

кольцевого непрочья. В процессе анализа установлено, что изменение кинематических и статических условий контакта по сопряженным поверхностям жестких слоев анизотропных элементов тонкостенных конструкций существенно влияет на характер распределения деформаций поперечного сдвига и обжатия. Вариант модели, когда напряжения поперечного сдвига и обжатия на межфазных границах контакта равны между собой, но при этом допускается упругое проскальзывание этих слоев друг относительно друга, адекватно отражает работу слоистых тонкостенных конструкций при больших деформациях.

**Список литературы:** 1. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // *Механика композитных материалов.* – 1981. – № 5. – С. 832-836. 2. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 11. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // *Механика композитных материалов.* – 1982. – № 1. – С. 77-84. 3. *Пелех Б.Л., Лазько В.А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. 4. *Паймушин В.И.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1987. – № 2. – С. 171-180. 5. *Паймушин В.И.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочья // *Прикладная механика.* – 1987. – Т. 23. № 11. – С. 32-38. 6. *Кантор Б.Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / *Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения.* – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. 7. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // *Прикладная механика.* – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56. 8. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. 9. *Галимов К.З.* Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко // *Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З.Галимова.* – Издательство Казанского университета, 1977. – С. 36 – 95. 10. *Верецака С.М.* К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры // *Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск: Динамика и прочность машин.* – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 31. – С. 39-46. 11. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с. 12. *Верецака С.М., Львов Г.И.* Напряженное состояние анизотропных оболочек с учетом влияния участков локального непрочья // *Проблемы машиностроения.* – 2004. – Т. 7, № 1. – С. 61-70.

*Поступила в редколлегию 25.03.2006.*

УДК 531.1

*О.С. ГАЛАС; К.В. АВРАМОВ, докт. техн. наук, НТУ «ХПИ»*

## **К АКТИВНОМУ ГАШЕНИЮ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ**

В поданій роботі пропонується активний засіб гасіння коливань стрижня. До стрижня прикріплюється суттєво нелінійний гаситель коливань зі зворотним зв'язком. Для дослідження системи з активним гасителем застосовується метод гармонічного балансу. Проведено аналіз стійкості системи. Побудовано амплітудно-частотні характеристики стрижня та гасителя.

Method of the active damping of beam oscillations is proposed in this work. Essentially nonlinear absorber with the feedback is attached to the beam. Method of the harmonic balance is used to investigate the system with the active absorber. Analysis of system stability is performed. Amplitude-frequency characteristic of the beam and absorber is build.

**1. Введение.** Существует множество различных способов активного и пассивного гашения колебаний. В качестве пассивных элементов могут использоваться маятниковые антивибраторы, осцилляторы с существенно нелинейными упругими элементами, фермы Мизеса, нелинейные муфты [1-5]. Для анализа нелинейных колебаний в таких системах используется метод нелинейных нормальных форм, гармонического баланса, многих масштабов.

В последние годы все большее развитие приобретают активные способы гашения колебаний [6-11], которые снижают опасные вибрации с помощью систем управления приводами и компенсаторами. Активные системы считаются более эффективными, чем пассивные системы, однако применение активным систем ограничивается их высокой стоимостью.

В представленной работе предлагается активный способ гашения колебаний. К стержню прикрепляется существенно нелинейный гаситель колебаний с обратной связью. Для исследования системы с активным гасителем используется метод гармонического баланса.

**2. Постановка задачи.** Модель рассматриваемой механической системы представлена на рис. 1.

К стержню прикрепляется динамический гаситель, который является нелинейным механическим осциллятором. Масса гасителя предполагается существенно меньшей массы основной системы. Стержень и гаситель охватываются цепью нелинейной обратной связи. На конце стержня устанавливается датчик, который выдает сигнал пропорциональный отклонению объекта

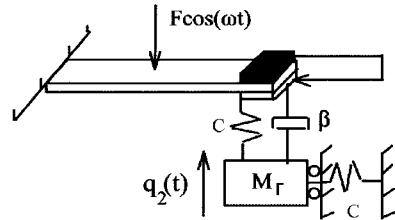


Рисунок 1

от положения равновесия на исполнительный механизм. Исполнительный механизм перемещает массу на соответствующее расстояние тем самым, компенсируя отклонение.

