пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. **4.** *Паймушин В.И.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171-180. **5.** *Паймушин В.Н.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непроклея // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 32-38. **6.** *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. **7.** *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56. **8.** *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **9.** *Галимов К.З.* Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З.Галимова. – Издательство Казанского университета, 1977. – С. 36 – 95. **10.** *Верещака С.М.* К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематичный выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 31. – С. 39 – 46. **11.** Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

*Поступила в редколлегию 27.06.2005.*

УДК 539.3

***А.Ю.ВАСИЛЬЕВ,*** НТУ «ХПИ»

## К ВОПРОСУ О ДЕФОРМИРОВАНИИ КОРПУСОВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

Запропоновано методику дослідження корпусів транспортних засобів при дії ударних навантажень. Описані методи заміни процесів силовим еквівалентом. Також застосовано до поставленої задачі описані підходи Ейлера, Лагранжа, Лагранж-Ейлера, та метод структурно-рідинного скріплення.

A theoretical method to research of transport vehicles under the percussion action is offered. The methods of force-equivalent loading is described. Lagrange Formulation, Euler Formulation, Arbitrary Lagrangian-Euleran Formulation and method of Fluid-Structure Interaction is described too. Possibility of applying these methods to analyzing frame of transport vehicles are given

### Введение

Любое транспортное средство в течение своей эксплуатации неоднократно подвергается действию ударных нагрузок [1]. Подобные нагрузки характерны большей опасностью по сравнению со статическими нагрузками подобной величины [2]. Данная статья посвящена обзору методов анализа динамического поведения объектов под действием ударных нагрузок разной природы применительно к исследованию корпусов транспортных средств.

В зависимости от природы динамического воздействия и необходимой точности моделирование может происходить при помощи различных подходов:

1. Для многих процессов достаточную точность может обеспечить замена ударного процесса на обычное силовое воздействие. То есть приложение к конкретным точкам конструкции системы сил, меняющихся по определенно-

му закону.

2. При невозможности подобрать эквивалентную силовую нагрузку необходимо полностью моделировать процесс, результатом которого будет динамическое воздействие на корпус.

В качестве примеров процессов, которые можно с высокой степенью достоверности заменить простым силовым воздействием, можно привести процессы наезда транспортным средством на препятствие или стрельбы из установленного на машине орудия [3, 4]. То есть это те процессы, в которых поведение источника динамической нагрузки слабо зависит от процесса деформирования корпуса, а также процессы, нагрузки от которых являются локальными по сравнению с исследуемой зоной деформирования.

Примером второго типа процессов может выступать явление соударения корпуса с препятствием, то есть процессы, в которых природа возникновения ударной нагрузки зависит от поведения конструкции. Для анализа подобных совместных явлений наиболее удобным в настоящее время является использование метода конечных элементов (МКЭ) в его явной и неявной постановке, многокомпонентная гидродинамика в эйлеровой постановке (Multimaterial Eulerian Hydrodynamics), вычислительная гидродинамика несжимаемых потоков, а также бессеточные методы: метод сглаженных частиц (SPH -Smoothed Particle Hydrodynamics), и метод, основанный на методе Галеркина (EFG - Element Free Galerkin method) [4, 5].

Основными подходами для математического описания движения деформируемой сплошной среды – лагранжев, однокомпонентные эйлеров и лагранж-эйлеров – подходы, многокомпонентные эйлеров и лагранж-эйлеров – подходы [5].

При решении сложных задач, в которых различные части рассматриваемой системы проявляют различные типы механического поведения, или с учетом возможности фазового перехода необходимо решать задачи не просто в лагранжевой или эйлеровой постановке, а использовать произвольные лагранж-эйлеровые сетки (ALE – Arbitrary Lagrangian-Euleran) позволяющие учитывать большие деформации без вырождения элементов и подходы лагранж-эйлерового связывания и расчета многокомпонентных течений, сжимаемых сред на подвижных эйлеровых сетках.

Указанные подходы будут более детально описаны применительно к анализу динамического нагружения корпусов транспортных средств от ударных нагрузок, потому что корпуса транспортных средств состоят из пространственных элементов типа пластин стержней и некоторого количества объемных элементов.

### 1. Подход замены ударного воздействия силовым эквивалентом

Методика замены ударных явлений силовым эквивалентом, заключается в том, что контактное взаимодействие инородных объектов с корпусом транспортного средств, исходя из информации о характере поведения этих объектов, заменяются на силовую динамическую и статическую нагрузку, которая заставляет корпус транспортного средства деформироваться аналогичным образом.

