

**В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ;  
**С.В. ОЛЬШАНСКИЙ**, асп., НТУ «ХПИ»

## **К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ**

Використовуючи аналогію течій вібророзрідженої зернової суміші та в'язкої рідини, отримано формули для розрахунку коливань швидкості шару зерна на нахиленому решеті з урахуванням нелінійної зміни кінематичного коефіцієнта вібров'язкості суміші то товщини шару. Отримано аналітичний розв'язок граничної задачі гідродинаміки в елементарних функціях. Приведено чисельні приклади.

Using analogy of currents vibroliquefaction of a grain mix and viscous liquid, the formulas for account fluctuations of velocity of motion a layer of grain on the inclined sieve are received in view of nonlinear change of a kinematical factor vibroviscosity of a mix on thickness of a layer. The analytical solution of a regional problem of hydrodynamics in elementary functions is received. The numerical examples are given.

**Постановка проблемы.** Вибрации интенсифицируют сепарирование зерна. Для адекватного моделирования процесса разделения зернового материала на фракции виброрешетом важно знать как далеко передаются вибрации от решета в слой смеси и как они влияют на неравномерность потока сыпучей среды. Для изучения распространения вибраций вглубь зерновой массы используют различные теоретические модели. Достаточно известно направление, где движение зерновой смеси в условиях вибраций описывают уравнениями течения однородной вязкой жидкости. Дальнейшее развитие этого направления видится в переходе к уравнениям динамики неоднородной жидкости. Ведь эксперименты показывают, что вибровязкость псевдооживленной зерновой смеси возрастает с удалением от свободной поверхности слоя. Поэтому, разрабатывая уточненные модели движения смеси по виброрешету, желательно учитывать изменение вибровязкости по толщине движущегося слоя. Итак, в рамках выделенного выше направления моделирования, возникает проблема получения и анализа решений динамических краевых задач течения неоднородной вязкой жидкости, которые описывают поток слоя зерна по виброрешету.

**Краткий анализ последних публикаций.** Из работ, в которых определение скорости движения слоя зерна по виброрешету, сводится к расчету течения неоднородной вязкой жидкости, отметим [1], [2]. В [2] изменение вибровязкости по толщине псевдооживленного слоя аппроксимируется линейной функцией поперечной координаты. Решение краевой задачи о колебаниях скорости движения зерна, вызванных продольными вибрациями решета в его плоскости, представлено с помощью затабулированных функций Кельвина.

Но использованная аппроксимация кинематического коэффициента вибровязкости не учитывает нелинейного изменения его от декартовой координаты, что наблюдается в экспериментах [3], [4]. К тому же, согласно принятой аппроксимации, вибровязкость смеси у свободной поверхности равна нулю, что не согласуется с конечной дисперсностью зерновой массы. Поэтому здесь, вместо линейного, предлагается вариант квадратичного (нелинейного) изменения вибровязкости по толщине слоя с отличной от нуля вибровязкостью у свободной поверхности.

**Целью работы** является получение и апробация расчетами формул для определения колебаний скорости движения зернового слоя по наклонному плоскому решету, когда изменение вибровязкости смеси по толщине слоя подчиняется нелинейной (квадратичной) зависимости.

**Основная часть работы.** По аналогии с публикацией [2] колебания скорости потока зерновой смеси по решету в установившемся режиме работы определим, решив дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ v(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u(h) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2)  $u = u(y, t)$  – скорость потока слоя зерна вдоль решета, зависящая от декартовой координаты  $y$  и времени  $t$ ;  $v(y)$  – коэффициент кинематической вибровязкости, зависящий от  $y$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\theta$  – угол наклона решета к горизонту, показанный на рис. 1;  $h$  – толщина движущегося слоя;  $A^*$ ,  $\omega$  – амплитуда и круговая частота продольных колебаний решета в его плоскости.