В общем виде уравнения движения системы без учета обратной связи имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}.$$

Кинетическую и потенциальную энергию системы представим так:

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^l \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} m_r \dot{q}_2^2; \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^l w''^2 dx + \frac{1}{2} c (w(l, t) - q_2(t))^2 + \frac{c}{8l_0^2} q_2^4, \quad (2)$$

где  $w(x, t)$  – изгибные перемещения стержня,  $q_2(x, t)$  – обобщенная координата гасителя,  $m_r$  – масса гасителя,  $m$  – масса стержня,  $l_0$  – длина пружины,  $l$  – длина стержня. Функцию  $w(x, t)$  представим так:

$$w(x, t) = 2q_1(t) \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right),$$

где  $1 - \cos \frac{\pi x}{2l}$  – приближенная первая форма колебаний консольного стержня [12]. Обобщенная сила  $Q_1$ , соответствующая обобщенной координате  $q_1$ , и функция  $F$  имеют такой вид:

$$Q_1 = 2F \cos(\omega t) \left( 1 - \cos \frac{\pi l_1}{2l} \right), \quad F = \frac{1}{2} \beta (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2. \quad (3)$$

Подставим выражения (1), (2) и (3) в уравнения Лагранжа, обезразмерим полученные уравнения  $\tilde{q}_i = \frac{q_i}{b}$  и, опуская волну в обозначении, получим:

$$\ddot{q}_1 + \frac{\beta \pi}{ml(3\pi - 8)} (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k^2 q_1 - \frac{c\pi}{ml(3\pi - 8)} q_2 = \frac{F\pi \left( 1 - \cos \frac{\pi l_1}{2l} \right)}{mlb(3\pi - 8)} \cos(\omega t), \quad (4)$$

$$\ddot{q}_2 - \frac{\beta}{m_r} (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \frac{c}{m_r} (2q_1 - q_2) + \frac{cb^2}{2l_0^2 m_r} q_2^3 = 0,$$

где  $b$  – ширина поперечного сечения стержня,  $l_1$  – расстояние между левым концом стержня и точкой приложения периодической силы,

$k^2 = \frac{\left( \frac{1}{8} EI \frac{\pi^4}{l^3} + 4c \right) \pi}{2ml(3\pi - 8)}$ . Введем безразмерное время  $\tau = t k$ , в результате полу-

чим динамическую систему относительно безразмерных параметров:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 + a_1 (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - a_2 q_2 &= f \cos(\omega \tau), \\ \ddot{q}_2 - b_1 (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - b_2 (2q_1 - q_2) + b_3 q_2^3 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{\beta \pi}{ml(3\pi - 8)k}, \quad b_1 = \frac{\beta}{m_r k}, \quad a_2 = \frac{c\pi}{ml(3\pi - 8)k^2}, \quad b_2 = \frac{c}{m_r k^2}, \quad b_3 = \frac{cb^2}{2l_0^2 m_r k^2},$$

$$f = \frac{F\pi \left( 1 - \cos \frac{\pi l_1}{2l} \right)}{mlb(3\pi - 8)k^2}.$$

### 3. Периодические движения и их устойчивость

Следуя статье [8], введем в механическую систему (5) обратную связь. Тогда динамическая система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 + a_1(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - a_2q_2 &= f \cos(\omega t) + \alpha_1 a_4 \dot{q}_1^2; \\ \ddot{q}_2 - b_1(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - b_2(2q_1 - q_2) + b_3q_2^3 &= \alpha_2 b_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $a_4 = \frac{b\pi}{2\ln(3\pi - 8)}$ ,  $b_4 = \frac{b}{\pi}$ . Параметры  $\alpha_i$  выбираются из условия устойчивости. Колебания системы (6) представим так:

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 + A_2 \cos(\omega t) + A_3 \sin(\omega t); \\ q_2 &= B_1 + B_2 \cos(\omega t) + B_3 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (7)$$