Таким образом, динамическое силовое воздействие может задаваться тремя законами:

– импульсная нагрузка,

– динамическое нагружение области исследуемой конструкции нагрузкой, изменение которой зависит только от времени,

– подвижная нагрузка: динамическое нагружение локальной области конструкции, или всей конструкции нагрузкой, изменение которой зависит как от времени, так и от координат.

Для формулировки исходной задачи можно использовать вариационный подход, а также непосредственно законы сохранения энергии, импульса и других фундаментальных величин; можно для вывода уравнений модели применять приближенное решение, полученное методом смягчения краевых условий [6].

Основные расчетные формулы метода для нахождения напряженно-деформированного состояния при статическом нагружении:

$$[K]\{X\} = \{P\}, \tag{1}$$

при импульсном нагружении:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+[K]\{X\}=\left[F(t)\right]\cdot\delta(t)\,, \tag{2}$$

при динамическом нагружении:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+[K]\{X\}=\left[F(t)\right], \tag{3}$$

при воздействии подвижной нагрузки:

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+[K]\{X\}=\left[F(\{R\}-\{V\}t)\right], \tag{4}$$

где: $[M]$ – глобальная матрица масс; $[K]$ – глобальная матрица жесткости конечно-элементной модели; $[C]$ – глобальная матрица демпфирования; $\{X\}$ – искомый вектор узловых перемещений модели; $[P]$ – глобальный вектор нагрузок, объединяющий векторы нагрузок отдельных конечных элементов; $[F(t)]$ – глобальный вектор нагрузок, при учете, что нагрузка зависит от времени; $[F(t)] \cdot \delta(t)$ – глобальный вектор импульсных нагрузок; $\{R\}$ – радиус вектор произвольной точки модели; $\{V\}$ – скорость перемещения подвижной нагрузки; $[F(\{R\} - \{V\})]$ – глобальный вектор нагрузок (при учете, что нагрузка зависит и от координат, и от времени).

Комбинация статической нагрузки и трех видов динамической нагрузки полностью охватывает круг задач о нахождении отклика корпусов транспортных средств от произвольной динамической нагрузки.

Методика построения матриц масс, жесткости, векторов нагрузок и других частей системы разрешающих уравнений более подробно рассматривается в разделе, посвященном описанию подхода Лагранжа.

## 2. Некоторые подходы к описанию движения деформируемой сплошной среды

При невозможности построения подходящего силового эквивалента необходимо полностью моделировать процесс взаимодействия системы деформируемых сплошных сред.

В настоящее время известно несколько подходов к описанию движения деформируемой сплошной среды [5]. К ним относятся метод Лагранжа, метод Эйлера и лагранж-эйлеров подход. В иностранной литературе последний подход называется Arbitrary Lagrangian-Euleran Formulation (ALE). В связи с тем, что указанные подходы хорошо известны, коротко не вдаваясь в подробности, остановимся на основных положениях.

В ситуации, когда одна часть системы ведет себя как жидкость, а другая – как твердое тело, для описания движения твердой части может быть применен лагранжевый подход, а для описания движения жидкости – эйлеровый. В этом случае при моделировании взаимодействия рассматриваемых частей может быть использован алгоритм лагранжево-эйлерового связывания. В иностранной литературе он называется Fluid-Structure Interaction (FSI).

Рассмотрим более подробно особенности реализации каждого из перечисленных выше подходов применительно к транспортным средствам. При изложении материала будем следовать работе [5].

**2.1 Лагранжев подход**

В основе подхода Лагранжа лежат уравнения сохранения массы, количества движения и внутренней энергии, а также замыкающее эту систему определяющее соотношение. Затем рассмотрим особенности пространственно-временной дискретизации при решении перечисленных уравнений.

Уравнение сохранения массы:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\{v\} = 0 , \tag{5}$$

где $\rho$ – плотность; $\{v\}$ – скорость.

Уравнение сохранения количества движения:

$$\rho\{\ddot{x}\} = \rho\{g\} + \operatorname{div}[\sigma], \tag{6}$$

где $\{\ddot{x}\}$ – ускорение; [σ] – тензор напряжений Коши; $\{g\}$ – ускорение свободного падения.

