции от аргумента x или постоянные.

Интеграл линейного однородного уравнения $n^{\text{го}}$ порядка имеет вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n ,$$

где y_1, y_2, \dots, y_n – линейно независимые частные интегралы этого уравнения.

Если все коэффициенты p_i , линейного однородного уравнения постоянны, то общий его интеграл находят с помощью характеристического уравнения

$$r_n + p_1 r_{n-1} + p_2 r_{n-2} + \dots + p_{n-1} r + p_n = 0 . \quad (5.11)$$

Для получения характеристического уравнения нужно в дифференциальном уравнении:

- 1) заменить функцию y единицей;

2) заменить производные – соответствующими степенями r ;

3) сохранить все коэффициенты p_i .

Корни r_1, r_2, \dots, r_n характеристического уравнения могут быть действительными или комплексными.

Фундаментальный набор решений уравнения (5.10) можно построить следующим образом:

1) действительным и различным корням r_i соответствует решение в виде суммы линейно-независимых решений $e^{r_i x}$

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x} ;$$

2) действительному корню r_i , кратности k , соответствует решение в виде

$$y = e^{r_i x} (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}) ;$$

3) для пары комплексно-сопряженных корней $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ общий интеграл выразится формулой

$$y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x} ;$$

4) для пары комплексно-сопряженных корней $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности k решение записывается в виде формулы $y = e^{\alpha x}$

$$[(c_1 + c_2 x + \dots + c_k x^{k-1}) \cos \beta x +$$

Тема 5

$$+ (c_{k+1} + c_{k+2}x + \dots + c_{2k} x^{k-1}) \sin \beta x]] .$$

ПРИМЕР 5.13. Решить однородное дифференциальное уравнение $y'' - 7y' + 10y = 0$.

РЕШЕНИЕ. Составим характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения

$$r^2 - 7r + 10 = 0 .$$

Корни этого уравнения $r_1 = 2$ и $r_2 = 5$ действительны и различны. Общий интеграл дифференциального уравнения будет

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x} .$$

ОТВЕТ. $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x}$.

ПРИМЕР 5.14. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y''' - 8y'' + 25y' - 26 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения $r^3 - 8r^2 + 25r - 26 = 0$,

$$r^3 - 8r^2 + 25r - 26 = 0 \rightarrow (r - 2)(r^2 - 6r + 13) = 0 .$$

Уравнение имеет один действительный корень $r_1 = 2$ и два комплексно-сопряженных корня $r_{2,3} = 3 \pm 2i$.

Общий интеграл дифференциального уравнения будет

$$y = c_1 e^{2x} + e^{3x} (c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x) .$$

ОТВЕТ. $y = c_1 e^{2x} + e^{3x} (c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)$.

5.3.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное уравнение отличается от линейного однородного уравнения наличием в правой части некоторой известной функции q от независимой переменной x .

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \dots + p_{n-1} y^1 + p_n y = q(x) . \quad (5.12)$$

Общий интеграл линейного неоднородного уравнения равен сумме общего интеграла u соответствующего однородного уравнения (5.10) и какого-либо частного интеграла y_1 неоднородного уравнения (5.12)

$$y = u + y_1 . \quad (5.13)$$

Для некоторых видов функции $q(x)$ частный интеграл y_1 можно найти методом неопределенных коэффициентов.

По виду правой части $q(x)$ можно заранее указать вид частного интеграла y_1 , где неизвестны только числовые коэффициенты.

I. Пусть в правой части дифференциального уравнения стоит функция $q(x) = P(x)e^{\lambda x}$, где $P(x)$ многочлен от x , тогда различают два случая:

1) если λ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в виде

$$y_1 = Q(x)e^{\lambda x} ,$$

где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

- 2) если λ – это корень характеристического уравнения кратности k , то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_1 = x^k Q(x) e^{\lambda x}.$$

II. Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$q(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x,$$

где M, N – постоянные числа.

Тогда вид частного решения определяется следующим образом:

- 1) если β_i не корень характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y_1 = A \cos \beta x + B \sin \beta x,$$

где A, B – постоянные неопределенные коэффициенты;

- 2) если β_i – это корень характеристического уравнения кратности k , то

$$y_1 = x^k (A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

III. Пусть $q(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены от x .

Тогда

1) если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение находим в виде

$$y_1 = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x, \text{ где } U(x), V(x)$$

– многочлены, степень которых равна

наибольшей степени $P(x)$, $Q(x)$; 2)

если число $\alpha + \beta i$ это корень характеристического уравнения кратности k , то частное решение находим в

виде $y_1 = x^k [U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x]$, где $U(x)$, $V(x)$

– многочлены, степень которых равна

наибольшей степени $P(x)$, $Q(x)$.

Если в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos\beta x$ или только $\sin\beta x$, решение ищут в виде выражения, содержащего и $\sin\beta x$, и $\cos\beta x$.

ПРИМЕР 5.15. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = e^x$.

РЕШЕНИЕ. Однородному дифференциальному уравнению $y'' - 5y' + 6y = 0$ соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Тема 5

Корнями этого уравнения являются числа $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. Общее решение однородного уравнения можно представить в виде

$$u = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}.$$

В правой части коэффициент при e^x равен 1, поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_1 = Ae^x,$$

где A – постоянное число.

Дифференцируя это выражение, находим $y_1' = Ae^x$ и $y_1'' = Ae^x$.

Подставим y_1 , y_1' и y_1'' в исходное уравнение

$$Ae^x - 5Ae^x + 6Ae^x = e^x.$$

$$\underline{1} \quad \underline{1}^x$$

Отсюда находим $A = \underline{2}$ и $y_1 = e^x$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = u + y_1 \text{ или } y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \underline{1} e^x.$$

ОТВЕТ. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \underline{1} e^x$.

ПРИМЕР 5.16. Найти общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 5y = 25x^2 - 2$.

