

УДК 539.3

Э. А. СИМСОН, С. А. НАЗАРЕНКО

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ И ДИНАМИКИ ПОВОРОТНО-СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ (ПОДШИПНИКОВЫХ УЗЛОВ КАЧЕНИЯ)

Особенности поворотных симметричных конструкций позволяют путем создания специализированных теорий и численных технологий перейти от общих методов анализа к специальным, значительно меньшей размерности. Рассмотрены и проанализированы методы прочностного и динамического расчета на примере подшипников качения. Доработка метода решения спектральной проблемы ЦСК базируется на включении метода квазициклических разложений «внутрь» алгоритма итерационного преобразования подпространства.

Ключевые слова: механика, поворотные симметричные конструкции, подшипники качения, блочная итерация, конечные элементы.

Введение. В механике и машиностроении широко распространены многокомпонентные поворотные (циклически) симметричные конструкции (ЦСК) [1–4]. Особенности ЦСК позволяют путем создания специализированных теорий и численных технологий перейти от общих методов анализа систем к специальным, существенно меньшей размерности [1–5].

Многообразные подшипники качения являются как наиболее распространенным сборочным узлом в машиностроении, так и примером ЦСК многокомпонентной структуры [5–9]. Подшипниковые узлы качения (вал – внутреннее кольцо – ролики – сепаратор – внешнее кольцо – «адаптор») осуществляют пространственную фиксацию роторов и передают статические и динамические усилия от вращающихся деталей на неподвижные опоры. Появляющаяся при функционировании подшипниковых узлов качения вибрация обуславливается большим количеством факторов и достаточно сложно структурирована [6, 7].

При расчетных исследованиях ЦСК применяются континуальные и дискретные модели. Континуальные позволяют учесть конструктивные особенности отдельных элементов и определить характеристики подшипников качения, как связанной системы. Дискретные (с сосредоточенными параметрами) модели более просты и часто применяются для исследования эффектов отклонений от ЦСК, статистических параметров динамических и прочностных характеристик. Анализ научно-технической документации показал, что проблемы динамики подшипниковых узлов качения недостаточно исследованы [6, 7].

Анализ ЦСК на примере подшипника качения. Подшипники качения будем рассматривать как многокомпонентную связанную систему при нелинейной изменчивости характеристик материалов с учетом технологической наследственности, возникающей при их изготовлении [8, 9]. Наличие симметрии с позиции расчета дает существенные преимущества, позволяя свести задачу к анализу модели одного сектора с наложенными условиями цикличности.

ЦСК можно представить в виде N секторов, геометрические и физические параметры которых сохраняют инвариантность при повороте относительно оси вращения на любой угол, кратный $\gamma = 2\pi/N$. Порядок симметрии N – число роликов в случае подшипнико-

вых узлов качения (рис. 1).

Для анализа использовался метод конечных элементов (МКЭ), считающийся наиболее универсальной и мощной технологией моделирования сложных конструкций и адаптированный к поворотной симметрии [10, 11]. Для геометрического представления ЦСК достаточно построить аппроксимирующую геометрическую модель одной типовой подструктуры. Описания остальных получаются из нее преобразованием поворотной симметрии. В общем случае нагружения секторов требуют индивидуальной аппроксимации.

Анализ ЦСК начинается с построения модели сектора, на которую наносится конечноэлементная сетка (рис. 2). Вводятся условия закрепления конструкции, а также поворотной симметрии на границах с сопредельными секторами.