Уравнение сохранения энергии:

$$\rho\dot{u} = [\sigma]:[D] + \rho r - \nabla \cdot \{q\}, \tag{7}$$

где $\dot{u}$ – скорость изменения внутренней энергии; $[D]$ – тензор деформации скорости; $r$ – интенсивность объемного теплового источника; $\{q\}$ – тепловой поток; $\nabla$ – оператор Гамильтона; «•» – скалярное произведение; «:» – двойное скалярное произведение.

Для решения задачи воспользуемся методами пространственной и временной дискретизации. В основе пространственной дискретизации лежит метод конечных элементов, в основе временной дискретизации – центральная дифференциальная схема интегрирования первого и второго порядка точности.

Пространственная дискретизация уравнения сохранения количества движения предполагает переход от решения дифференциального уравнения

(6) к решению выражения

$$\int_V (\rho\{\ddot{x}\} - \rho\{g\} - \mathrm{div}[\sigma]) \cdot [\Phi] dv, \qquad (8)$$

с соответствующими граничными условиями. С использованием известных процедур метода конечных элементов решение уравнения (8) сводится к решению дифференциального уравнения

$$[M]\{\ddot{d}\} = \{F_i\} + \{F_e\}, \qquad (9)$$

где $\{\ddot{d}\}$ – вектор узловых ускорений; $[M]$ – матрица масс; $\{F_i\}$, $\{F_e\}$ – векторы внутренних и внешних сил.

Аналогично решение уравнения (7) сводится к решению дифференциального уравнения

$$[M^\theta]\{\dot{\theta}\} = \{F_i^\theta\} + \{F_e^\theta\}, \qquad (10)$$

где $\{\theta\}$ – температура; $[M^\theta]$ – матрица теплоемкостей; $\{F_i^\theta\}$, $\{F_e^\theta\}$ – векторы внутренних и внешних тепловых нагрузок.

Вектор внутренних сил, находится следующим образом:

$$\{F_i\} = \int_V [\sigma] : (\nabla[\Phi]) dv. \qquad (11)$$

Вектор $F_i$ получается в результате суммирования внутренних сил для всех элементов, входящих в рассматриваемую систему. Для одного элемента вектор внутренних сил определяется следующим выражением:

$$\{f_i^e\} = \int_{V^e} \{B\}^T \{\overline{\sigma}\} dv, \qquad (12)$$

где $\{B\}$ – производная от функций формы элемента; $\{\overline{\sigma}\}$ – вектор, составленный из шести компонентов тензора напряжений.

Вектор внешних сил $\{F_e\}$, который входит в дифференциальное уравнение (9), учитывает распределенные по поверхности тела нагрузки, объемные силы, такие как силы тяжести, контактные силы, реакции связей и другие силы.

Узловые ускорения могут быть определены из уравнения (9) и записаны следующим образом:

$$\{\ddot{d}\} = [M]^{-1}(\{F_i\} + \{F_e\}). \qquad (13)$$

Использование центральной дифференциальной схемы интегрирования по времени второго порядка точности позволяет определить значения ускорений, скоростей и перемещений

Центральная дифференциальная схема интегрирования по времени второго порядка точности устойчива в том случае, если шаг интегрирования по времени не превышает значения

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}}, \qquad (14)$$

где $\omega_{\max}$ – максимальная собственная частота рассматриваемой системы.

Скорость деформации определяется из:

$$\Delta[\varepsilon] = [D]\Delta t, \tag{15}$$

где $[D]$ – тензор деформации скорости, компоненты которого определяются по зависимости

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Для учета вращения среды как абсолютно жесткого тела при вычислении тензора напряжений Коши используем коротационную производную Яуманна:

$$[\dot{\sigma}] = [L]:[D] + [\sigma][W] - [W][\sigma], \tag{16}$$

где $W$ – тензор-спин, компоненты которого равны

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Центральная дифференциальная схема интегрирования по времени второго порядка точности обладает дисперсией. Высокочастотные волны распространяются через сетку медленнее, чем скорость звука. Это создает проблему в описании распространения фронта ударных волн. Эта проблема может быть решена путем введения искусственной объемной вязкости:

$$q = \rho l\left(C_0 D_{kk}^2 + C_1 a D_{kk}\right), \tag{17}$$

где $l = V^{1/3}$ – характерный размер элемента; $\rho$ – плотность; $a$ – скорость звука; $D_{kk} = \mathrm{trace}\,[D]$; $C_0$, $C_1$ – константы.