РЕШЕНИЕ. Общий интеграл y неоднородного дифференциального уравнения равен сумме общего интеграла u однородного уравнения и частного интеграла y_1 неоднородного уравнения

$$y = u + y_1.$$

Чтобы найти общий интеграл однородного уравнения

$$y'' - 6y' + 5y = 0,$$

составим его характеристическое уравнение

$$r^2 - 6r + 5 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет два действительных, разных корня $r_1 = 5$, $r_2 = 1$, поэтому общий интеграл однородного дифференциального уравнения запишем в виде

$$u = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{5x} + c_2 e^x.$$

В правой части неоднородного дифференциального уравнения стоит многочлен второй степени. Поэтому его частный интеграл ищем в виде многочлена второй степени

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C.$$

Найдем производные $y_1' = 2Ax + B$ и $y_1'' = 2A$. Подставим в неоднородное дифференциальное уравнение y_1, y_1', y_1'' .

$$2A - 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 25x^2 - 2,$$

$$\text{или } 2A - 12Ax - 6B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 25x^2 - 2, \text{ или } 5Ax^2 - (12A - 5B)x + 2A - 6B + 5C = 25x^2 - 2.$$

Полученное выражение будет тождеством, если в левой и правой частях равенства коэффициенты при одинаковых степенях x будут равны.

$$\left\{ \begin{array}{l} 5A = 25, A = 5; \\ | \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -12A + 5B = 0, -60 + 5B = 0, B = 12; \\ | \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A - 6B + 5C = -2, 10 - 72 + 5C = -2, 5C = 60, C = 12. \end{array} \right.$$

Решением этой системы алгебраических уравнений будут значения коэффициентов

$$A = 5, \quad B = 12, \quad C = 12.$$

Частный интеграл неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y_1 = 5x^2 + 12x + 12,$$

Тема 5

а общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения

$$y = u + y_1 = c_1 e^{5x} + c_2 e^x + 5x^2 + 12x + 12 .$$

ОТВЕТ. $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^x + 5x^2 + 12x + 12 .$

ПРИМЕР 5.17. Найти общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения $y'' - y' - 12y = 150\cos 3x .$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение $r^2 - r - 12 = 0$ однородного дифференциального уравнения $y'' - y' - 12y = 0$ имеет два различных действительных корня $r_1 = 4$, и $r_2 = 3$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$u = c_1 e^{v_1 x} + c_2 e^{v_2 x} = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x} .$$

Частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения выбираем в соответствии с выражением для правой части $q = \cos 3x$ в виде

$$y_1 = A \cos 3x + B \sin 3x .$$

Находим производные $y_1' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$ и $y_1'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x .$

Подставляем выражения для y_1 , y_1' , y_1'' в неоднородное дифференциальное уравнение $y'' - y' - 12y = 150\cos 3x$

$$\begin{aligned} & -9A \cos 3x - 9B \sin 3x + 3A \sin 3x - 3B \cos 3x - \\ & -12A \cos 3x - 12B \sin 3x = 150 \cos 3x , \end{aligned}$$

$$(-21A - 3B) \cos 3x + (3A - 21B) \sin 3x = 150 \cos 3x .$$

Сделаем преобразования. Приравняем коэффициенты при $\sin 3x$ и $\cos 3x$ в левой и правой части уравнения. Получим систему уравнений

$$\{ 3A - 21B = 0 ,$$

$$\begin{cases} \\ -21A - 3B = 150. \end{cases}$$

Решением системы будет $B = -1, A = -7$.

Частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид $y_1 = -7\cos 3x - \sin 3x$, а общий интеграл неоднородного уравнения есть

$$y = u + y_1 = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x} - 7\cos 3x - \sin 3x.$$

ОТВЕТ. $y = u + y_1 = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x} - 7\cos 3x - \sin 3x$.

5.4. Системы дифференциальных уравнений первого порядка

5.4.1. Общие понятия

3_АПОМНИТЕ

Система дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями одной независимой переменной может быть приведена к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Систему n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, в которых наряду с n зависимыми переменными y содержится одна независимая переменная x , можно записать в форме

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i \left(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n' \right), \quad i = 1, \dots, n$$

□ □ □ □ □ □ □ □,

Тема 5

$$dy_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'). dx$$

где y_1, \dots, y_n – неизвестные функции; x – независимая переменная.

Если система дифференциальных уравнений включает в

$$d^2 y_1, \dots, d^2 y_n$$

себя вторые производные y_1'', \dots, y_n'' , то можно ввести

$$\frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$$

новые независимые переменные y_{n+1}, \dots, y_{2n} при помощи еще n уравнений.

$$\frac{dy_1}{dx} = y_{n+1}, \dots, \frac{dy_n}{dx} = y_{2n}.$$

Система n дифференциальных уравнений второго порядка сводится к системе $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y_1}{dx^2} = f_1(x, y_1, \dots, y_{2n}), \\ \frac{dy_1}{dx} = y_{n+1}, \\ \dots \\ \frac{d^2 y_n}{dx^2} = f_n(x, y_1, \dots, y_{2n}), \\ \frac{dy_n}{dx} = y_{2n} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_{n+1}, \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = y_{2n} \end{array} \right.,$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n); \\ & y_n(x_0) = y_{n0} \end{aligned} \right\} \text{система уравнений}$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n); \\ & y_1(x_0) = y_{10} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dy_{n+1}}{dx} = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n),$$

$$y_{n+1}(x_0) = y_{(n+1)0},$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n); \\ & y_1(x_0) = y_{10} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{dy_{2n}}{dx^{2n}} = f_{2n}(x, y_1, \dots, y_n).$$

Аналогично решают уравнения с производными более высоких порядков.

Решением системы называется любая система функций

$$y_1 = \phi_1(x), y_2 = \phi_2(x), \dots, y_n = \phi_n(x),$$

определенных на конечном или бесконечном интервале изменения аргумента x . Эти функции имеют производную первого порядка и обращают уравнения системы в тождество.

Задача Коши для системы уравнений заключается в определении решений $y_1 = \phi_1(x), y_2 = \phi_2(x), \dots, y_n = \phi_n(x)$, удовлетворяющих начальным условиям $y_1(x_0) = (Y_1)_0, y_2(x_0) = (Y_2)_0, \dots, y_n(x_0) = (Y_n)_0$.

$$= (Y_2)_0, \dots, y_n(x_0) = (Y_n)_0.$$

Если правые части уравнений системы являются линейными функциями относительно y_1, y_2, \dots, y_n , то система уравнений называется **системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка**.