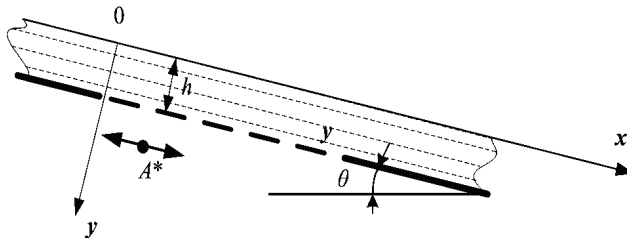


Рисунок 1 – Расчетная схема

Изменение вибровязкости по координате  $y$  аппроксимируем параболической зависимостью

$$v(y) = v_0 \xi^2, \quad (3)$$

в которой  $v_0 = v(0)$ ;  $\xi = 1 + \alpha y$ ;  $\alpha$  – положительная константа.

Согласно (3), при увеличении  $y$  нелинейно возрастает  $v(y)$ .

Решение краевой задачи, представленной выражениями (1), (2), ищем в виде суммы

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (4)$$

слагаемые которой удовлетворяют граничным условиям:

$$\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=0} = 0; \quad u_1(h) = 0; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u_2(h, t) = A * \omega \sin(\omega t), \quad (6)$$

вытекающим из (2).

Подставив (4) в (1), с учетом (3), получаем два уравнения:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{du_1}{d\xi} \right) = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \alpha^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{v_0 \alpha^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0.$$

Первое из них решаем при граничных условиях (5), а второе – при условиях (6).

Решением краевой задачи для первого уравнения в (7) является

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{\alpha^2 v_0} \left[ \ln \frac{1 + \alpha h}{1 + \alpha y} - \frac{\alpha(h - y)}{(1 + \alpha h)(1 + \alpha y)} \right]. \quad (8)$$

К нему приводит двукратное интегрирование (7) с определением констант интегрирования с помощью (5).

Решение второго уравнения в (7) представляем суммой

$$u_2(y, t) = \operatorname{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t), \quad (9)$$

где комплексная функция вещественного аргумента  $w(y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\xi^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dw}{d\xi} - \frac{i\omega}{v_0 \alpha^2} w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (10)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{y=0} = \operatorname{Im} \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{y=0} = 0; \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} w(h) = 0; \quad \operatorname{Re} w(h) = A * \omega, \quad (12)$$

вытекающим из (6).

Подставив в (10) степенную функцию

$$w = \xi^\lambda,$$

приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{i\omega}{v_0\alpha^2} = 0,$$

которое имеет комплексные корни:

$$\lambda_1 = a + i\beta; \quad \lambda_2 = b - i\beta.$$

Здесь

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}; \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}};$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} - \frac{1}{4}}; \quad c = \frac{1}{16} + \frac{\omega^2}{v_0^2\alpha^4}.$$

Поскольку

$$\xi^{\pm i\beta} = \cos(\beta \ln \xi) \pm i \sin(\beta \ln \xi),$$

то общим решением уравнения Эйлера (10) является

$$w(y) = (c_1 + ic_2)\xi^a [\cos(\beta \ln \xi) + i \sin(\beta \ln \xi)] +$$

$$+ (c_3 + ic_4)\xi^b [\cos(\beta \ln \xi) - i \sin(\beta \ln \xi)]. \quad (13)$$

Для определения произвольных констант  $c_1, c_2, c_3, c_4$  продифференцируем (13) по  $\xi$  и подставим в (11). Такое действие приводит к системе двух уравнений

$$c_1 a - c_2 \beta + c_3 b + c_4 \beta = 0;$$

$$c_1 \beta + c_2 a - c_3 \beta + c_4 b = 0.$$

Из нее следует, что

$$c_3 = c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2; \quad c_4 = -c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1, \quad (14)$$

причем

$$\delta_1 = \frac{\beta^2 - ab}{\beta^2 + b^2}; \quad \delta_2 = \frac{\beta(a+b)}{\beta^2 + b^2}. \quad (15)$$

Учитывая (14) и (15), выражение (13) сводим к виду

$$w(y) = c_1 f(\xi) - c_2 \varphi(\xi) + i[c_1 \varphi(\xi) + c_2 f(\xi)], \quad (16)$$

где

$$f(\xi) = (\xi^a + \delta_1 \xi^b) \cos(\beta \ln \xi) - \delta_2 \xi^b \sin(\beta \ln \xi);$$

$$\varphi(\xi) = (\xi^a - \delta_1 \xi^b) \sin(\beta \ln \xi) - \delta_2 \xi^b \cos(\beta \ln \xi).$$

Подставив (16) в (12), получаем систему относительно неизвестных  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 f(\eta) - c_2 \varphi(\eta) = A^* \omega;$$

$$c_1 \varphi(\eta) + c_2 f(\eta) = 0.$$

Здесь  $\eta = 1 + \alpha h$ .

