

$$\Delta_p H = H(t - t_{p-1}) - H(t - t_p); A_{\text{инк}}^{\text{pp}} = \text{const}; B_{\text{инк}}^{\text{pp}} = \text{const}; t_p = p\Delta t,$$

где Δt – «шаг» по времени; $t < n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots$

Подставляя выражения (14) в упомянутые интегральные уравнения, приходим к рекуррентной по индексу n системе $6N$ алгебраических уравнений для определения величин $\Delta_{\text{инк}}^{\beta n}$, $B_{\text{инк}}^{\beta n}$ ($\beta = 0, 1, 2$; $n = 1, 2, \dots$). Преобразовывая с учетом аппроксимаций (14) формулы, найденные для коэффициентов разложений перемещений и напряжений, получаем соотношения, удобные для численной реализации.

Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом. Получена математическая модель нестационарного деформирования упругого тела в форме многослойного параллелепипеда на основе трехмерных уравнений динамической теории упругости. Предложена методика решения соответствующей начально-краевой задачи теории упругости, обеспечивающая точное удовлетворение системам определяющих уравнений, граничных, контактных и начальных условий.

Список литературы: 1. *Смирнов В.И.* Решение предельных задач теории упругости в случае круга и сферы. // Докл. АН СССР. – 1937. – Т. 14, № 2. – С. 69-72. 2. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э.* Гидроупругость систем оболочек. – К.: Вища школа, 1984. – 208 с. 3. *Янютин Е.Г.* Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1993. – 147 с. 4. *Янютин Е.Г., Янчевский И.В.* Импульсные воздействия на упруго деформируемые элементы конструкций. – Харьков: ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с. 5. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с. 6. *Фридман Л.И.* Динамическая задача теории упругости для тел канонической формы. // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, № 12. – С. 102-108. 7. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 467 с.

Поступила в редколлегию 27.03.2003.

УДК 539.5

Л.В.АВТОНОМОВА, канд.техн.наук; **С.В.БОНДАРЬ**, канд.техн.наук;
В.І.ЛАВІНСЬКИЙ, докт.техн.наук

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТРУКТУРНО ЗВ'ЯЗАНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Надана математична постановка мішаної контактної задачі для структурно зв'язаних механічних систем з урахуванням фізично-нелінійного та конструктивно нелінійного деформування елементів при контактному, тепловому й електромагнітному навантаженнях.

In article given a mathematical raising of mixed contact task for structurally connected mechanical systems with calculation of physically-unlinear and constructively unlinear deforming of elements attached to contact, thermal and electromagnetic loadings.

Широкий спектр проблем фундаментального і прикладного значення, що є особливо характерним для визначення зв'язаних фізико-механічних полів у деформованих тілах, сприяв появі важливих теоретичних і прикладних досліджень в області розрахунку термо-, електромагнітних і механічних процесів у структурно зв'язаних механічних (СЗМ) системах.

Для вирішення цієї проблеми на єдиній науково-методологічній основі, яка б базувалась на загальних принципах механіки і обчислювальних методах розв'язання нелінійних крайових задач, необхідно створити методи аналізу міцності і жорсткості структурно зв'язаних електромеханічних і технологічних систем з урахуванням контактної взаємодії їх елементів.

Математична постановка нелінійних контактних задач деформування складних СЗМ систем дозволяє врахувати різні механізми контактної взаємодії, пружно-пластичного деформування двовимірних і тривимірних елементів таких систем в умовах дії довільних теплових та електромагнітних полів, що контактують між собою на окремих ділянках їхньої поверхні. Границя області, яка зайнята цими елементами-підобластями, об'єднує сукупність поверхонь або ліній, які є вільними або на яких діють тиски – S_p , які є закріпленими – S_k , та ті, що є спільними та створюють так звані контактні зони – S_k .