5.4.2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\dots, \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n.$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде

$$y_1 = p_1 e^{\lambda x}, y_2 = p_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = p_n e^{\lambda x}. \quad (5.15)$$

Найдем производные от выражения (5.15)

$$\frac{dy^1}{dx} = p_1 \lambda e^{\lambda x}, \frac{dy^2}{dx} = p_2 \lambda e^{\lambda x}, \dots, \frac{dy^n}{dx} = p_n \lambda e^{\lambda x}. \quad (5.16)$$

Подставим (5.15) и (5.16) в систему уравнений (5.14) и получим

$$\begin{cases}
 p_1 \lambda e^{\lambda x} = a_{11} p_1 e^{\lambda x} + a_{12} p_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{1n} p_n e^{\lambda x}, \\
 p_2 \lambda e^{\lambda x} = a_{21} p_1 e^{\lambda x} + a_{22} p_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{2n} p_n e^{\lambda x}, \\
 p_3 \lambda e^{\lambda x} = a_{31} p_1 e^{\lambda x} + a_{32} p_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{3n} p_n e^{\lambda x}, \\
 \dots \\
 p_n \lambda e^{\lambda x} = a_{n1} p_1 e^{\lambda x} + a_{n2} p_2 e^{\lambda x} + \dots + a_{nn} p_n e^{\lambda x}.
 \end{cases}$$

Сократим полученное выражение на $e^{\lambda x}$ и перенесем все члены равенства в одну сторону

$$\begin{cases}
 (a_{11} - \lambda) p_1 + a_{12} p_2 + a_{13} p_3 + \dots + a_{1n} p_n = 0, \\
 a_{21} p_1 + (a_{22} - \lambda) p_2 + a_{23} p_3 + \dots + a_{2n} p_n = 0, \\
 a_{31} p_1 + a_{32} p_2 + (a_{33} - \lambda) p_3 + \dots + a_{3n} p_n = 0, \\
 \dots \\
 a_{n1} p_1 + a_{n2} p_2 + a_{n3} p_3 + \dots + (a_{nn} - \lambda) p_n = 0.
 \end{cases} \quad (5.17)$$

Полученная система однородных линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение,

Тема 5

если определитель этой системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$). При этом решение будет нулевым $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots, y_n = 0$. Ненулевые решения могут быть получены только при таких λ , для которых определитель равен нулю $\Delta = 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.18)$$

Уравнение (5.18) является **характеристическим уравнением** для системы (5.14). Его корни λ_i называются корнями характеристического уравнения.

Если корни $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ характеристического уравнения действительные и различные, то для каждого корня λ_i можно составить систему линейных алгебраических уравнений (5.17) и определить коэффициенты $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}$. Один из этих коэффициентов произвольный. Его можно принять равным единице.

Соответствующие решения этого уравнения принимают вид

$$y_{1(i)} = p_{1i} e^{\lambda_i x}, y_{2(i)} = p_{2i} e^{\lambda_i x}, \dots, y_{n(i)} = p_{ni} e^{\lambda_i x} .$$

Для n корней имеем n аналогичных решений, которые, составляют фундаментальную систему решений.

Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами запишется в следующем виде

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 y_{1(1)} + c_2 y_{1(2)} + c_3 y_{1(3)} + \dots + c_n y_{1(n)} \\ y_2 &= c_1 y_{2(1)} + c_2 y_{2(2)} + c_3 y_{2(3)} + \dots + c_n y_{2(n)} \\ &\dots \end{aligned}$$

(5.19)

$$\dots$$

$$y_n = c_1 y_{n(1)} + c_2 y_{n(2)} + c_3 y_{n(3)} + \dots + c_n y_{n(n)} .$$

Систему уравнений 5.14 можно записать в матричной форме

$$\frac{dy}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A y, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Тема 5

$$\begin{array}{c|ccc}
 & & & \frac{dy_1}{dx} \\
 & & & \frac{dy_2}{dx} \\
 \hline
 & y_1 & & \\
 & y_2 & \frac{dy}{dx} = & \frac{dy}{dx} \\
 & \square & & \square \\
 & y_n & & \frac{dy_n}{dx}
 \end{array}$$

$$a_{n1} \quad a_{n2} \quad \square \quad a_{nn}$$

Решение ищем в виде $y_1 = p_1 e^{\lambda x}$

$$, y_2 = p_2 e^{\lambda x}, \square, y_n = p_n e^{\lambda x}.$$

В результате дифференцирования и подстановки результатов в исходное уравнение получаем

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 0 \quad \square \quad 0 \quad p_1 \quad 0 \\
 0 \quad 1 \quad \square \quad 0 \quad p_2 \quad 0 \\
 (A - \lambda E) p = \theta, \text{ где } E =, p \\
 \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \\
 0 \quad 0 \quad \square \quad 1 \quad p_n \quad 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. = \theta = \left| \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right|.$$

Для того, чтобы система имела ненулевое решение, необходимо, чтобы определитель матрицы $(A - \lambda E)$ был равен нулю.

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} - \lambda & a_{12} & \square & a_{1n} \\
 a_{21} & -\lambda & \square & a_{2n} \\
 \square & \square & \square & \square \\
 a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} - \lambda
 \end{vmatrix} = 0.$$

Это характеристическое уравнение матрицы и системы дифференциальных уравнений, которое имеет n корней.

Если корни действительные и разные, то каждому корню λ_i соответствует собственный вектор $p_i = (p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}, \dots, p_{ni})$.