Введем (7) в систему (6). Тогда получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha_1 a_4 \omega^2 (A_2^2 + A_3^2) - A_1 + a_2 B_1 &= 0; \\ (1 - \omega^2) A_2 + 2a_1 \omega A_3 - a_1 \omega B_3 - a_2 B_2 - f &= 0; \\ (1 - \omega^2) A_3 - 2a_1 \omega A_2 + a_1 \omega B_2 - a_2 B_3 &= 0; \\ b_3 B_1^3 + \frac{3}{2} b_3 B_1 (B_2^2 + B_3^2) - \frac{1}{2} \alpha_2 b_4 \omega^2 (A_2 B_2 + A_3 B_3) - 2b_2 A_1 + b_2 B_1 &= 0; \\ \frac{3}{4} b_3 B_2^3 + 3b_3 B_2 B_1^2 + \frac{3}{4} b_3 B_2 B_3^2 - \omega^2 B_2 - 2b_1 \omega A_3 + b_1 \omega B_3 - 2b_2 A_2 + b_2 B_2 &= 0; \\ \frac{3}{4} b_3 B_3^3 + 3b_3 B_3 B_1^2 + \frac{3}{4} b_3 B_3 B_2^2 - \omega^2 B_3 + 2b_1 \omega A_2 - b_1 \omega B_2 - 2b_2 A_3 + b_2 B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для построения амплитудно-частотной характеристики система (8) решалась методом Ньютона [13]. Задавалось значение частоты  $\omega$ , и находились шесть неизвестных системы (8). Для определения колебаний в области многозначности использовалась идея продолжения решения [13, 14]. Тогда не частота задавалась в качестве независимого параметра, а одна из амплитуд, а частота находилась из решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Исследуем устойчивость периодических колебаний. Зададим малые приращения  $\xi_1, \xi_2$  от периодических движений:

$$q_1 = \bar{q}_1 + \xi_1; \quad q_2 = \bar{q}_2 + \xi_2. \quad (9)$$

Подставим выражения (9) в уравнения (6). В результате преобразований получим систему уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_1 + a_1(2\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - a_2\xi_2 &= 2\alpha_1 a_4 \dot{\xi}_1 (\omega A_3 \cos(\omega t) - \omega A_2 \sin(\omega t)); \\ \xi_2 - b_1(2\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - b_2(2\xi_1 - \xi_2) + 3b_3\xi_2 (B_1 + B_2 \cos(\omega t) + B_3 \sin(\omega t))^2 &= \\ = \alpha_2 b_4 \dot{\xi}_2 (\omega A_3 \cos(\omega t) - \omega A_2 \sin(\omega t)) + \alpha_2 b_4 \dot{\xi}_1 (\omega B_3 \cos(\omega t) - \omega B_2 \sin(\omega t)) \end{aligned} \quad (10)$$

Систему (10) запишем относительно фазовых переменных и численно определим значения матрицы монодромии при  $l = T$ . Собственные значения матрицы монодромии – мультипликаторы. По величинам мультипликаторов оценим устойчивость колебаний. Амплитудно-частотные характеристики

представлены на рис. 2 и рис. 3. На рис. 2 показана амплитудно-частотная характеристика системы с гасителем и без гасителя, на рис. 3 амплитудно-частотная характеристика гасителя. Сплошной линии соответствуют устойчивые участки, пунктирной неустойчивые.