У довільній точці суцільного матеріального середовища напружено-деформований стан підобластей СЗМ систем, що розглянуті в ортогональній системі координат, визначено тензорами напружень – $\sigma = \sigma_{ij}$, деформацій – $\epsilon = \epsilon_{ij}$ і вектором переміщень – $\bar{u} \{u_i\}$. Диференціальні рівняння руху точок в умовах дії електромагнітних полів прийняті у вигляді:

$$\text{Div} \sigma + \rho \bar{\omega} \bar{E} + \mu_c (\rho \bar{\omega} \bar{v} + \bar{j}) \times \bar{H} + \bar{F} = \rho \bar{v} \dot{\bar{v}}, \quad (1)$$

де ρ , ω – питома маса матеріалу та щільність електричних зарядів; μ_c , ϵ_c – магнітна та електрична проникність (магнітна і діелектрична постійні); \bar{j} , \bar{E} , \bar{H} – вектори щільності струму та напруженості електричних і магнітних полів, \bar{F} – вектор об'ємних сил, $\bar{v} = \dot{\bar{u}}$ – вектор швидкості точки. Другий і третій доданки в (1) складають силу Лоренца, віднесену до одиниці об'єму:

$$\bar{F}_p = \rho \bar{\omega} \bar{E} + \mu_c (\rho \bar{\omega} \bar{v} + \bar{j}) \times \bar{H}. \quad (2)$$

При відсутності вільних електричних зарядів у повільно рухомому середовищі напруженості електричних і магнітних полів задовольняють рівнянням Максвелла:

$$\text{rot } \bar{H} = \epsilon_c \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \rho \bar{\omega} \bar{v} + \bar{j}; \quad \text{rot } \bar{E} = -\mu_c \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \quad \text{div } \bar{H} = 0; \quad \epsilon_c \text{div } \bar{E} = \rho \bar{\omega}. \quad (3)$$

Рівняння (3) доповнюються матеріальними співвідношеннями, які у разі нехтування конвективними струмами й ефектом Хіла, записуються для точок областей у вигляді співвідношень для векторів індукції електричних і магнітних полів – \bar{D} , \bar{B} так $\bar{D} = \epsilon_c \bar{E}$; $\bar{B} = \mu_c \bar{H}$; $\bar{j} = \gamma_c \bar{E} + \gamma_c [\dot{\bar{u}} \times \bar{B}]$.

Для випадків, коли електропровідні елементи, які складають СЗМ систе-

му, контактують із зовнішніми неполяризованими електропровідними тілами або неполяризованими не електропровідними середовищами із властивостями близькими до властивостей вакууму, рівняння Максвела в областях зовнішнього середовища мають вигляд:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_v = \epsilon_c \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_v}{\partial t} + \bar{\mathbf{j}}_v; \quad \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_v = -\mu_c \frac{\partial \bar{\mathbf{H}}_v}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{H}}_v = 0; \quad \epsilon_c \operatorname{div} \bar{\mathbf{E}}_v = \omega_v, \quad (4)$$

де $\bar{\mathbf{j}}_v$, $\bar{\mathbf{E}}_v$, $\bar{\mathbf{H}}_v$ – вектори густини струму, напруженості електричних і магнітних полів у зовнішній області, ω_v – задана функція густини електричних зарядів. У початковому стані прийнято $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{v}} = 0$; $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{E}}_v = \bar{\mathbf{H}}_v = 0$.

Із закону збереження зарядів у електропровідних тілах у випадку термодинамічної рівноваги і при відсутності в початковому стані розподілених зарядів, легко знайти, що густина розподілу електричних зарядів у тілі буде залишатися рівною нулю. У прийнятому наближенні, із (2) можна встановити, що сила Лоренца визначається так:

$$\bar{\mathbf{F}}_p(\mathbf{x}_i) = \mu_c [\bar{\mathbf{j}} \times \bar{\mathbf{H}}], \quad (5)$$

а квазістатична рівновага точок матеріальних елементів-підобластей СЗМ системи визначиться диференціальними рівняннями виду:

$$\sigma_{ij} + \bar{\mathbf{F}}_{pi} + \bar{\mathbf{E}}_i = 0. \quad (6)$$

Прийнято, що на поверхні розподілу елементів із неполяризованими неелектропровідними середовищами діє задане зовнішнє силове навантаження, яке визначено вектором $\bar{\mathbf{p}}$ із компонентами p_{in} . У цьому випадку, на поверхні із розподіленими зарядами і струмами у точках з зовнішньою нормаллю до поверхні тіла – $\bar{\mathbf{n}}$, вектор механічного напруження $\bar{\sigma}_n = \sigma \cdot \bar{\mathbf{n}}$ повинен зрівноважуватися вектором зовнішніх сил $\bar{\mathbf{p}}$ та силою дії електромагнітного поля:

$$\bar{\sigma}_n = \bar{\mathbf{p}}_n + \frac{\Omega}{2} (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{E}}_v) + \frac{\mu_c}{2} (\Omega \bar{\mathbf{v}}_\tau + \bar{\mathbf{i}}) \times (\bar{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{H}}_v), \quad (7)$$

де Ω , $\bar{\mathbf{i}}$ – щільності поверхневих зарядів і струмів, $\bar{\mathbf{v}}_\tau$ – проекція вектора швидкості точки на площину, дотичну до границі тіла.