Соответствующие решения имеют вид

$$y_{1i} = p_{1i}e^{\lambda_i x}, \quad y_{2i} = p_{2i}e^{\lambda_i x}, \quad \dots, \quad y_{ni} = p_{ni} e^{\lambda_i x}.$$

Для n корней имеем n таких же решений. В результате получается фундаментальная система решений. Общее решение запишется в виде

$$y_1 = c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + \dots + c_n y_{1n},$$

$$y_2 = c_1 y_{21} + c_2 y_{22} + \dots + c_n y_{2n},$$

$$\dots, \dots,$$

$$y_n = c_1 y_{n1} + c_2 y_{n2} + \dots + c_n y_{nn}.$$

ПРИМЕР 5.18. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} dy_1 \\ dx \end{cases} = 2y_1 + 2y_2,$$

$$\begin{cases} dy_2 = y_1 + 3y_2. \\ dx \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.
системы.

Составим характеристическое

уравнение

$$= 0 \text{ или } \lambda -$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$5\lambda + 4 = 0.$$

Тема 5

Корнями уравнениями будут $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Решение системы находим в виде

$$\begin{aligned} \lambda=1 \quad \lambda=4 & \quad \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = P_{1(1)} e^x, & \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \end{pmatrix} = P_{2(1)} e^x ; \\ & \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = P_{1(2)} e^{4x}, & \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix} = P_{2(2)} e^{4x}. \end{aligned}$$

Составим систему 5.17 для корня $\lambda=1$

$$\begin{cases} (2-1)p_{1(1)} + 2p_{2(1)} = 0 \\ p_{1(1)} + (3-1)p_{2(1)} = 0 \end{cases} \rightarrow p_{1(1)} + 2p_{2(1)} = 0,$$

$$\begin{cases} (2-1)p_{1(1)} + 2p_{2(1)} = 0 \\ p_{1(1)} + (3-1)p_{2(1)} = 0 \end{cases} \rightarrow p_{1(1)} + 2p_{2(1)} = 0.$$

Откуда $p_{1(1)} = -2p_{2(1)}$, полагая $p_{1(1)} = 1$, получим $p_{2(1)} = -\frac{1}{2}$.

Решение системы запишем так:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= e^x \quad \text{и} \quad y_2^{(1)} = -\frac{e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Составим систему 5.17 для $\lambda=4$

$$\begin{cases} (2-4)p_{1(2)} + 2p_{2(2)} = 0 \\ p_{1(2)} + (3-4)p_{2(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow -2p_{1(2)} + 2p_{2(2)} = 0,$$

$$\begin{cases} -2p_{1(2)} + 2p_{2(2)} = 0 \\ p_{1(2)} - p_{2(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow p_{1(2)} - p_{2(2)} = 0.$$

Получим $p_{1(2)} = p_{2(2)}$. Задавая $p_{1(2)} = 1$, получаем $p_{2(2)} = 1$. Решение системы запишем в виде

$$y_{1(2)} = e^{4x}, \quad y_{2(2)} = e^{4x}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений получим

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^x + c_2 e^{4x}, \\ y_2 &= -\frac{1}{2} c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}. \end{aligned}$$

ОТВЕТ. $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$, $y_2 = -\frac{1}{2} c_1 e^x + c_2 e^{4x}$.

ПРИМЕР 5.19. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} dy_1 = 4y_1 + 6y_2, \\ dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy_2 = 3y_1 + 7y_2, \\ dx \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем характеристическое уравнение

$$= 0 \text{ или } \lambda \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ -11 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корнями характеристического уравнения будут $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$.

Решение системы находим в виде

$$\lambda = 1 \quad y_{1(1)} = p_{1(1)} e^x, \quad y_{2(1)} = p_{2(1)} e^x;$$

$$\lambda = 10 \quad y_{1(2)} = P_{1(2)} e^{10x}, \quad y_{2(2)} = P_{2(2)} e^{10x}.$$

Составим систему 5.17 для корня $\lambda = 1$

$$\begin{cases} (4-1)p_{1(1)} + 6p_{2(1)} = 0 \rightarrow 3p_{1(1)} + 6p_{2(1)} = 0 \rightarrow p_{1(1)} + 2p_{2(1)} = 0 \\ \{ 3p_{1(1)} + (7-1)p_{2(1)} = 0 \rightarrow 3p_{1(1)} + 6p_{2(1)} = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} = 0 \\ \{ 3p_{1(1)} + 6p_{2(1)} = 0 \rightarrow p_{1(1)} + 2p_{2(1)} = 0. \end{cases}$$

Если $p_{1(1)} = 2$, то $p_{2(1)} = -1$. Решение системы запишем

$$y_{1(1)} = 2e^x \text{ и } y_{2(1)} = -e^x.$$

Тема 5

Составим систему 5.17 для $\lambda=10$

$$\begin{cases} |(4-10)p_{1(2)} + 6p_{2(2)} = 0 & \rightarrow & -6p_{1(2)} + 6p_{2(2)} = 0, \\ |3p_1 + (7-10)p_2 = 0 & \rightarrow & 3p_1 - 3p_2 = 0. \end{cases}$$

Получим $p_1^{(2)} = p_2^{(2)}$. Если $p_1^{(2)} = 1$, то $p_2^{(2)} = 1$. Решение системы запишем в виде

$$y_{1(2)} = e^{10x}, \quad y_{2(2)} = e^{10x}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений будет

$$y_1 = 2c_1e^x + c_2e^{10x}, \quad y_2 = -c_1e^x + c_2e^{10x}.$$

ОТВЕТ. $y_1 = 2c_1e^x + c_2e^{10x}, \quad y_2 = -c_1e^x + c_2e^{10x}.$

5.5. Дифференциальные уравнения высших порядков в экономике

Дифференциальные уравнения широко применяются в экономических задачах. С помощью дифференциальных уравнений можно просчитать показатели хозяйственной деятельности, дать характеристику, сделать прогнозы для многих процессов экономики, управления, техники. Так, с помощью данного математического аппарата можно решать задачи о росте народонаселения (демографический процесс), о динамике роста цен при постоянной инфляции, о вложении капитала или инвестировании бизнеса и т.д.

Дифференциальные уравнения широко применяются для анализа укрупненных показателей макроэкономических моделей (валового национального продукта, национального дохода, объема основных фондов и т.д.). Линейные

дифференциальные уравнения используют для анализа динамики национального дохода на длительных отрезках времени.