Решив систему, находим постоянные:

$$c_1 = \frac{A^* \omega f(\eta)}{f^2(\eta) + \varphi^2(\eta)}; \quad c_2 = -\frac{A^* \omega \varphi(\eta)}{f^2(\eta) + \varphi^2(\eta)}. \quad (17)$$

Учитывая (4), (8), (9), (14), (16) и (17), решение рассматриваемой краевой задачи сводим к виду

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{\alpha^2 \nu_0} \left[ \ln \frac{1 + \alpha h}{1 + \alpha y} - \frac{\alpha(h - y)}{(1 + \alpha h)(1 + \alpha y)} \right] + [c_1 f(\xi) - c_2 \varphi(\xi)] \sin(\omega t) + [c_1 \varphi(\xi) + c_2 f(\xi)] \cos(\omega t). \quad (18)$$

Оно выражается в элементарных функциях, несмотря на переменность коэффициентов решаемого дифференциального уравнения.

Заметим, что предельный переход  $\alpha \rightarrow 0$  в (18) приводит к известному решению краевой задачи о колебаниях однородного слоя зерновой смеси на виборешете. Действительно, в этом предельном случае:

$$\begin{aligned} a \rightarrow -b \rightarrow \beta \rightarrow \frac{\gamma}{\alpha}; \quad \delta_1 \rightarrow 1; \quad \delta_2 \rightarrow 0; \quad \beta \ln \xi \rightarrow \gamma y; \\ f(\xi) \rightarrow 2ch(\gamma y) \cos(\gamma y); \quad \varphi(\xi) \rightarrow 2sh(\gamma y) \sin(\gamma y); \\ c_1 \rightarrow \frac{A^* \omega \cdot chz \cdot \cos z}{\cos^2 z + sh^2 z}; \quad c_2 \rightarrow -\frac{A^* \omega \cdot shz \cdot \sin z}{\cos^2 z + sh^2 z}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu_0}}; \quad z = \gamma h. \end{aligned}$$

Поэтому выражение (18) принимает вид

$$\begin{aligned} u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{2\nu_0} (h^2 - y^2) + \frac{A^* \omega}{\cos^2 z + sh^2 z} \{ [chz \cos z ch(\gamma y) \times \\ \times \cos(\gamma y) + shz \sin z sh(\gamma y) \sin(\gamma y)] \sin(\omega t) + [chz \cos z \times \\ \times sh(\gamma y) \sin(\gamma y) - shz \sin z ch(\gamma y) \cos(\gamma y)] \cos(\omega t) \}. \end{aligned}$$

Такое решение было получено в [5] другим способом.

Используя табличные интегралы [6]

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(\beta x) dx &= \frac{e^{ax} (a \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x))}{a^2 + \beta^2}, \\ \int e^{ax} \cos(\beta x) dx &= \frac{e^{ax} (a \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x))}{a^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

несложно проинтегрировать выражение (18) по  $y$  и найти удельную производительность решета  $\bar{Q}(t)$ . Указанное преобразование приводит к формуле

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t) = \frac{g \sin \theta}{\nu_0 \alpha^3} \left[ \alpha h + \frac{\alpha h}{1 + \alpha h} - 2 \ln(1 + \alpha h) \right] + \frac{1}{\alpha} (c_1 \Phi_1 - c_2 \times \\ \times \Phi_2) \sin(\omega t) + \frac{1}{\alpha} (c_1 \Phi_2 + c_2 \Phi_1) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

В ней

$$\Phi_1 = \int_1^\eta f(\xi) d\xi = \frac{\eta^{a+1}}{(a+1)^2 + \beta^2} [(a+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - a - 1] +$$

$$+ \frac{\delta_1 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} [(b+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - b - 1] - \frac{\delta_2 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} \times$$

$$\times [(b+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta];$$

$$\Phi_2 = \int_1^\eta \varphi(\xi) d\xi = \frac{\eta^{a+1}}{(a+1)^2 + \beta^2} [(a+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta] +$$

$$+ \frac{(-1)\delta_1 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} [(b+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta] - \frac{\delta_2 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} \times$$

$$\times [(b+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - b - 1].$$

Эти выражения позволяют рассчитать колебания удельной производительности решета, что происходит с частотой продольных вибраций решета и некоторым смещением по фазе.