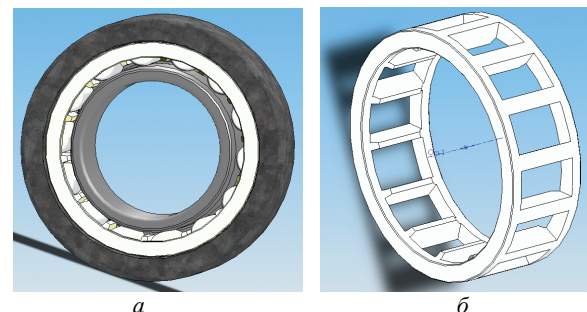


Рисунок 1 – Твердотельная модель:
а – подшипника качения; б – сепаратора

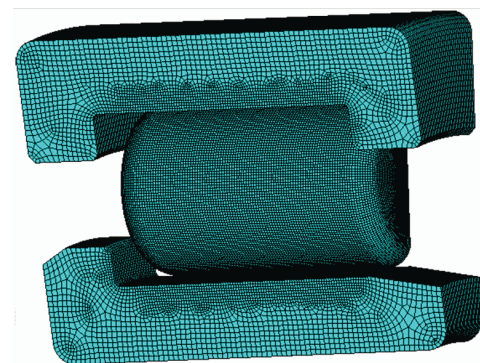


Рисунок 2 – КЭ модель контактирующих фрагментов ролика, внутреннего и внешнего колец с приставными бортиками

Блочное уравнение равновесия конечноэлемент-

ной модели j – той типовой подструктуры связывает обобщенные перемещения j – го граничного сечения \bar{y}_{1j} , внутренней области сектора \bar{y}_{Sj} , $(j + 1)$ -го граничного сечения \bar{y}_{2j} с внешними нагрузками \bar{F}_j и внутренними реакциями \bar{q}_{1j} и \bar{q}_{2j} ($j = \overline{1, N}$), замещающими воздействие сопредельных подструктур

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1S} & K_{12} \\ K_{S1} & K_{SS} & K_{S2} \\ K_{21} & K_{2S} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_{1j} \\ \bar{y}_{Sj} \\ \bar{y}_{2j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{1j} \\ \bar{F}_{Sj} \\ \bar{F}_{2j} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{q}_{1j} \\ 0 \\ \bar{q}_{2j} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Размерность блоков матрицы жесткости K зависит от числа степеней свободы внутренней и граничной областей сектора. Граничные зоны в зависимости от геометрической формы сектора могут состоять из нескольких несвязных областей. Для их описания вводится связанная система координат, одна из осей которой направлена вдоль оси циклической симметрии, две другие поворачиваются вокруг нее при переходе от одного сектора к другому на угол γ . При сборке модели j – тая граничная зона совмещает левое сечение j – го сектора и правое сечение $(j - 1)$ -го сектора.

Связанная система координат позволяет представить глобальную матрицу жесткости ЦСК в квазициклической форме

$$K = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_3 \\ A_3 & A_1 & A_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_3 & A_1 & A_2 \\ A_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_3 & A_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $A_1 = \begin{bmatrix} V_1 K_{11} V_1^T + V_2 K_{22} V_2^T & V_1 K_{1S} \\ K_{S1} V_1^T & K_{SS} \end{bmatrix}$,

$$A_2 = \begin{bmatrix} V_1 K_{12} V_2 & 0 \\ K_{S2} V_2^T & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_2^T, \quad (3)$$

V_1 и V_2 – матрицы перехода от систем координат $(j - 1)$ -го и j -го сектора к связанным координатам j -го сечения. Вектор нагрузок имеет вид

$$\bar{F} = \{\bar{F}_j\}_{j=1}^N; \quad \bar{F}_j = \begin{bmatrix} V_1 \bar{F}_{1j} + V_2 \bar{F}_{2j} \\ \bar{F}_{Sj} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Квазициклическая структура позволяет от анализа глобальной системы уравнений ЦСК перейти к решению систем уравнений, размерность которых обуславливается числом обобщенных перемещений внутренней области и граничного сечения сектора:

$$\Lambda_j \bar{\xi}_j = \bar{G}_j, \quad j = \overline{1, t, N}, \quad (5)$$

где $\Lambda_j = A_1 + (A_2 + A_3) \cos \gamma j + i(A_2 - A_3) \sin \gamma j$,

$$\bar{G}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N (\cos k\gamma \cdot \bar{F}_k - i \sin k\gamma \cdot \bar{F}_k).$$

Перемещения \bar{y}_j , соответствующие квазистроке, формируются суперпозицией решений (5) с соответствующими весовыми коэффициентами.