Все это позволяет вырабатывать концепции экономического и социального развития, необходимые для изучения альтернатив экономической политики и ее последствий.

Примеры решения подобных задач можно найти в пособии [1]. В нашем пособии рассмотрим только некоторые из них.

ПРИМЕР 5.20. Скорость обесценивания оборудования из-за его износа в каждый данный момент времени пропорциональна его фактической стоимости. Начальная стоимость оборудования A_0 . Найти стоимость оборудования через t лет.

РЕШЕНИЕ. Обозначим стоимость оборудования в данный момент времени через A_t . Изменение стоимости (обесценивание) оборудования будет равно $A_0 - A_t$. Скорость обесценивания $(A_0 - A_t)$ пропорциональна A_t с коэффициентом пропорциональности k .

$$\frac{d(A_0 - A_t)}{dt} = kA_t .$$

Разделим переменные в этом уравнении

$$\frac{d(A_0 - A_t)}{A_t} = k dt .$$

Проинтегрируем обе части уравнения

Тема 5

$$\int \frac{d(A^0 - A^t)}{A^t} = \int k dt \text{ или } - \int \frac{dA^t}{A^t} = \int k dt .$$

Получим $\ln A_t = -kt + \ln c$. Общее решение дифференциального уравнения запишем в виде

$$ce^{-kt} \rightarrow A_0 = C \cdot c$$

Стоимость оборудования через t лет будет равна $A_t = A_0 e^{-kt}$

ОТВЕТ. $A_t = A_0 e^{-kt}$.

ПРИМЕР 5.21. Полные издержки производства y есть функция от объема производства x . Предельные издержки для всех значений x удовлетворяют уравнению $y' - 4y + x = 0$. Найти функцию предельных издержек, удовлетворяющих начальному условию $y(0) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Заданное дифференциальное уравнение можно переписать в виде $y' - 4y = -x$. Это неоднородное уравнение первого порядка. Используем подстановку $y = u(x)v(x)$. Так как $y' = u'v + v'u$, то уравнение в новых переменных будет

$$\frac{du}{dx} v + u - 4uv = -x \text{ или } v \frac{du}{dx} - 4u + u = -x. \quad (*)$$

Выбираем функцию $u(x)$ такой, чтобы $\frac{du}{dx} - 4u = 0$. Тогда из dx уравнения (*) получаем два уравнения: $\frac{du}{dx}$

$$1) -4u = 0, \quad 2) u = -x.$$

Решая первое уравнение, получаем

$$\frac{du}{u} = 4 dx \rightarrow \int \frac{du}{u} = \int 4 dx \rightarrow \ln u = 4x \rightarrow u = e^{4x}.$$

Подставим значение $u = e^{4x}$ во второе уравнение и найдем v .

$$\frac{dv}{dx} - 4v = -x \rightarrow dv = -xe^{4x} dx \rightarrow \int dv = \int -xe^{4x} dx \rightarrow v = - \int xe^{4x} dx.$$

Полученный интеграл берем по частям

$$v = - \int xe^{-4x} dx = - \left(\frac{1}{-4} e^{-4x} \left(x - \int 1 dx \right) \right) = \frac{1}{4} e^{-4x} (x + 1) + c.$$

$$y = e^{4x} \left(\frac{1}{4} e^{-4x} (x + 1) + c \right) = \frac{x + 1}{4} + ce^{4x}.$$

Общее решение уравнения получаем как $y = uv$

$$y = e^{4x} \left(\frac{1}{4} e^{-4x} (x + 1) + c \right) = \frac{x + 1}{4} + ce^{4x}.$$

Постоянную c найдем из начальных условий $y(0) = 0$.

$$y(0) = \frac{0}{4} + \frac{1}{4} + ce^{4 \cdot 0} \rightarrow c + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow c = -\frac{1}{4}.$$

Тема 5

$$\frac{4}{16} - \frac{16}{16} + \frac{16}{16}$$

Частное решение дифференциального уравнения

$$y = \frac{x e^{4x}}{4} - \frac{1}{16} (4x + e^{4x} + 1) y = - +$$
$$= \frac{4}{16} - \frac{16}{16} + \frac{16}{16}$$

есть искомая функция.

ОТВЕТ. $y = \frac{1}{16} (4x + e^{4x} + 1)$ – функция предельных издержек, если $y(0) = 0$



ОТВЕТЬТЕ НА ВОПРОСЫ

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Какое решение называется общим решением, а какое частным решением?
4. Какие дифференциальные уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными?
5. Какое дифференциальное уравнение называется однородным?
6. Какое дифференциальное уравнение называется линейным?
7. Как решать неоднородные дифференциальные уравнения?
8. Как решать линейные дифференциальные уравнения n-го порядка?
9. Что является решением системы линейные дифференциальных уравнений?



ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

I. Решить дифференциальные уравнения.

1. Уравнения с разделяющимися переменными:

а) $xy' - y = y^3$; б) $xуу' = 1 - x^2$; в) $y'tgx = y$.

2. Однородные уравнения:

а) $(x^2 - y^2)dy + 2xy = 0$; б) $y = -x + y$; x

в) $(x - y) ydx - x^2dy = 0$; г) $y' = \frac{y}{x} - 1$.

3. Линейные уравнения:

а) $y' - y \sin x = \sin x \cos x$; б) $y' - \frac{y}{x} = x$; x

4. Дифференциальные уравнения II-го порядка:

а) $y'' = \cos x$; б) $y'' = 2y'$;

в) $y'' - 4y' + 3y = 0$; г) $y'' - 4y' + 13y = 0$.

5. Системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dy_1 \\ dx = 5y_1 + 4y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} dy_2 \\ dx = 2y_1 + y_2, \end{cases}$$

а) { б) {

Тема 5

$$\frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 3y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 4y_2.$$

II. Решить задачи.

1. Скорость обесценивания оборудования из-за его износа в данный момент времени пропорциональна его фактической стоимости. Коэффициент пропорциональности равен 3. Начальная стоимость оборудования 10000 грн. Найти стоимость оборудования A_1 через 1 год.

