$$t_{вн} = t_{в} \cdot e^{в\left(\frac{1}{T_{ИС}} - \frac{1}{T_{Э}}\right)}, \qquad (5)$$

где $T_{ис}$ и $T_{э}$ – температура испытаний и окружающей среды выражается в °К; $в = 10^4$ – коэффициент, характеризующий восприимчивость материала к коррозионной среде; $T_{э} = 283$ °К – среднестатическое значение эксплуатационной температуры в °К при относительной влажности более 90%; $T_{э} = 304$ °К – температуры в °К при которой проводятся испытания.

Подставив исходные данные в формулу, получим $t_{вн} = 48$ часов.

Оценка результатов испытаний

Оценка количественных показателей надежности осуществляется по методу доверительных интервалов и представлена в табл.2.

Литература

1. Дзиркал Э.В. Задание и проверка требований к надежности сложных изделий.– М.: Радио и связь, 1981.– 176 с. **2.** The status of the reliability technology //RAC Journal. –1995. –Vol.3, № 1. **3.** Программа и методика лабораторных испытаний на технический ресурс и надежность, Харьков, ХПКБ "Авиаконтроль", 1979, С.11.

Поступила в редколлегию 15.09.2001

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Н.В. Сметанкина, Е.В. Свет, А.Н. Шупиков

Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, Украина

A method for analysis of the strain-stressed state of multilayer plates within the framework of the first order refined theory is offered. Temperature distribution through the thickness of each layer is obtained by using orthonormal Legendre polynomials. The resolving set of equations and boundary conditions for multilayer simply supported plates is obtained.

Как показано в ряде работ, посвященных термоупругости многослойных конструкций, для описания распределения температур по толщине пластины применяется гипотеза о кусочно-линейном распределении температуры по толщине пакета [1-5]. В статье [6] распределение температуры получено из решения задачи нестационарной теплопроводности, что позволило учесть различие физико-механических характеристик материалов слоев. В настоящей статье на основе предложенного ранее алгоритма решения температурной задачи и уточненной теории первого порядка сформирована система уравнений равновесия и граничные условия стационарной задачи термоупругости и предложен метод их решения.

Рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую многослойную пластину, собранную из I слоев постоянной толщины и отнесенную к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя.

Решение уравнения теплопроводности $\Delta T = 0$ для i-го слоя будем искать в виде

$$T_i(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\left[\tau_{rkl}^{i} f_r(\bar{z}_i)\right]\sin\alpha_k x \sin\beta_l y, \tag{1}$$

где

$$0 \le x \le A, \quad 0 \le y \le B, \quad \alpha_k = \pi k / A, \quad \beta_l = \pi l / B,$$

$$\bar{z}_i = (z - \delta_{i-1})/h_i, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^{i} h_j, \quad \delta_{i-1} \le z \le \delta_i, \quad i = \overline{1,I},$$

h_i – толщина i-го слоя, A и B – размеры пластины в плане.

В качестве функций f_r, $r = \overline{1,R}$, выбираем ортонорми-рованные полиномы Лежандра (r-1)-й степени для интервала $0 \le \bar{z} \le 1$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sqrt{3}(2\bar{z} - 1), \quad \ldots, \tag{2}$$

$$\int_0^1 f_k f_l \, d\bar{z} = \delta_{kl}. \tag{3}$$

Проецирование уравнения теплопроводности на функции f_r (2) с учетом условия ортонормированности функций (3) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$(\alpha_k^2 + \beta_l^2)\tau_{1kl}^{i} - \sum_{r=3}^{R}\tau_{rkl}^{i}\xi_{r,1}^{i} = 0, \quad (\alpha_k^2 + \beta_l^2)\tau_{2kl}^{i} - \sum_{r=4}^{R}\tau_{rkl}^{i}\xi_{r,2}^{i} = 0, \ \ldots,$$

$$(\alpha_k^2 + \beta_l^2)\tau_{(R-2)kl}^{i} - \tau_{Rkl}^{i}\xi_{R,R-2}^{i} = 0,$$

$$(\alpha_k^2 + \beta_l^2)\tau_{(R-1)kl}^{i} = 0, \quad (\alpha_k^2 + \beta_l^2)\tau_{Rkl}^{i} = 0, \tag{4}$$

где $\xi_{r,j}^{i} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \frac{\mathrm{d}^2 f_r}{\mathrm{d}z^2} f_j \, \mathrm{d}z$.