Петля интегрирования по времени дифференциальных уравнений включает следующие операции: вычисление узловых нагрузок, вычисление узловых ускорений, вычисление узловых скоростей, вычисление приращений перемещений и перемещений, вычисление деформаций в элементах, вычисление напряжений в элементах.

## 2.2 Однокомпонентный эйлеров и однокомпонентный ALE-подходы

Относительное движение между материалом и сеткой требует учета дополнительных членов в уравнениях сохранения. Следует заметить, что вместе с материалом через сетку переносится ряд переменных, которые характеризуют состояние и историю деформирования материальных частиц. К их числу относятся, например, плотность, температура, степень деформации и др. Эти переменные называются историческими переменными. Производная исторической переменной по времени в подвижной системе отсчета имеет вид

$$\dot{\phi} = \phi' + \nabla\phi \cdot (v - \dot{x}), \tag{18}$$

где $\phi'$ – производная исторической переменной по времени в неподвижной системе отсчета; $v$ – скорость сетки; $\dot{x}$ – скорость материальной частицы.

В эйлеровом и ALE-подходе узлы не следуют за течением материала. Имеет место перетекание материала между элементами. Это усложняет уравнение сохранения энергии (см. уравнение (7)):

$$\rho \dot{u} = \rho \nabla u \cdot (v - \dot{x}) + \sigma : D + \rho r - \nabla \cdot q \,. \tag{19}$$

Уравнение, описывающее перенос исторических переменных, похоже на уравнение (19). В этом уравнении $x = \sigma : D = \rho r = \nabla \cdot q = 0$ поэтому $\dot{u} = \nabla u \cdot v$. Отсюда следует, что $u_x(t_0) = u_x(t_1)$.

В ходе решения сначала вычисляется лагранжева производная по времени и исторические переменные. Затем определяется относительное движение между сеткой и материалом, а исторические переменные приводятся к узлам и элементам неподвижной сетки.

Усложненная петля интегрирования по времени дифференциальных уравнений включает следующие операции: вычисление узловых нагрузок, вычисление узловых ускорений, вычисление узловых скоростей, вычисление приращений перемещений и перемещений, выравнивание сетки, адвекционный шаг, вычисление деформаций в элементах, вычисление напряжений в элементах.

Изменение положения узлов, имеющее целью уменьшить искажение сетки, называется выравниванием сетки. В эйлеровом подходе, после выполнения лагранжевого шага узлы возвращаются в свое начальное положение. В однокомпонентном ALE-подходе имеется два способа выравнивания сетки после лагранжевого шага:

– прямой, в котором внутренние узлы сетки могут перемещаться вдоль определенных по двум узлам прямых;

– способ, основанный на итерационных выравнивающих алгоритмах.

Итерационные выравнивающие алгоритмы выполняют поиск нового положения узлов, которое бы минимизировало искажение сетки. В настоящее время реализовано два таких алгоритма: алгоритм простого усреднения и алгоритм эквипотенциального выравнивания.

### 2.3 Многокомпонентный эйлеровый подход

В многокомпонентном эйлеровом подходе два или более материала могут смешиваться в одном элементе. Каждый элемент эйлеровой сетки содержит определенную часть (фракцию) представленного в рассматриваемой системе материала. Границы заполненных материалом областей определяются по заданному предельному значению фракции.

Эффективный тензор напряжений $\sigma^*$ вычисляется усреднением тензоров напряжений для каждой материальной группы, входящей в рассматриваемую систему:

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{nmat} \eta_k \sigma_k \,, \tag{20}$$

где $\sigma_k$ – тензор напряжений для $k$-й матриальной группы; $\eta_k$ – вес материала $k$-й материальной группы в элементе, $\sum_{k=1}^{nmat} \eta_k = 1$.

## 2.4 Многокомпонентный ALE-подход

За счет движения сетки поток массы между элементами может быть уменьшен, а значит, и связанная с диссипацией ошибка также может быть уменьшена. Существует несколько способов задания движущихся и деформирующихся сеток:

– классическое простое усреднение или эквипотенциальное выравнивание;

– прямое выравнивание;

– предварительно определенное движение и/или деформирование сетки, заданное с помощью двенадцати функций времени;

– автоматическое задание движения сетки по средней скорости движения материала и ее распределения в пространстве;

– задание движения сетки в координатной системе, заданной тремя узлами;

– задание движения и/или деформирования сетки по двенадцати узлам.