2. Полные издержки производства y есть функция от объема производства x . Предельные издержки для всех значений x удовлетворяют уравнению $x^2 y' + xy + 2 = 0$.

Найти функцию предельных издержек.

ОТВЕТЫ

Тема 1. Производные, дифференциалы.
Исследование функций

I. 1) $2x(e^{-x^2} + a^{x^2} \ln a)$; 2) $\frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$; 3) $6x^{3x}(1 + \ln x)$; 4) $5(1 + \ln x)$;

5) $3x(2\sin x + x\cos x)$; 6) $\frac{2x}{y - x \ln y}$; 7) $6x^2(4x + 1)$; 8) $\frac{1}{10x} \sqrt{x - x^2}$;

9) $-\frac{4}{2}$; 10) $-3\sin 3x$; 11) \cdot ; 12) $\frac{2}{5x + 4x + 1} x x - y \ln x (5x + 3) \cdot \ln 2$

$x(2 + x \ln 2)$; 14) $15x^2$; 15) $2 \left(\frac{x}{2}\right)^{2x} \left(1 + \ln \frac{x}{2}\right)$; 16) $21(3x+5)^6$. 13) $x \cdot 2$

II. 1) 0; 2) 1; 3) $\frac{17}{6}$; 4) 1.

III. 1) -9; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $9x + y - 1 = 0$; 4) $x + 11y + 9 = 0$.

IV. 1) $dy = 9(2 + 3x)^2 dx$; 2) $dy = 5\cos 5x dx$;

$\frac{1}{x}$
3) $dy = dx$; 4) $dy = (2x + 2 \ln 2) dx$.

$$\sqrt[3]{x^2}$$

V. 1) 0,5151; 2) 3,875 .

VI. 1) $12x - 6$; 2) $5(6\cos x - 6x\sin x + x^2 \cos x)$; 3) 0 .

VII. 1) 3; 2) 2; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{3}{5}$; 5) 0; 6) $\frac{9}{50}$; 7) 0; 8) -27 .

Тема 2. Применение производной для исследования функций

- I. 1) когда $x \in]-\infty, \frac{7}{2}[$, когда $x \in]\frac{7}{2}, +\infty[$;
- 2) когда $x \in]\frac{7}{2}, +\infty[$, когда $x \in]-\infty, \frac{7}{2}[$;
- 3) когда $x \in]0, 1[$, когда $x \in]-1; 0[$;
- 4) когда $x \in]-5, +\infty[$;
- 5) монотонно при $x \in D(y)$, в точке $x = -1$ функция неопределена;
- 6) когда $x \in]-\infty, \frac{5}{2}[$, когда $x \in]\frac{5}{2}, +\infty[$;
- 7) когда $x \in]\frac{-2 - \sqrt{13}}{9}, \frac{-2 + \sqrt{13}}{9}[$;
- когда $x \in]-\infty, \frac{-2 - \sqrt{13}}{9}[$ и $]\frac{-2 + \sqrt{13}}{9}, +\infty[$.

II. 1) $y_{\min}(2) = 4$, $y_{\max}(-2) = 4$; 2) $y_{\max}(0) = 3$;

5) функция экстремумов не имеет;

6) $y_{\min}(1) = -35$;

5

7) функция экстремумов не имеет;

8) $y_{\max}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 201$; $\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$\left(\frac{\pi}{4}\right)$

3) $y + 2k\pi = -2$, $y + 2k\pi = 2$; 4) $y(0) = 0$, $y(2) =$;

9) $y_{\min}(0,7886) = 5,9$; $y_{\max}(0,2116) = 6,2728$; 10) $y_{\min}(e) = e$;

11) $y_{\min}(|-|) = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $y_{\max}(0) = 4$; 12) $y_{\min}(4) = -32$, $y_{\max}(0) = 0$.

III. 1) $\min y = y\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{25}{2}$, $\max y = y(0) = y(7) = 12$;

2) $\min y = y(0) = -10$, $\max y = y(2) = 10$;

3) $\min y = y(2) = 2(1 - \ln 2)$, $\max y = y(1) = 1$;

4) $\min y = y(\pm 1) = 4$, $\max y = y(\pm 2) = 13$;

5) $\min y = y(0) = 0$, $\max y = y(2) = 8$;

6) $\min y = y(0) = -1$, $\max y = y(4) = \frac{3}{5}$;

$$\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad 7) \min y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \max y = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$8) \min y = y(0) = 1, \max y = y\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

Ответы

IV. 1) выпуклая на $x \in]-\infty, 1[$, вогнутая на $x \in]1, +\infty[$, $x = 1$ – точка перегиба;

2) вогнутая на $x \in]-\infty, +\infty[$. точек перегиба нет;

3) выпуклая на $x \in]-2, +\infty[$, вогнутая на $x \in]-\infty, -2[$, $x = -2$ – точка перегиба;

4) выпуклая на $x \in]-\infty, -3[$ и $x \in]2, +\infty[$, вогнутая на $x \in]-3, 2[$, $x = -3$ и $x = 2$ – точки перегиба;

5) выпуклая на $x \in]2, 4[$, вогнутая на $x \in]-\infty, 2[$ и $x \in]4, +\infty[$, $x = 2$ и $x = 4$ – точки перегиба.

V. 1) $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(-1) = -1$;

$$2) y_{\max} = y\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^4}{16}, y_{\min} = y(0) = 0.$$

VI. 1) $y_{\max} = y(0) = 0$; 2) $y_{\min} = y(0) = 15$. VII. 1) $y=0$; 2) $y = x$; 3) $y = x - 2$; 4) $x = 3$; 5) $x = -2$ и $y = 2x - 4$; 6) $x = 2$ и $x = -2$.

- VIII.** 1) y при $x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$, y при $x \in]-3, 1[$;
- 2) y при $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 2[$, y при $x \in]2, +\infty[$;
- 3) y при $x \in]-1, 3[$, y при $x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$;
- 4) y при $x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$, y при $x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$;
- 5) y при $x \in]3, +\infty[$, y при $x \in]-\infty, 3[$;
- 6) y при $x \in]-\infty, -2[\cup]0, 2[$, y при $x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$; 7) y при $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, y при $x \in]0, 1[$.