На наружной и внутренней поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Запишем краевые условия и условия теплового сопряжения слоев

$$-\lambda_1 \nabla T_i\big|_{z_1=0} = a_н (T_н - T_1\big|_{z_1=0}), \quad \lambda_I \nabla T_I\big|_{z_I=\delta_I} = a_в (T_в - T_I\big|_{z_I=\delta_I}),$$

$$-\lambda_i \nabla T_i\big|_{z_i=\delta_i} + \lambda_{i+1}\nabla T_{i+1}\big|_{z_i=\delta_i} = 0, \quad T_i\big|_{z_i=\delta_i} - T_{i+1}\big|_{z_i=\delta_i} = 0, \quad i=\overline{1,I},$$

где λ_i – коэффициент теплопроводности, $a_н$ и $a_в$ – коэффициенты конвективной теплопередачи на наружной и внутренней поверхностях, $T_н$ и $T_в$ – температура внешней и внутренней сред.

Краевые условия, условия равенства потоков тепла и температур на стыках слоев и соотношения (4) составляют разрешающую систему алгебраических уравнений, решение которой можно найти стандартными методами.

Следующий этап решения задачи состоит в определении напряженно-деформированного состояния многослойной пластины под действием известных тепловых и силовых нагрузок. Рассмотрим случай малых упругих перемещений. Деформации слоев описываются в рамках уточненной теории пластин [7]. Контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Для пакета слоев справедлива гипотеза ломаной линии. Согласно принятой гипотезе перемещения точки i-го слоя имеют вид

$$u^i = u + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\,\psi_x^j + (z-\delta_{i-1})\psi_x^i, \quad v^i = v + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\,\psi_y^j + (z-\delta_{i-1})\psi_y^i,$$

$$w^i = w, \quad i=\overline{1,I}, \tag{5}$$

где $u=u(x,y,t)$, $v=v(x,y,t)$, $w=w(x,y,t)$ – перемещения точки координатной плоскости в направлении координатных осей; $\psi_x^i = \psi_x^i(x,y,t)$, $\psi_y^i = \psi_y^i(x,y,t)$ – углы поворота нормального элемента в i-м слое вокруг осей $0x$ и $0y$. Деформации слоев определяются согласно формулам Коши.

Напряжения и деформации в i-м слое связаны законом Гука:

$$\sigma_x^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left(\varepsilon_x^i + \nu_i\varepsilon_y^i\right) - \frac{E_i}{1-\nu_i}\alpha_i^t T_i, \; \sigma_y^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left(\varepsilon_y^i + \nu_i\varepsilon_x^i\right) - \frac{E_i}{1-\nu_i}\alpha_i^t T_i,$$

$$\tau_{xy}^i = \tau_{yx}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}\gamma_{xy}^i, \quad \tau_{xz}^i = \tau_{zx}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}\gamma_{xz}^i,$$

$$\tau_{yz}^i = \tau_{zy}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}\gamma_{yz}^i, \quad i=\overline{1,I}, \tag{6}$$

где E_i – модуль Юнга, ν_i – коэффициент Пуассона, α_i^t – коэффициент линейного температурного расширения материала i-го слоя. В формулах (6) $T_i = T_i(x,y,z)$ – распределение температуры (1), полученное из решения задачи теплопроводности.

Принимая во внимание (6) и известные соотношения для усилий и моментов [7], запишем

$$\hat{N}_x^i = N_x^i - N_T^i, \quad \hat{N}_y^i = N_y^i - N_T^i, \quad \hat{M}_x^i = M_x^i - M_T^i, \quad \hat{M}_y^i = M_y^i - M_T^i,$$

$$N_x^i = \alpha_1^i \left(u_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\, \psi_{x,x}^j \right) + \frac{\beta_1^i}{2} \psi_{x,x}^i + \alpha_2^i \left(v_{,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\, \psi_{y,y}^j \right) + \frac{\beta_2^i}{2} \psi_{y,y}^i,$$

$$N_y^i = \alpha_1^i \left(v_{,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\, \psi_{y,y}^j \right) + \frac{\beta_1^i}{2} \psi_{y,y}^i + \alpha_2^i \left(u_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\, \psi_{x,x}^j \right) + \frac{\beta_2^i}{2} \psi_{x,x}^i,$$

$$N_{xy}^i = N_{yx}^i = \alpha_3^i \left[u_{,y} + v_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \left(\psi_{x,y}^j + \psi_{y,x}^j \right) \right] + \frac{\beta_3^i}{2} \left(\psi_{x,y}^i + \psi_{y,x}^i \right),$$

$$M_x^i = \frac{\beta_1^i}{2} \left(u_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\, \psi_{x,x}^j \right) + \frac{\gamma_1^i}{3} \psi_{x,x}^i + \frac{\beta_2^i}{2} \left(v_{,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\, \psi_{y,y}^j \right) + \frac{\gamma_2^i}{3} \psi_{y,y}^i,$$

$$M_y^i = \frac{\beta_1^i}{2} \left(v_{,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\, \psi_{y,y}^j \right) + \frac{\gamma_1^i}{3} \psi_{y,y}^i + \frac{\beta_2^i}{2} \left(u_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j\, \psi_{x,x}^j \right) + \frac{\gamma_2^i}{3} \psi_{x,x}^i,$$

$$M_{xy}^i = M_{yx}^i = \frac{\beta_3^i}{2} \left[u_{,y} + v_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \left(\psi_{x,y}^j + \psi_{y,x}^j \right) \right] + \frac{\gamma_3^i}{2} \left(\psi_{x,y}^i + \psi_{y,x}^i \right). \qquad (7)$$