С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока смеси при следующих исходных данных:  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $f = 0,47$ ;  $M = 0,00004 \text{ кг}$ ;  $r_0 = 0,001825 \text{ м}$ ;  $h = 0,008 \text{ м}$ ;  $v_0 = 5,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ ;  $\alpha = 51,78 \text{ м}^{-1}$ , которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [2]. Работу решета характеризовали параметрами:  $\theta = 5^\circ$ ;  $A^* = 0,0075 \text{ м}$ ;  $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$ .

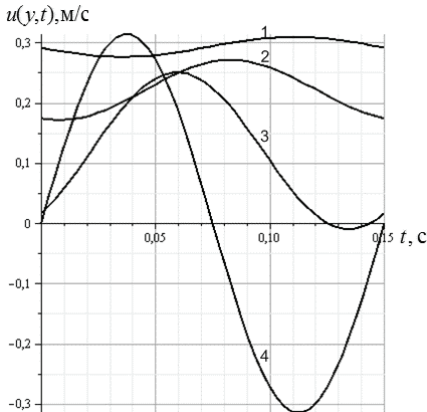


Рисунок 2 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте неоднородного слоя: 1, 2, 3, 4 –  $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

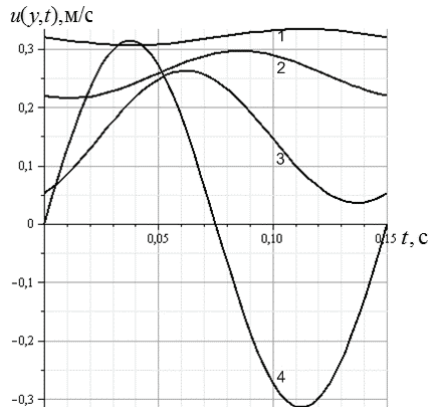


Рисунок 3 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте однородного слоя: 1, 2, 3, 4 –  $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

Вычисленные по (18) значения  $u(y,t)$  при  $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$  и различных  $y$  графически показаны на рис. 2, где цифрами 1,2,3,4 отмечены линии, соответствующие  $y/h^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$ . С ростом  $y$  (увеличение глубины частицы в слое) уменьшается скорость движения, но возрастает амплитуда ее колебаний. У поверхности решета ( $y \rightarrow h$ ) в некоторые моменты времени появляются обратные точки, характеризующиеся отрицательными значениями скорости. Результаты аналогичных расчетов, соответствующие  $\alpha = 0$ , представлены графически на рис. 3. Здесь также наблюдаются отмеченные выше закономерности течения смеси.

**Выводы.** Изложенная теория позволяет учитывать увеличение вязкости смеси с удалением от свободной поверхности. В области рассмотренных частот продольных вибраций решета полученные по этой теории численные результаты подтверждают быстрое затухание колебаний скорости потока по высоте движущегося слоя зерна.

**Список литературы:** 1. *Ольшанский В.П., Кучеренко С.И., Бурлака В.В.* К расчету движения зерновой смеси по плоскому вибрирующему решету // Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 77. – С. 238-244. 2. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: Миськдрук, 2010. – 174 с. 3. *Тищенко Л.Н., Пивень М.В., Харченко С.А., Бредихин В.В.* Исследование закономерностей вибровязкости зерновых смесей при сепарировании цилиндрическими виброцентробежными решетами // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв: Вісник ХНТУСГ. Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 88. – С. 34-44. 4. *Тищенко Л.Н., Мазоренко Д.И., Пивень М.В. и др.* Моделирование процессов зерновых сепараторов. – Харьков: Миськдрук, 2010 – 360с. 5. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчету движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологях. – 2009. – №1. – С. 109-113. 6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1962. – 1100 с.

*Поступила в редакцію 16.07.2010*