## 2.5 Лагранж-эйлеровое связывание

Структурно-жидкостное связывание используется в том случае, когда моделируется взаимодействие двух частей, одна из которых описывается как лагранжева, другая как эйлерова или ALE. Наиболее распространенными методами лагранж-эйлерового связывания: метод ограничения и метод штрафа.

Метод ограничения напрямую изменяет скорости жидкости и структуры таким образом, что их движение становится согласованным. Алгоритм обеспечивает выполнение уравнения сохранения количества движения, но не обеспечивает выполнения уравнения сохранения энергии.

Метод штрафа основывается на определении относительного перемещения между жидкостью и структурой, по которому в систему добавляются пропорциональные этому перемещению силы. Они прилагаются и к структуре, и к жидкости. При этом движение структуры и жидкости становится согласованным. Этот метод обеспечивает выполнение уравнения сохранения энергии, но не так стабилен, как метод ограничения.

## 3. Выводы

Долгое время сложность моделирования ударных процессов и невысокая производительность вычислительных средств не позволяли проводить математическое моделирование сложных и сверхсложных механических систем, ярким примером которых являются транспортные средства, с необходимой точностью. Описанная методика позволяет получить решение об ударном воздействии на корпус транспортного средства с необходимой точностью. В зависимости от типов механического поведения описываемых процессов, следствием которых является ударное нагружение корпуса транспортного средства, и требуемой точности необходимо выбирать один из описанных методов. Основой для выбора одного из приведенных методов должно являться качественное сопоставление результатов расчета и результатов эксперимента.

**Список литературы:** **1.** *Гриценко Г.Д., Малакей А.Н., Миргородский Ю.Я., Ткачук А.В., Ткачук Н.А.* Интегрированные методы исследования прочностных, жесткостных и динамических характеристик элементов сложных механических систем // Механіка та машинобудування. – 2002. – № 1. – С. 6-13. **2.** *Зукас Дж. А.* Динамика удара. – М.: Мир, 1985. – 110 с. **3.** *Васильев А.Ю., Мартыненко А.В., Шаталов О.Е. Пелешко Е.В., Назарова О.П.* Комплексный подход к модернизации корпусов легкобронированных машин с использованием современных программных комплексов // Праці, Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь: ТДАТА. – 2005. – **27.** – С. 169-174. **4.** *Васильев А.Ю., Малакей А.Н., Пелешко Е.В., Шаталов О.Е.* К вопросу интегрированных систем анализа динамических процессов в корпусах транспортных средств специального назначения // Механіка та машинобудування. – 2004.– № 1. – С. 46-55. **5.** *Музеймнек А.Ю., Богач А.А.* Математическое моделирование процесса удара и взрыва в программе LS-DYNA: учебное пособие. – Пенза: Информационно издательский центр ПГУ, 2005. – 106 с. **6.** *Кандидов В.П., Чесноков С.С., Вислоух В.А.* МКЭ в задачах динамики. – М.: Издательство МГУ, 1980. – 168 с.

*Поступила в редколлегию 25.04.2005.*

УДК 621.98

***Н.А.ГОГОЛЬ***; ***О.В.НАЗАРОВА***, канд.техн.наук, Таврическая государственная агротехническая академия;
***А.В.ТКАЧУК***, канд.техн.наук; ***О.В.КОХАНОВСКАЯ***, НТУ «ХПИ»

## К ЗАДАЧЕ ФОРМИРОВАНИЯ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ

Запропоновано загальну структуру спеціалізованої системи для аналізу напружено-деформованого стану елементів штампів. Досліджено напружено-деформований стан пуансонів, матриць та пуансон-матриць.

The general structure of specialized system for analysis of the stressed-deformed state of elements of stamps is presented. The stressed-deformed state of puncheons, moulds and puncheon - mould is investigated.

### 1. Введение

При проектировании элементов технологической оснастки (ЭТО) для изготовления деталей сложных машиностроительных изделий в условиях дефицита времени, средств, вычислительных ресурсов, а также в силу естественной целесообразности во многих случаях существует потребность в «экспресс-моделях» и «экспресс-системах» для оперативного решения возникающих задач анализа и синтеза. «Экспресс-модели» и «экспресс-системы» («ЭМ» и «ЭС») могут создаваться в виде аналитических зависимостей; баз данных, полученных на основе многовариантных расчетов или экспериментальных исследований исследуемых ЭТО; встроенных