Здесь $\alpha_1^i = \dfrac{E_i h_i}{1-\nu_i^2}$, $\alpha_2^i = \alpha_1^i \nu_i$, $\alpha_3^i = \alpha_1^i \dfrac{1-\nu_i}{2}$, $\beta_k^i = \alpha_k^i h_i$, $\gamma_k^i = \beta_k^i h_i$,

$k = 1,2,3$;; N_T^i, M_T^i – интегральные характеристики температурного поля,

$$N_T^i = \frac{E_i \alpha_i^t}{1-\nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \mathrm{d}z, \quad M_T^i = \frac{E_i \alpha_i^t}{1-\nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i \left(\mathrm{z} - \delta_{\mathrm{i-1}} \right) \mathrm{d}z.$$

Уравнения равновесия многослойной пластины, а также соответствующие граничные условия выводятся на основе вариационного принципа виртуальной работы:

$$\sum_{i=1}^{I} \left(N_{x,x}^i + N_{yx,y}^i - N_{T,x}^i \right) + p_1^s = 0, \quad \sum_{i=1}^{I} \left(N_{xy,x}^i + N_{y,y}^i - N_{T,y}^i \right) + p_3^s = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{I} \left(Q_{x,x}^i + Q_{y,y}^i \right) + p_3^s = 0,$$

$$h_i \sum_{j=i}^{I-1} \left(N_{x,x}^{j+1} + N_{yx,y}^{j+1} - N_{T,x}^{j+1} \right) + M_{x,x}^i + M_{yx,y}^i - Q_x^i - M_{T,x}^i + p_{3+i}^s = 0,$$

$$h_i \sum_{j=i}^{I-1} \left(N_{xy,x}^{j+1} + N_{y,y}^{j+1} - N_{T,y}^{j+1} \right) + M_{xy,x}^i + M_{y,y}^i - Q_y^i - M_{T,y}^i + p_{3+I+i}^s = 0. \qquad (8)$$

Граничные условия для шарнирно опертой пластины имеют вид

$$\sum_{i=1}^{I}\left(N_x^i-N_T^i\right)=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad h_i\sum_{j=i}^{I-1}\left(N_x^{j+1}-N_T^{j+1}\right)+M_x^i-M_T^i=0,$$

$$\psi_y^i=0\ (x=0,\ x=A);$$

$$u=0,\quad \sum_{i=1}^{I}\left(N_y^i-N_T^i\right)=0,\quad w=0,\quad \psi_x^i=0,$$

$$h_i\sum_{j=i}^{I-1}\left(N_y^{j+1}-N_T^{j+1}\right)+M_y^i-M_T^i=0\quad (y=0,\ y=B),\quad i=\overline{1,I}.$$

В уравнениях равновесия (8) $p_j^s(x,y)$ $(j=\overline{1,2I+3})$ – компоненты вектора силовых нагрузок $\mathbf{P}^s$.

Метод решения полученной системы уравнений (8) аналогичен методу, изложенному в работе [7]. Компоненты вектора перемещений $\mathbf{U}=\{u_j(x,y)\}$ и обобщенного вектора нагрузок $\mathbf{Q}=\{q_j(x,y)\}$ $(j=\overline{1,2I+3})$, включающего температурные и силовые нагрузки, разлагаются в ряды Фурье по функциям, удовлетворяющим граничным условиям, соответствующим шарнирному опиранию по краю,

$$u_j(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_{jmn}B_{jmn}(x,y),\quad q_j(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q_{jmn}B_{jmn}(x,y),\tag{9}$$

где $u_1=u(x,y)$, $u_2=v(x,y)$, $u_3=w(x,y)$, $u_{3+i}=\psi_x^i(x,y)$,

$$u_{3+I+i}=\psi_y^i(x,y),\quad q_1=p_1^s-\sum_{i=1}^{I}N_{T,x}^i,\quad q_2=p_2^s-\sum_{i=1}^{I}N_{T,y}^i,\quad q_3=p_3^s,$$

$$q_{3+i}=p_{3+i}^s-h_i\sum_{j=i}^{I-1}N_{T,x}^{j+1}-M_{T,x}^i,\quad q_{3+I+i}=p_{3+I+i}^s-h_i\sum_{j=i}^{I-1}N_{T,y}^{j+1}-M_{T,y}^i,$$

$$B_{1mn}=\cos\alpha_m x\sin\beta_n y,\ B_{2mn}=\sin\alpha_m x\cos\beta_n y,$$

$$B_{3mn}=\sin\alpha_m x\sin\beta_n y,\quad B_{3+i,mn}=B_{1mn},\ B_{3+I+i,mn}=B_{2mn},$$

$$\alpha_m=\frac{m\pi}{A},\ \beta_n=\frac{n\pi}{B},\quad i=\overline{1,I}.$$

В результате для каждой пары значений m и n решение (8) задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$[\Lambda_{mn}]\mathbf{U}_{mn}=\mathbf{Q}_{mn},$$