Умови сполучення електромагнітних полів на поверхні тіл прийняті у вигляді відомих із електродинаміки рівнянь для нерухомих середовищ:

$$\epsilon_c (\mathbf{E}_{vn} - \mathbf{E}_n) = \Omega; \quad (\mathbf{H}_{vn} - \mathbf{H}_n) = 0;$$

$$\bar{\mathbf{n}} \times (\bar{\mathbf{H}}_v - \bar{\mathbf{H}}) = \bar{\mathbf{i}} + \bar{\mathbf{v}}_\tau \Omega; \quad (\mathbf{E}_{v\tau} - \mathbf{E}_\tau) = -\mu_c v_n (\bar{\mathbf{i}} + \bar{\mathbf{v}}_\tau \Omega),$$

де $\bar{\mathbf{E}}_v$, $\bar{\mathbf{H}}_v$ – ϵ , відповідно, напруженості електричних і магнітних полів у зовнішньому до матеріальної підобласті середовищі, які задовольняють рівнянням (4) та мають нормальні – \mathbf{E}_{vn} , \mathbf{H}_{vn} й дотичні – $\mathbf{E}_{v\tau}$, $\mathbf{H}_{v\tau}$ проекції на поверхню сполучення, \mathbf{v}_n , $\bar{\mathbf{v}}_\tau$ – нормальна та дотична складові вектора швидкості $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}}$.

Зокрема, для випадків, коли функції розподілу електричних зарядів ω_v і

токи \vec{j}_v є відмінними від нуля лише в обмеженій області зовнішнього середовища й на поверхні електропровідного тіла відсутні зовнішні електричні заряди і струми, то у (7) слід покласти $\Omega = 0$, $\vec{i} = 0$. Тоді умови на поверхні – S_p приймуть вид:

$$\sigma_{ij} n_j = p_{in}, \quad \forall \mathbf{x} \in S_p, \quad (8)$$

а на поверхні сполучення електромагнітних полів можна записати:

$$\mathbf{E}_{vn} = \mathbf{E}_n; \quad \mathbf{E}_{vt} = \mathbf{E}_t; \quad \vec{n} \times (\vec{H}_v - \vec{H}) = 0, \quad \mathbf{H}_{vn} = \mathbf{H}_n. \quad (9)$$

Величини, якими визначається вплив електромагнітних полів на процеси деформування елементів СЗМ систем, входять у рівняння (7) – (9). Їх можна отримати шляхом інтегрування рівнянь Максвелла (3), (4), відповідно до електромагнітних полів у матеріальних тілах і зовнішньому середовищу, при заданих початкових і крайових умовах.

Геометричні рівняння при малих деформаціях елементів СЗМ систем приймались відповідними лінійним співвідношенням Коші:

$$\epsilon_{ij} = 0,5(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}); \quad \forall \mathbf{x}_i \in V; \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^*; \quad \forall \mathbf{x}_i \in S_u. \quad (10)$$

У межах прийнятих вище припущень та при нехтуванні зв'язаністю деформацій із електромагнітними полями, узагальнені рівняння стану прийняті у вигляді тензорно-лінійних співвідношень:

$$\epsilon_{ij} = \mathbf{A}_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T, \quad (11)$$

де \mathbf{A}_{ijkl} , α_{ij} – компоненти тензорів, якими визначаються властивості деформування та температурного розширення матеріалу. Більшість конструкційних матеріалів можна розглядати кусково-однорідними із різними фізико-механічними властивостями у межах однорідних областей. Останні можуть відповідати ізотропним або анізотропним матеріалам. У межах пружного деформування співвідношення (11) відповідають узагальненому закону Гуку.