Комплексные системы уравнений (5) в вещественной форме представляют системы уравнений с

симметричной матрицей коэффициентов, что позволяет использовать для их реализации стандартное программное обеспечение

$$\begin{bmatrix} \Lambda_j^{\text{Re}} & -\Lambda_j^{\text{Im}} \\ \Lambda_j^{\text{Im}} & \Lambda_j^{\text{Re}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\xi}_j^{\text{Re}} \\ \bar{\xi}_j^{\text{Im}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{G}_j^{\text{Re}} \\ \bar{G}_j^{\text{Im}} \end{Bmatrix}, \quad j = \overline{1, t, N}. \quad (6)$$

Метод квазициклических разложений (МКЦР) позволяет перейти от решения задачи большой размерности к нескольким существенно меньшей. Эффективность метода можно значительно приумножить суперэлементной сверткой (полной или частичной конденсацией) внутренней области.

Для нерезонансных задач динамики ЦСК применение МКЦР отличается только физическим значением матрицы коэффициентов, которая в этом случае является матрицей динамической жесткости

$$K_d = K - \omega^2 M,$$

где M – матрица масс, ω – частота вынуждающей силы.

Из решения обобщенного уравнения колебаний многокомпонентных структур с учетом нелинейных диссипативных эффектов видно, что выражения, входящие в уравнение резонансной кривой, представляют функционалы, зависящие от резонирующей собственной частоты и формы колебаний [12]. При решении спектральной проблемы ЦСК на основе сектора возможны разнообразные комбинации МКЦР и блочной (или обратной) итерации, обуславливающие различно сформированные группы частот и форм.

Решение задачи в первом варианте повторяет схему (1) – (6), где матрица коэффициентов в уравнениях (1) представляет матрицу динамической жесткости K_d сектора, нагружение сектора $\bar{F}_j \equiv 0$, ω – искомые собственные частоты. Тогда (5) преобразуются в систему однородных уравнений.

Итерационный метод решения проблемы собственных значений позволяет найти относящиеся к каждому j -му параметру цикличности спектры частот ω_{jk} , $j = \overline{1, t, N}$. При подобном подходе неосуществим упорядоченный поиск заданной частоты.

Собственные формы ЦСК для ω_{jk} имеют вид

$$\bar{y}^{(jk)} = \{\bar{y}_n^{(jk)}\}_{n=1}^N = \left\{ \cos j \cdot n\gamma \cdot \bar{\xi}_{kj}^{\text{Re}} - \sin j \cdot n\gamma \cdot \bar{\xi}_{kj}^{\text{Im}} \right\}_{n=1}^N.$$

Вторая схема предполагает включение МКЦР «внутрь» алгоритма блочной итерации решения спектральной проблемы ЦСК (на этапе итерационного преобразования подпространства). Подход позволяет отыскивать нижнюю часть спектра (либо пакет частот, ближайших к заданному значению, при использовании «сдвигки») вне зависимости от принадлежности соответствующих собственных форм тому или иному параметру цикличности.

В этом варианте метод итерации подпространства применяется к глобальной модели конструкции в связанной системе координат $KY = MX$.

Для матрицы начальных приближений $X^0 = \{X_j^0\}_{j=1}^N$ формирование правой части $F = MX^0$ складывается посекторно

$$F = \{F_j\}_{j=1}^N = \{M_1 X_{j-1} + M_2 X_j + M_3 X_{j+1}\}_{j=1}^N;$$

$$(X_0 = X_N); (Y_{N+1} = Y_1),$$

где структура M_1, M_2, M_3 аналогічна A_1, A_2, A_3 (3).

После того как матрица правых частей сформирована, вычисления проводятся по схеме МКЦР (2) – (5). Операции метода итерирования подпространства $Y^T K Y$ и $Y^T M Y$ фактически сводятся к процедуре определения правых частей следующего приближения F , то есть $KY^{(2)} = F^{(1)} = MY^{(1)}$. При таком подходе осуществляется направленный поиск спектра нижних частот всей ЦСК, при этом число отыскиваемых частот зависит лишь от размерности итерированного подпространства. Процедура получения решения статической задачи ЦСК с различным нагружением секторов становится базовым модулем для динамических задач, а размерность системы разрешающих уравнений определяется дискретной моделью одного сектора.