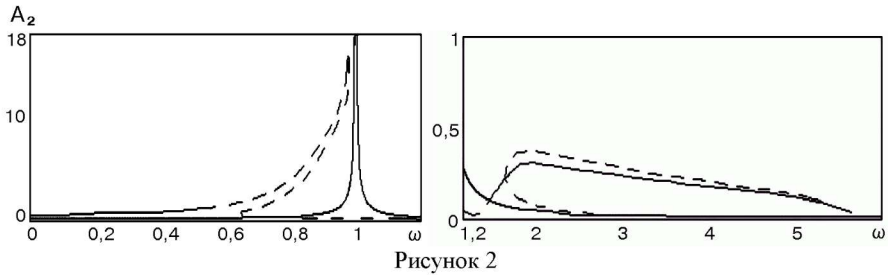


Рисунок 2

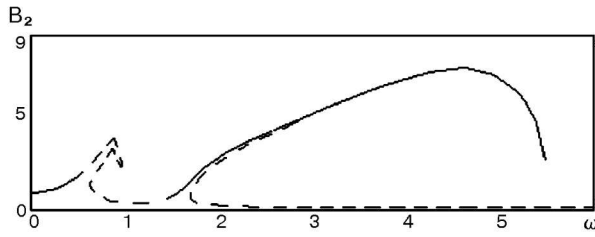


Рисунок 3

Из анализа характеристик следует, что при присутствии гасителя основной резонанс сдвигается. В системе существует режим гашения, при котором гаситель совершает колебания с большой амплитудой, а основная система практически не колеблется.

Введем в систему (5) другой тип обратной связи, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 + a_1(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - a_2 q_2 &= f \cos(\omega t) + \alpha_1 a_4 q_1^2; \\ \ddot{q}_2 - b_1(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - b_2(2q_1 - q_2) + b_3 q_2^3 &= \alpha_2 b_4 q_1 q_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $a_4 = \frac{b\pi}{2m(3\pi - 8)k^2}$ ,  $b_4 = \frac{b}{m_1 k^2}$ . Для системы (11) были проведены

расчеты аналогичные описанным выше. Возьмем на амплитудно-частотной характеристике точку, соответствующую частоте  $\omega = 1$ . По формулам (7) вычислим начальные условия и проинтегрируем уравнения (11). Построим стробоскопический фазовый портрет [15], который представлен на рис. 4 (на первом графике колебания основной системы, на втором гасителя).

Таким образом, в системе наблюдаются квазипериодические и хаотические колебания. Квазипериодические колебания возникают в результате бифуркации Неймарка [15]. При изменении частоты возмущающего воздействия такие колеба-

ния преобразуются в хаотические. Далее возьмем точки находящиеся в некоторой окрестности от точки  $\omega = 1$ . Проинтегрируем уравнения (11) с соответствующими начальными условиями. Определим максимальную амплитуду колебаний и наложим полученную кривую на амплитудно-частотную характеристику системы (11). Результаты представлены на рис. 5 и 6. На рис. 5 также представлена характеристика линейной системы без гасителя.

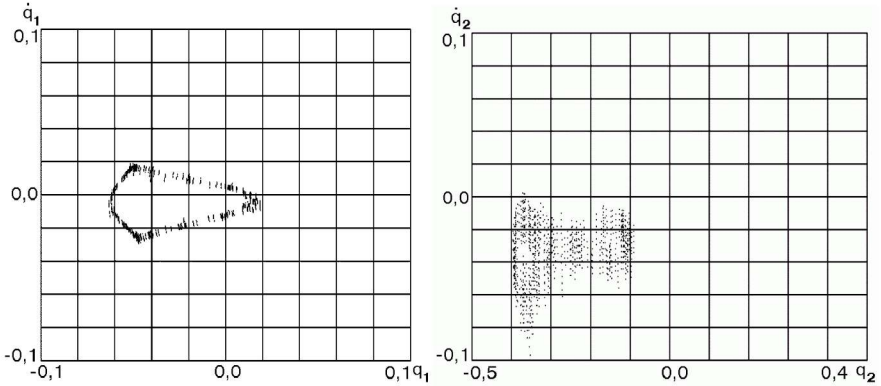


Рисунок 4

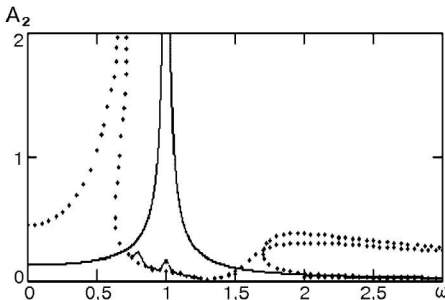


Рисунок 5

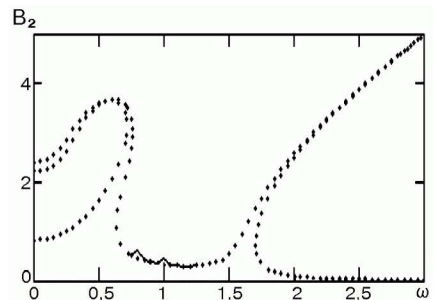


Рисунок 6

Как видно из графиков полученная кривая практически полностью совпадает с амплитудно-частотной характеристикой. В системе описанной уравнениями (11) также существует режим гашения.