Для пружно-пластичного деформування ці співвідношення у формі змінних параметрів пружності відповідають теорії малих пружно-пластичних деформацій Ілюшина і компоненти тензора \mathbf{A}_{ijkl} визначаються так:

$$\mathbf{A}_{ijkl} = \frac{1}{\mathbf{E}_*} \left[(1 + \mathbf{v}_*) \delta_{ik} \delta_{jl} - \mathbf{v}_* \delta_{ij} \delta_{kl} \right], \quad (12)$$

де \mathbf{E}_* , \mathbf{v}_* – змінні параметри пружності, які мають звісні вирази через інтенсивності напружень і деформацій, що є зв'язаними за діаграмою деформування матеріалу. Співвідношення (11), (12) є справедливими для простих чи близьких до них процесів навантаження.

Для складних процесів навантаження доцільно застосовувати теорії пластичного плинину. У роботі застосовані теорія Грандтля-Рейса із співвідношеннями

$$\mathbf{d}(\epsilon_{ij})_p = \frac{1}{2\mathbf{G}} \left[\mathbf{d}\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} \mathbf{d}\sigma_0 \right] + \frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{d}(\epsilon_{ij})_p \mathbf{d}(\epsilon_{ij})_p (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (13)$$

до яких додано залежність між інтенсивністю напруження та мірою пла-

стичної деформації у вигляді $\sigma_i = \mathbf{H}(\chi(\epsilon_i^p), \mathbf{T})$, та теорія пластичності, що є асоційованою з умовами пластичності для ізотропних матеріалів із трансляційним анізотропним зміцненням:

$$d\epsilon_{ij} = A_{ijkl} d\sigma_{ij} + \phi_{ij} dT. \quad (14)$$

На відміну від (11), співвідношення стану (13) та (14) мають диференціальну форму, що є суттєвим для створення алгоритмів розрахунку.

У загальному випадку, для точок контактних поверхонь контактні умови записують у вигляді наступних нерівностей:

$$u_n^{m-1} + u_n^{m+1} - \delta_{on}^m \leq 0; \quad \sigma_{mn}^m \leq 0, \quad (15)$$

де $u_n^{m-1}, u_n^{m+1}, \delta_{on}^m$ – нормальні переміщення точок контактних поверхонь і початковий зазор, σ_{mn}^m – нормальні напруження на цих поверхнях.

При зникненні між тілами початкового зазору на контактній поверхні утворюється контактний тиск. За фізичним уявленням, перша нерівність у (15) є умовою для «непроникнення» контактуючих тіл. Взагалі, замість нерівностей (15) можна використовувати таке рівняння:

$$(u_n^{m-1} + u_n^{m+1} - \delta_{on}^m) \sigma_{mn}^m = 0. \quad (16)$$

Механізми контактної взаємодії тіл у відповідних точках контактних поверхонь моделювались в роботі шляхом введення у межах можливої області контакту між тілами суцільного контактного шару із спеціально заданими характеристиками. Саме за рахунок вибору останніх й моделювались різні механізми контакту. Такий прийом дозволяє розглядати взаємодію тіл із шаром, який повинен мати задані нелінійні характеристики та зводить «зовнішню» нелінійність задачі, яка має місце внаслідок умов (15) або (16), до «внутрішньої» нелінійності. За допомогою такого прийому можна досить точно описати механізми контактної взаємодії тіл - зчеплення, ковзання, сухе тертя.

Системи рівнянь (6) – (10), (11) або (6) – (10), (13) або (14), які необхідно конкретизувати додатковими співвідношеннями для визначення фізико-механічних властивостей матеріалів і контактних шарів, разом із додатковими умовами типу (15) або (16) утворюють замкнені системи рівнянь для розв'язання мішаної контактної задачі.

Сформульовані задача може бути використана у подальшому при розрахунках на міцність і жорсткість цілого ряду складних технічних систем, які віднесено до класу структурно зв'язаних механічних систем, принципи роботи яких засновані на використанні інтенсивних електромагнітних, теплових і силових полів, що створюють для застосування у сучасній енергетиці, в транспортній й обробляючій галузях промисловості.

Список літератури: 1. Лавинский В.И. Исследование прочности и жесткости структурно взаимосвязанных механических систем // Вісник Харківського державного політехнічного університету. – Харків: ХДПУ, 2000. – Вип. 116. – С. 86-97.

Поступила в редколлегию 2.06.2003