Колебания подшипников качения обуславливаются в основном деформациями его колец – с «узловыми диаметрами». Главные специфические особенности колебаний подшипников качения как ЦСК связаны с наличием в спектрах двукратных собственных частот. Параметр цикличности j характеризует целое число волн перемещений на окружности колец («узловые диаметры»). Отметим, что собственные формы, соответствующие $j = 0$ и $j = N/2$ – одинарные, а соответствующие прочим j – кратные.

Отличительная черта группы собственных форм, соответствующих $j = 0$ – синфазные колебания секторов с одинаковыми амплитудами. В группе форм колебаний с параметром цикличности $j = N/2$ также сектора совершают колебания с одинаковыми амплитудами, но соседние сектора колеблются в противофазе. В остальных группах j собственные формы колебаний имеют более сложный вид. В зависимости от номера группы форма колебаний имеет несколько целых волн перемещений в окружном направлении, поэтому соседние пролеты между роликами имеют всегда разные амплитуды колебаний. С увеличением j искаженные «узловые диаметры» все больше искривляются и располагаются на кольцах вдоль роликов.

В силу сложности и связанности конструкции узловые линии сильно искривлены, что затрудняет экспериментальную идентификацию параметра j для соответствующей формы, особенно при их большом числе [6, 7]. Идентификация собственных форм затруднена потому, что по числу всплесков на периферии не всегда можно определить параметр j . Собственные частоты обычно возрастают с ростом числа j .

Выводы. Рассмотрены и проанализированы методы прочностного и динамического расчета ЦСК (на примере подшипников качения). Доработка метода решения спектральной проблемы ЦСК базируется на включении МКЦР «внутрь» алгоритма итерационного преобразования подпространства. На следующем этапе работ будет проведен анализ чувствительности прочностных и динамических характеристик ЦСК.

Список литературы: 1. Shi C. Vibration mode structure and simplified modelling of cyclically symmetric or rotationally periodic systems / C. Shi, R. G. Parker // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engi-

neering Sciences. – 2015. – Vol. 471, № 2173. – P. 20140672. 2. Андреев А. Г. Основные направления исследований ученых НТУ «ХПИ» в области механики / А. Г. Андреев, С. А. Назаренко // Вісник НТУ «ХП». – 2015. – № 57 (1166). – С. 3–7. 3. Шушиков А. Н. Расчет напряжений циклически-симметричных пространственных конструкций / А. Н. Шушиков, С. Ю. Мисюра // Вісник НТУ «ХП». – 2013. – № 63 (1036). – С. 139–147. 4. He Y. A scaled boundary finite element method for cyclically symmetric two-dimensional elastic analysis / Y. He // Computers and Structures. – 2013. – № 120. – P. 1–8. 5. Назаренко С. А. Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы / С. А. Назаренко // Вестник НТУ «ХП». – 2006. – № 32. – С. 119–122. 6. Shah D. S. A review of dynamic modeling and fault identifications methods for rolling element bearing / Shah D. S., Patel V. N. // Procedia Technology. – 2014. – № 14. – P. 447–456. 7. Симсон Э. А. Методика анализа чувствительности вибрационных параметров механических систем / Э. А. Симсон, С. А. Назаренко, М. В. Трохман // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2008. – № 2/4. – С. 44–47. 8. Симсон Э. А. Холодная раскатка заготовок подшипниковых колец / Э. А. Симсон, В. В. Овчаренко, В. И. Демидов и др. // Вісник НТУ «ХП». – 2011. – № 52. – С. 156–160. 9. Автономова Л. В. Моделирование процесса горячей раскатки колец подшипника / Л. В. Автономова, Е. Д. Грозенко, Э. А. Симсон // Вісник НТУ «ХП». – 2015. – № 4 (1113). – С. 158–162. 10. Bogomolov S. I. Application of a superparametric finite shell element to the calculation of turbine blade vibrations // S. I. Bogomolov, S. S. Lutsenko, S. A. Nazarenko // Strength of Materials. – 1982. – Vol. 14, № 6. – P. 796–799. 11. Guo Y. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model / Y. Guo, R. G. Parker // Mechanism and Machine Theory. – 2012. – № 51. – P. 32–45. 12. Марусенко С. І. Аналіз статико-динамічних нелінійних процесів у елементах структурно зв'язаних систем / С. І. Марусенко, С. О. Назаренко, Е. А. Симсон // 36. наук. пр. Академії внутрішніх військ МВС України. – 2010. – № 1 (15). – С. 65–75.