Тема 3. Интегралы и их применение

I. 1) $x - \arctg x + c$; 2) $x^3 - x^2 + 5x + c$; 3) $x - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{2} \ln(x-2)^2 + c$;

4) $\frac{1}{3} e^{3x} (3 - 1) + c$; $(3x + 1)_{101} - \frac{x^3}{3} (3 \ln x - 1) + c$; $x^2 + c$ 5) $x^2 + c$; 6) $x^2 + c$;

9 303 9

7) $\frac{1}{3} \cos 3x + c$; 8) $\frac{1}{4} (2x + \sin 2x) + c$.

II. 1) 1; 2) $\frac{100}{32}$; 3) $-(1 - \cos 1)$; 4) $\frac{\pi}{3} - 1$; 5) $\frac{25}{3}$; 6) $\arctg 6 - \arctg 5$.

III. 1) $S = \frac{32}{3}$; 2) $S = \frac{8}{3}$; 3) $S = \frac{9}{2}$; 4) $S = 4$; 5) $S = \frac{13}{3}$.

IV. 1) 75π ; 2) 64π ; 3) $18 \frac{2}{15}\pi$.

V. 1) $2\sqrt{2} + \ln(2 + \sqrt{2})$; 2) $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1) \approx 9,07$;

3) $2\sqrt{6} + \ln|\sqrt{2} + \sqrt{3}|$; 4) $1 + \sqrt{1+l^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{1+l^2}-1}{\sqrt{1+l^2}+1} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)$.

VI. 1) $S = 2\pi(4 + 3\ln 3)$; 2) $S = 100\pi$; 3) $\frac{14}{3}\pi$.

VII. 1) среднее значение издержек равно 17 при объеме продукции в $\frac{5}{3}$ единиц;

2) $t_{cp} < 54,55$ мин.; 3) 8,5 грн.

VIII. 1) интеграл не существует; 2) интеграл расходится; 3) интеграл сходится;

4) Если $\alpha > 1$, то $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$; если $\alpha \leq 1$ то интеграл расходится;

Тема 4. Функции многих переменных. Кратные интегралы

- I. 1) Прямая линия при $x = \text{const}$, прямая линия при $y = \text{const}$, гипербола при $z = \text{const}$;
- 2) парабола при $x = \text{const}$, парабола при $y = \text{const}$, гипербола при $z = \text{const}$;

- 3) кривая третьего порядка при $x=\text{const}$, кривая третьего порядка при $y=\text{const}$, эллипс при $z = \text{const}$;

Ответы

- 4) парабола при $x=\text{const}$, парабола при $y = \text{const}$, гипербола при $z=\text{const}$.

II. 1) Вся плоскость за исключением точек окружности $x^2+ y^2=25$;

2) часть плоскости внутри первого и третьего координатных углов (без границ);

3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$; 4) вся плоскость xOy ;

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

5) вся плоскость, кроме точки $x = 0, y = 0$;

6) плоскость внутри окружности $x^2 + y^2 = 4$.

III. 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3, \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^3x$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{x^4}}, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; 3) $\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \frac{\partial z}{\partial y} = 1$;

4) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

5) $\frac{\partial z}{\partial x} = 45x_2 y_3 (5x_3 y_3 + 2)_2, \frac{\partial z}{\partial y} = 45x_3 y_2 (5x_3 y_3 + 2)_2$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (3x_2 + y_2 + z_2) e^{x \cdot (x_2 + y_2 + z_2)}, \frac{\partial u}{\partial y} = 2x y e^{x \cdot (x_2 + y_2 + z_2)}, \frac{\partial u}{\partial z} = 2x z e^{x \cdot (x_2 + y_2 + z_2)}$$

$$6) \quad = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$7) \quad = = = ; 8) \quad = yx = x \ln x ; \frac{\partial z}{\partial x} x + y + z \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial z} x^{y-1} \frac{\partial z}{\partial z} y$$

$$9) \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \bar{u} = xy x^{zy-1}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \bar{u} = \frac{1}{z} x^{zy} \ln x, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \bar{u} = -z y^2 x^{zy} \ln x ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} x^4 + 3x^2 y^2 - 2xy^3 \quad \frac{\partial z}{\partial y} y^4 + 3x^2 y^2 - 2x^3 y$$

$$10) \quad \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{2}{(x^2 + y^2)^2} .$$

IV. 1) $\approx 1,08$; 2) $\approx 1,32$.

V. 1) $z_{\min}(M) = 4$ в точке $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$; 2) $z_{\max}(M) = 10$ в точке $M(0,0)$;

3) $z_{\max}(M) = 8$ в точке $M(2, -2)$; 4) функция не имеет экстремума;

5) $z_{\min}(M) = -21$ в точке $M(1,4)$; 6) функция не имеет экстремума. 14

VI. 1) $\frac{1}{3} \frac{a^2 b^2}{3} \frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{12}$; 4) 2; 5) .

VII. 1) $\frac{2}{3}\pi$; 2) $\frac{abc}{12}(a^2 + b^2 + c^2)$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) a .

VIII. 1) 18; 2) $\frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)$; 3) $\frac{125}{2}$; 4) 20π ; 5) 18; 6) 16π .

IX. 1) $186\frac{2}{3}$; 2) $78\frac{15}{32}$; 3) $\frac{98}{15}$; 4) $\frac{200}{3}$.

X. 1) $\frac{55}{6}$; 2) $\frac{125}{3}\pi$; 3) $\frac{19}{6}\pi$; 4) $\frac{81}{4}\pi$.

Тема 5. Дифференциальные уравнения

I. 1. а) $x = \sqrt{1 + y^2}$, $y \neq 0$; **б)** $y + x = \ln cx$; **в)** $y = c \sin x$.

2. а) $8(x^2 - y^2) = 3y^3$; **б)** $y = \frac{c}{2x} - \frac{x}{2}$; **в)** $x = ce^{y/2}$; **г)** $y = \frac{1}{2} \ln \frac{c}{x}$.

