

**Список литературы:** 1. Артоболевский И.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. – М.: Гос. изд-во Физ. мат. лит-ры, 1959. – 1084 с. 2. Шаумян Г.А. Основы теории проектирования станков-автоматов и автоматических линий. – М.: Машгиз, 1949.

Поступила в редколлегию 03.05.2006

УДК 539.3

**И.Д.БРЕСЛАВСКИЙ**, ХНУ им. В.Н.Каразина;  
**К.В.АВРАМОВ** докт. техн. наук, НТУ «ХПИ»

## **УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

У статті знайдено нормальні форми системи з кубічною нелінійністю. Для дослідження їхньої стійкості використовуються рівняння у варіаціях.

The nonlinear normal modes of the system with cubic nonlinearity are studied. The variation equations are used to study stability.

**1. Введение.** Нелинейная динамика механических систем с несколькими степенями свободы до сих пор остается не решенным вопросом прикладной механики. С помощью теории нелинейных нормальных форм колебаний часто удается аналитически исследовать существенно нелинейные механические системы с несколькими степенями свободы. Эта теория развивалась в работах Розенберга, Маневича, Михлина, Вакакиса [1-3].

Новизна этой статьи заключается в том, что для исследования устойчивости используется модель, полученная после подстановки нулевого приближения по малому параметру в уравнения движения, то есть так называемая псевдаавтономная динамическая система.

**2. Формулировка задачи.** Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, представленную на рис. 1. Движение системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 + K_1(x_1 - x_2) + K_3(x_1 - x_2)^3 = \varepsilon p(t); \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 + x_2^3 + K_1(x_2 - x_1) + K_3(x_2 - x_1)^3 = 0,$$

где  $p(t) = P \cos(\omega t)$ . Динамическая система (1) при  $\varepsilon = 0$  содержит две нелинейные формы колебаний:

$$x_2(x_1) = cx_1, \quad (2)$$

где  $c = \pm 1$ . Исследуются нелинейные формы при  $\varepsilon \neq 0$ . Они соответствуют вынужденным колебаниям системы. Для определения вынужденных колебаний

используется схема Раушера [2]. Тогда псевдоавтономная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 + K_1(x_1 - x_2) + K_3(x_1 - x_2)^3 &= \varepsilon p(x_1); \\ \ddot{x}_2 + x_2 + x_2^3 + K_1(x_2 - x_1) + K_3(x_2 - x_1)^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

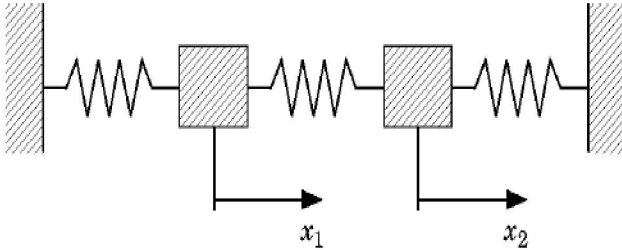


Рисунок 1 – Механическая система

В конфигурационном пространстве уравнения движения приобретают вид [2,3]:

$$\begin{aligned} -2\hat{x}_2 \left( \frac{(x_1^2 - X_1^2)(1 + K_1)}{2} + \frac{(x_1^4 - X_1^4)}{4} + \right. \\ \left. + \int_{x_1}^{x_1} (K_3(\xi - \hat{x}_2(\xi))^3 - K_1\hat{x}_2(\xi) - \varepsilon p(\xi)) d\xi \right) - \\ - \hat{x}_2 (x_1 + x_1^3 + K_1x_1 - K_1\hat{x}_2 + K_3(x_1 - \hat{x}_2)^3 - \varepsilon p(x_1)) + \\ + \hat{x}_2 + \hat{x}_2^3 - K_1\hat{x}_2 + K_3(\hat{x}_2 - x_1)^3 = 0. \end{aligned}$$

Нулевое приближение нормальной формы имеет вид

$$x_1(t) = X_1 cn(qt, k),$$

где  $q^2 = 1 + K_1(1 - c) + (1 + K_3(1 - c)^3)X_1^2$ ;  $k^2 = \frac{(1 + K_3(1 - c)^3)X_1^2}{2q^2}$ ;  $X_1$  – амплитуда