где $[\Lambda_{mn}]$ – квадратная матрица,

$$\lambda_{11}^{mn}=C_1^I\alpha_m^2+C_3^I\beta_n^2,\quad \lambda_{12}^{mn}=\lambda_{21}^{mn}=\left(C_2^I+C_3^I\right)\alpha_m\beta_n,\quad \lambda_{13}^{mn}=\lambda_{31}^{mn}=0,$$

$$\lambda_{1,3+i}^{mn} = \lambda_{3+i,1}^{mn} = D_1^i \alpha_m^2 + D_3^i \beta_n^2, \quad \lambda_{1,3+I+i}^{mn} = \lambda_{3+I+i,1}^{mn} = \left(D_2^i + D_3^i\right)\alpha_m \beta_n,$$

$$\lambda_{22}^{mn} = C_3^I \alpha_m^2 + C_1^I \beta_n^2, \quad \lambda_{23}^{mn} = \lambda_{32}^{mn} = 0, \quad \lambda_{2,3+i}^{mn} = \lambda_{3+i,2}^{mn} = \left(D_2^i + D_3^i\right)\alpha_m \beta_n,$$

$$\lambda_{2,3+I+i}^{mn} = \lambda_{3+I+i,2}^{mn} = D_3^i \alpha_m^2 + D_1^i \beta_n^2, \quad \lambda_{33}^{mn} = C_3^I \left(\alpha_m^2 + \beta_n^2\right),$$

$$\lambda_{3,3+i}^{mn} = \lambda_{3+i,3}^{mn} = \alpha_3^i \alpha_m, \quad \lambda_{3,3+I+i}^{mn} = \lambda_{3+I+i,3}^{mn} = \alpha_3^i \beta_n,$$

$$\lambda_{3+i,3+j}^{mn} = \eta_{1ij} \alpha_m^2 + \eta_{3ij} \beta_n^2 + \alpha_3^i \delta_{ij},$$

$$\lambda_{3+i,3+I+j}^{mn} = \lambda_{3+I+j,3+i}^{mn} = \left(\eta_{2ij} + \eta_{3ij}\right)\alpha_m \beta_n,$$

$$\lambda_{3+I+i,3+I+j}^{mn} = \eta_{3ij} \alpha_m^2 + \eta_{1ij} \beta_n^2 + \alpha_3^i \delta_{ij}, \qquad i, j = \overline{1, I},$$

$\mathbf{U}_{mn}$ и $\mathbf{Q}_{mn}$ – коэффициенты разложения в ряды векторов перемещений и нагрузок (9). Коэффициенты C_k^i, D_k^i, K_k^i, η_{kij} приведены в работе [7].

После вычисления значения коэффициентов перемещений, используя формулы (9), находим перемещения (5), напряжения (6), силы и моменты (7) в слоях пластины.

Представленный алгоритм позволяет исследовать термоупругое напряженное состояние многослойных пластин, собранных из произвольного числа слоев с различными упругими свойствами материалов слоев.

Литература

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций, М., Машиностроение, 1980. - 375 с. **2.** Reddy J.N., Hsu Y.S. Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates, Journal of Thermal Stresses, 1980, vol. 3, № 3, p. 475-493. **3.** Пискунов В.Г., Сипетов В.С. Об одном подходе к решению задач термоупругости слоистых пластин, Строит. механика и расчет сооружений, 1986, 1, с. 28-31. **4.** Khdeir A.A. On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates, Journal of Applied Mechanics, 1997, vol. 64, 1, p.229-233. **5.** Verijenko V.E., Tauchert T.R., Tabakov P.Y. Refined theory of laminated anisotropic shells for the solution of thermal stress problems, Journal of Thermal Stresses, 1999, vol. 22, 1, p. 75-100. **6.** Кантор Б.Я., Сметанкина Н.В., Шупиков А.Н. Нестационарная теплопроводность в слоистых пластинах, Вестник Харьк. гос. политех. ун-та, 2000, вып. 116, с. 73-77. **7.** Shupikov A.N., Smetankina N.V. Non-stationary vibration of multilayer plates of an uncanonical form. The elastic immersion method. International Journal of Solids Structures, 2001, vol. 38, 14, p. 2271-2290.

Поступила в редколлегию 16.09.2001