3. а) $y = 1 - \cos x + ce^{-\cos x}$; **б)** $y = cx + x^2$; **в)** $x = cy^2 - \frac{1}{y}$.

в) $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$;

г) $y = e^x (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$.

c

4. а) $y = \cos x + c_1 x + c_2$;

б) $y = c_1 e^{2x} + c_2$;

5. а) $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$, $y_2 = -c_1 e^x + \frac{2}{2} e^{7x}$;

c

б) $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$, $y_1 = c_1 e^{-x} + \frac{2}{2} e^{5x}$.

II. 1. $A_1 \approx 3750$ грн.; **2.** $y = -\frac{2 \ln x}{x} + \frac{3}{x} + \frac{c}{x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойчик І. М., Харів П.С., Холчан М.І. Економія підприємств. – Львів: В-во «Сполом», 1998. –212 с.
2. Зайцев Н.Л. Экономика промышленных предприятий. – Практикум. Учеб. пособие. –М.: ИНФРА-М, 1999. –192 с.

3. Сідун В.А., Пономарьова Ю.В. Економіка підприємства; Навч.-метод посібник для практичних і семінарських занять /Харк. держ. університет харчування та торгівлі. – Харків: 2003. – 324 с.
4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 640 с.
5. Математика для экономистов. Решение задач и варианты индивидуальных заданий: Учебное пособие /Под редакцией проф. Курпы Л.В. – Харьков: ХГПУ, 1999. – 333 с.
6. Высшая математика: Учебное пособие в 4^х т. /Курпа Л.В., Кашуба Ж.Б. и др.: Под редакцией проф. Курпы Л.В. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 344 с. – Рус. и англ. языками.
7. Справочник по математике для экономистов: Учебное пособие /Под редакцией проф. Ермакова В.И. – 3^е изд., перераб. и доп. – М.: ИМФРА-М, 2007. – 464 с. (100летие РЭА им. Г.В. Плеханова).
8. Привалов И.И Аналитическая геометрия. – М.: ФМ, 1963. – 272 с.
9. Лобода А.И. Математический анализ: Учебное пособие для иностранных студентов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 180 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ -----	3
Тема 1. ПРОИЗВОДНЫЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ -----	5
Лексика темы -----	6
1.1. Понятие производной -----	7
1.2. Геометрический и физический смысл производной-----	9
1.3. Производные основных элементарных функций-----	12
1.4. Свойства производной -----	13
1.5. Производные высших порядков -----	16
1.6. Дифференциал функции-----	17
1.7. Теоремы о среднем для дифференцируемых функций.-----	24
1.8. Правило Лопиталю-----	28
Ответьте на вопросы -----	30
Задания для самостоятельной работы-----	31
Тема 2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ -----	34
Лексика темы -----	35
2.1. Интервалы монотонности-----	35
2.2. Точки экстремума-----	41
2.3. Наибольшее и наименьшее значение функции на интервале -----	45
2.4. Выпуклость или вогнутость кривой Точки перегиба графика -----	50
2.5. Исследование функций на экстремум с помощью производных высших порядков-----	56

2.6. Асимптоты графика	58
2.7. Общая схема исследования функций и построение графиков.....	60

Оглавление

2.8. Приложения производной в экономике.....	67
Ответьте на вопросы	74
Задания для самостоятельной работы.....	75
Тема 3. ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ _____	78
Лексика темы _____	79
3.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла _____	80
3.2. Таблица простейших интегралов _____	81
3.3. Основные свойства неопределенного интеграла _____	82
3.4. Основные методы интегрирования _____	84
3.5. Понятие определенного интеграла и его основные свойства _____	98
3.6. Методы определенного интегрирования _____	102
3.7. Вычисление площадей плоских фигур, длины дуги плоской кривой, объема тел вращения, площади поверхности вращения _____	106
3.8. Несобственные интегралы _____	113
3.9. Экономический смысл определенного интеграла. Использование понятия интеграла в экономике _____	117
Ответьте на вопросы _____	124
Задания для самостоятельной работы _____	125

Тема 4. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. КРАТНЫЕ

ИНТЕГРАЛЫ-----128

Лексика темы _____	129
4.1. Обозначение и область определения функции многих переменных _____	129
4.2. Частные производные и дифференциалы функций многих переменных _____	136
4.3. Экстремум функции многих переменных _____	142
4.4. Экстремум функций двух переменных _____	148

Оглавление

4.5. Кратные интегралы _____	151
Ответьте на вопросы _____	166
Задания для самостоятельной работы _____	167
Тема 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ-----170	
Лексика темы _____	171
5.1. Общие понятия _____	172
5.2. Дифференциальные уравнения первого порядка _____	177
5.2.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными _____	178
5.2.2. Однородные уравнения первого порядка _____	179
5.2.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка _____	181
5.2.4. Уравнение Бернулли _____	185
5.3. Дифференциальные уравнения высших порядков _____	187
5.3.1. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка _____	187
5.3.2. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами _____	189

5.3.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами _____	192
5.4. Системы дифференциальных уравнений первого порядка	197
5.4.1. Общие понятия _____	197
5.4.2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами _____	199
5.5. Дифференциальные уравнения высших порядков в экономике	205
_____	208
_____	208
Задания для самостоятельной работы _____	208
ОТВЕТЫ _____	210
ЛИТЕРАТУРА _____	216

Навчальне видання

Упорядники: ЛОБОДА Анатолій Іванович
ЛАПУЗІНА Олена Миколаївна

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Частина II

Похідна Дослідження функцій.
Інтеграли. Диференційні рівняння

Навчальний посібник для студентів-іноземців

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував доц. Гаврилюк Ю.Р.

В авторській редакції

Оригінал-макет підготувала Космачова Т.С.

План 2012 р., поз. 151

Підписано до друку . Формат 60x84 1/8. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 4,7.
Наклад 150 прим. Зам. № . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХП» . 61002, Україна, Харків, вул. Фрунзе, 21
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

Друкарня НТУ «ХП» 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21