колебаний. Введем обозначение  $\varphi = am(qt, k)$ . Так как возмущающая сила удовлетворяет условию  $p(\pi + \varphi) = -p(\varphi)$ , ее можно представить в виде ряда Фурье:

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \cos((2n+1)\varphi).$$

Перейдем от переменной  $t$  к  $\varphi$ :

$$\cos(\omega t) = \cos\left(\frac{\pi F(\varphi, k)}{2K(k)}\right);$$

$$A_n = \frac{4K(k)}{\pi^2} \int_0^\pi \cos(\psi) \left( \operatorname{am} \left( \frac{2K(k)}{\pi} \psi, n \right) \right) dn \left( \frac{2K(k)}{\pi} \psi \right) d\psi.$$

Воспользуемся следующим рядом Фурье [4]:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} \left( \frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) &= \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi K'}{K}}}{1 - e^{-\left(2n+1\right)\frac{\pi K'}{K}}} \sin((2n+1)\psi), \\ \operatorname{sn}^3 \left( \frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) &= \\ &= \frac{\pi}{4K^3 k^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi K'}{K}} \left( 4K^2(1+k^2) - \pi^2(2n-1)^2 \right)}{1 - e^{-\left(2n+1\right)\frac{\pi K'}{K}}} \sin((2n+1)\psi) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(\psi) \operatorname{sn} \left( \frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) d\psi = \frac{\pi}{kK(k) \operatorname{sh} \left( \frac{\pi K'(k)}{2K(k)} \right)}, \\ A_3 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sn} \left( \frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) \sin(\psi) d\psi - \frac{8}{3\pi} \int_0^\pi \operatorname{sn}^3 \left( \frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) \sin(\psi) d\psi = \\ &= \frac{\pi \left( 2K^2(k)(k^2 - 2) + \pi^2 \right)}{6k^3 K^3(k) \operatorname{sh} \left( \frac{\pi K'(k)}{2K(k)} \right)}. \end{aligned}$$

Нормальные формы представляются так:

$$x_2(x_1) = (c + \varepsilon a_1)x_1 + \varepsilon a_3 x_1^3 + \varepsilon a_5 x_1^5 + \dots \quad (5)$$

Применяя классическую процедуру метода нелинейных нормальных форм [3], получены коэффициенты нелинейной нормальной формы. На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики рассматриваемой системы.

**3. Анализ устойчивости движений по Ляпунову.** Так как  $x_1(t) = X_1 \operatorname{cn}(qt, k)$ , то  $x_1/X_1$  представим в виде ряда по  $\cos((2n-1)\omega t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Амплитуды гармоник при  $n = 2, 3, \dots$  малы. Приближенно можно считать

$$\frac{x_1}{X_1} = \frac{\pi}{kK(k) \operatorname{ch} \left( -\pi \frac{K'(k)}{2K(k)} \right)} \cos(\omega t).$$

Тогда возмущающая сила может быть представлена так  $p(x_1) = \frac{P(X_1)}{X_1} x_1$ ,

где  $P(X_1) = kK(k)ch\left(-\pi \frac{K'(k)}{2K(k)}\right)\pi^{-1}$ .