Bibliography (transliterated): 1. Shi C., Parker R.G. Vibration mode structure and simplified modelling of cyclically symmetric or rotationally periodic systems. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2015, vol. 471, No 2173, pp. 20140672. 2. Andreev A. G., Nazarenko S.A. Osnovnye napravleniya issledovaniy uchenykh NTU "KhPI" v oblasti mehaniki. Visnyk NTU "KhPI", 2015, No 57 (1166), pp. 3–7. 3. Shupikov A. N., Misyura C.Yu. Raschet napryazhenij ciklicheski-simmetrichnyh prostranstvennyh konstrukcij. Visnyk NTU "KhPI", 2013, No 63 (1036), pp. 139–147. 4. He Y. A scaled boundary finite element method for cyclically symmetric two-dimensional elastic analysis. Computers and Structures, 2013, No 120, pp. 1–8. 5. Nazarenko S. A. Analiz chuvstvitel'nosti konstrukcij pri vozdejstvii fizicheskikh polej razlichnoj prirrody. Visnyk NTU "KhPI", 2006, No 32, pp. 119–122. 6. Shah D. S., Patel V. N. A review of dynamic modeling and fault identifications methods for rolling element bearing. Procedia Technology, 2014, No 14, pp. 447–456. 7. Simson E. A., Nazarenko S.A., Trohman M.V. Metodika analizy chuvstvitel'nosti vibracionnyh parametrov mehanicheskikh sistem. Vostochno-evropejskij zhurnal передовых технологий, 2008, No 2/4, pp. 44–47. 8. Simson E. A., Ovcharenko V.V., Demidov V.I. i dr. Holodnaya raskatka zagotovok podshypnikovovyh kolec. Visnyk NTU "KhPI", 2011, No 52, pp. 156–160. 9. Avtonomova L. V., Grozenok E.D., Simson E.A. Modelirovanie processa goryachej raskatki kolec podshypnika. Visnyk NTU "KhPI", 2015, No 4 (1113), pp. 158–162. 10. Bogomolov S. I., Lutsenko S.S., Nazarenko S.A. Application of a superparametric finite shell element to the calculation of turbine blade vibrations.

Strength of Materials, 1982, vol. 14, No 6, pp. 796-799. **11.** Guo Y., Parker R.G. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model. Mechanism and Machine Theory, 2012, No 51, pp. 32-45. **12.** Marusenko S. I., Nazarenko S.O., Simson E.A. Analiz statyko-

dynamichnykh nelinejnykh procesiv u elementakh strukturno zvyazanykh system. Zb. nauk. pr. Akademiyi vnutrishnikh vijs'k MVS Ukrayiny, 2010, No 1 (15), pp. 65-75.

Поступила (received) 05.02.2016

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Назаренко Сергей Александрович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, кафедра «Сопротивление материалов», Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057) 700-29-72; e-mail: nazarenko_serzh@mail.ua

Nazarenko Sergej Aleksandrovich – Candidate of Technical Sciences, Senior Staff Scientist, Department of Strength of Materials, National Technical University «KhPI», tel.: (057) 700-29-72; e-mail: nazarenko_serzh@mail.ua.

Симсон Эдуард Альфредович – доктор технических наук, профессор, кафедра «Сопротивление материалов», Национальный технический университет «ХПИ», тел.: (057)- 700-29-72, e-mail: nazarenko_serzh@mail.ua.

Simson Eduard Alfredovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Strength of Materials, National Technical University «KhPI», tel.: (057)- 700-29-72, e-mail: nazarenko_serzh@mail.ua.