**Выводы.** Как видно рассмотренный в работе метод является эффективным для гашения колебаний стержней. Его можно использовать для гашения колебаний тонкостенных конструкций (пластинок, оболочек). В этом случае на системе должны быть размещены несколько таких гасителей.

**Список литературы:** 1. *K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin.* Forced oscillations of a system containing snap-through-truss, close to its equilibrium position // *Nonlinear dynamics.* – 2004. – V. 35. – P. 361-379. 2. *K.V.*

*Avramov, Yu.V. Mikhlin. Snap-through-truss as a vibration absorber // Journal of vibration and control. – 2004. – V. 10. – P. 291-308. 3. K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin. Snap-through truss as an absorber of forced oscillation // Journal of sound and vibration (в печати). 4. K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin. Damping of the elastic vibrations in linear systems // International applied mechanics. – 2005. – V. 41. – № 2. – P. 203-209. 5. С.Н. Решетникова, О.С. Галаз. Анализ вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы, содержащей существенно нелинейный виброгаситель // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – № 12, т. 1. – С. 103-110. 6. S.S. Oueini, A.H. Nayfeh, J.R. Pratt. A nonlinear vibration absorber for flexible structures // Nonlinear dynamics. – 1998. – № 15. – P. 259-282. 7. S.S. Oueini, A.H. Nayfeh, J.R. Pratt. A review of development and implementation of an active nonlinear vibration absorber // Archive of applied mechanics. – 1999. – № 69. – P. 585-620. 8. S.S. Oueini, A.H. Nayfeh. Analysis and application of a nonlinear vibration absorber // Journal of vibration and control. – 2000. – № 6. – P. 999-1016. 9. J.N. Juang, M.Phan. Robust controller designs for second order dynamic system: a virtual passive approach // Journal of guidance, control and dynamics. – 1992. – № 15. – P. 1192-1198. 10. K.E. Rouch, S.G. Tewari, T.R. Massa, R.W. Stephenson, L.S. Stephens. Active vibration control device // United States Patent No. 5170103. – 1992. 11. S. Lee, A. Sinha. Design of an active vibration absorber // Journal of sound and vibration. – 1986. – № 109. – P. 347-352. 12. С.П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем. – М.-Л., ОГИЗ, 1946. – 450 с. 13. R. Seydel. Nonlinear computation // Int. journal of bifurcation and chaos. World scientific. – 1997. – Vol. 7. – P. 2105-2126. 14. В.А. Якубович, В.М. Старжинский. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с. 15. В.С. Анищенко. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 346 с.*

*Поступила в редакцию 15.12.2005.*

УДК 539.3

**Н.Г.ГАРМАШ**, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХОПОРНОГО ЗАМКОВОГО СОЕДИНЕНИЯ ЛОПАТОК ПАРОВОЙ ТУРБИНЫ**

Розглянуто задачу визначення термонапруженого стану замкового з'єднання грибовидного типу першого ступеня низького тиску турбіни К-300-240-2 у термоконтактній постановці. Показано, що врахування температурних деформацій при розв'язанні задачі несуттєво впливає на рівень контактних напружень, однак посилює нерівномірність їх розподілу, що необхідно враховувати при оцінці працездатності та тривалої міцності конструкцій.

The task of thermocontact interaction for lock connection as the first stage of low pressure of the turbine K-300-240-2 is consider. Is shown, that the registration of temperature strains unessentially influencing on a level of contact pressure, strengthens non-uniformity of its distribution. That it is necessary to take into account at an estimation of functionability of constructions.

Существующие в современном машиностроении виды замковых соединений лопаток турбомашин отличаются сложностью конструктивных форм. Технология их изготовления допускает некоторый разброс геометрических размеров между опорными площадками соединения, что приводит к появлению зазоров (натягов). Вследствие напряженного характера работы и конструктивных особенностей, картина распределения напряжений характеризует-