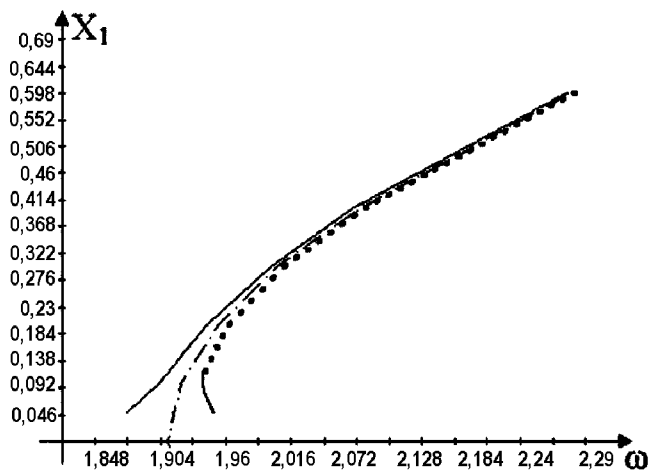
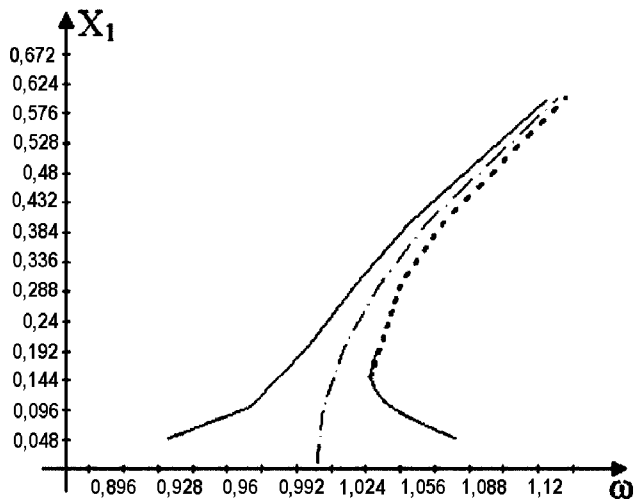


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика

Для дальнейшего анализа устойчивости систему (1) представим в векторной форме:

$$\dot{u} = f(u, t),$$

где  $u \in R^4$ . К переменной  $u$  добавим малое возмущение  $\zeta(t)$ . Эволюция с течением времени малых возмущений описывается уравнениями в вариациях:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial f(u, t)}{\partial u} \xi. \quad (6)$$

Для оценки устойчивости по Ляпунову рассчитывалась фундаментальная матрица  $X(t)$ , которая является решением системы (6) с начальными условиями  $X(0) = E$ . Решение фундаментальной матрицы в момент времени  $T$  является матрицей монодромии. По собственным значениям матрицы монодромии делается вывод об устойчивости колебаний  $u(t)$ . Если собственные значения по модулю меньше 1, то решение устойчиво по Ляпунову. Если хотя бы один мультипликатор больше 1, то решение неустойчиво.

**Список литературы:** 1. *Rosenberg R. M., Hsu C.S.* On the geometrisation of normal vibrations of nonlinear systems having many degree of freedom // Тр. Междунар. симпозиума по нелинь. колебаниям. – Киев, 1961. – С. 380-416. 2. *Маневич Л. И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М: Наука, 1989. – 280 с. 3. *Vakakis A., Manevich L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. – New York: Wiley Interscience, 1996. – 780 p. 4. *K.V.Avrarov, Yu.V.Mikhlin* Snap – through truss as an absorber of forced oscillations // Journal of Sound and Vibration. – 290 (2006). – P. 705-722.

*Поступила в редколлегию 28.03.2006*

УДК 669.018

**О.О.БРЕСЛАВСЬКА**, канд. техн. наук;  
**Ю.О.ЩУК**, канд. техн. наук; НТУ «ХП»»

### **РОЗРАХУНКИ ТА ПРОЕКТУВАННЯ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕРНЕТ-САЙТУ «МАРОЧНИК СТАЛЕЙ І СПЛАВІВ»**

Стаття присвячена методиці використання спеціалізованого Інтернет-сайту, призначеного для організації, зберігання, швидкого доступу та обробки даних про властивості металевих конструкційних матеріалів, у задачах розрахунку і проектування машинобудівних конструкцій.

The paper is devoted to the procedure of using the specialized Internet-site made for organization, saving, quick access and data processing of metal properties in the design and calculation of engineering structures.

**Постановка проблеми.** Є добре відомим, що специфіка проектно-конструкторських та розрахункових робіт у машинобудуванні дуже тісно пов'язана з необхідністю обробки та аналізу великої кількості експериментальних даних щодо фізичних, механічних, технологічних властивостей конструкційних матеріалів та їхнього хімічного складу. У теперішній час ці дані зосереджені у великій кількості довідників, виданих у різний час та, на жаль,