

О.В. СЕРАЯ, канд. техн. наук

НЕЧЕТКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Розглянуто методику розв'язання задачі лінійного програмування у нечіткій постановці. Задачу розв'язано у припущенні, що параметри цільової функції є нечіткі гаусові числа. Запропоновано ітераційну процедуру рішення.

Введение. Каноническая задача линейного программирования формулируется следующим образом:

найти набор (x_1, x_2, \dots, x_n) , максимизирующий

$$L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Эти соотношения в векторной форме имеют вид:

$$L(x) = C^T X, \tag{1}$$

$$AX = B, \tag{2}$$

$$X \geq 0, \tag{3}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Для решения этой задачи используется стандартный симплекс-метод.

Типичная особенность реальных задач техники, экономики, биологии и т.д. состоит в том, что исходные данные (параметры) задач являются неопределенными. При этом достаточно часто характер неопределенности таков, что эти данные не могут быть интерпретированы, как случайные величины, поскольку закон их распределения неизвестен. В этой ситуации

наиболее естественным является представление этих данных в виде нечетких чисел. Понятно, что стандартная технология решения задачи линейного программирования в этих условиях неприемлема.

Поставим задачу разработки методики решения задачи (1)-(3) для случая, когда параметры целевой функции (1) являются нечеткими числами.

Постановка задачи. Пусть c_j - нечеткие числа с функциями принадлежности соответственно равными

$$\mu_j(c_j) = \exp\left\{-\frac{(c_j - \bar{c}_j)^2}{2D_j}\right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Тогда функция принадлежности $L(x)$ имеет вид:

$$\mu(y) = \mu[L(x)] = \exp\left\{-\frac{(y - m(x))^2}{2D(x)}\right\}, \quad (5)$$

где

$$m(x) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j, \quad (6)$$

$$D(x) = \sum_{j=1}^n D_j x_j^2 = \sum_{j=1}^n d_j^2 x_j^2. \quad (7)$$

Выберем некоторое фиксированное значение уровня принадлежности $\mu(y) = a$, которому соответствует $y = y^*$, то есть

$$\exp\left\{-\frac{(y^* - m(x))^2}{2D(x)}\right\} = a.$$

Отсюда

$$(y^* - m(x))^2 = -2D(x) \ln a.$$

Далее, выбирая значение y^* так, чтобы выполнялось неравенство

$$y^* > m(x),$$

получим

$$\begin{aligned} y^*(x) &= m(x) - (-2D(x) \ln a)^{\frac{1}{2}} = m(x) - D(x) \left(\ln \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = m(x) - kD(x) = \\ &= \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j - k \left(\sum_{j=1}^n d_j^2 x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad k = \left(\ln \frac{1}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь задачу нечеткого линейного программирования естественно сформулировать следующим образом:

найти вектор $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, максимизирующий $y^*(x)$ на множестве ограничений $G(x)$, где

$$G(x) = \{X : AX = B, X \geq 0\}.$$

Рассмотрим одну из возможных процедур приближенного решения этой задачи.

Методика решения нечеткой задачи линейного программирования.

В соответствии с (8) максимизация подлжежит функционал

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j - k \left(\sum_{j=1}^n d_j^2 x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $X^{(0)}$ - каким-либо образом выбранное начальное приближение к решению задачи. Ясно, что итерационное улучшение решения будет получено, если на каждом шаге переходить к новому набору X , для которого уменьшаемое в (8) возрастает, а вычитаемое – уменьшается. Заметим, что к указанному желаемому характеру изменения компонентов соотношения (8) приводит и максимизация другого функционала:

$$\tilde{L}(x) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j \Big/ \left(\sum_{j=1}^n d_j^2 x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Далее, максимизация (9), очевидно, эквивалентна максимизации

$$L(x) = \left(\tilde{L}(x) \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j \right)^2 \Big/ \sum_{j=1}^n d_j^2 x_j^2. \quad (10)$$

Введем столбцы \bar{C} , X и матрицу D следующим образом

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \dots \\ \bar{c}_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1^2 & & & O \\ & d_2^2 & & \\ & & \dots & \\ O & & & d_n^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда функционал (10) в матричной форме имеет вид

$$L(X) = \frac{X^T \bar{C} \cdot \bar{C}^T X}{X^T D X} = \frac{X^T C X}{X^T D X}, \quad (11)$$

$$C = \bar{C} \bar{C}^T.$$

Теперь задача сведена к отысканию набора X , максимизирующего (11) и удовлетворяющего

$$AX=B, \quad (12)$$

$$X \geq 0. \quad (13)$$

Решение этой задачи может быть получено в результате реализации следующей итерационной процедуры.

Выберем произвольный вектор $X^{(0)}$, являющийся решением системы уравнений $AX = B$ и удовлетворяющий ограничению $X \geq 0$. Если этот вектор не является решением задачи, то есть не максимизирует (11), то должен существовать некоторый другой вектор $X^{(1)}$, для которого

$$L(X^{(1)}) - L(X^{(0)}) > 0. \quad (14)$$

Так как $X^T DX > 0$, то из (14) следует, что

$$(L(X^{(1)}) - L(X^{(0)}))X^{(1)T}DX^{(1)} = X^{(1)T}CX^{(1)} - X^{(1)T}DX^{(1)}L(X^{(0)}) \geq 0. \quad (15)$$

С учетом (15) задача сводится к отысканию вектора $X^{(1)}$, удовлетворяющего (12), (13) и максимизирующего

$$R(X^{(1)}) = X^{(1)T}(C - L(X^{(0)})D)X^{(1)}.$$

Если получаемый при этом вектор не максимизирует (11), то должен существовать некоторый очередной вектор $X^{(2)}$, для которого

$$L(X^{(2)}) - L(X^{(1)}) > 0.$$

Таким образом, исходная задача сведена к итерационной процедуре отыскания последовательности удовлетворяющих (12), (13) векторов,

$$X^{*(1)}, X^{*(2)}, \dots, X^{*(k)}, X^{*(k+1)},$$

для которых выполняется рекуррентное соотношение

$$X^{*(k+1)T}CX^{*(k+1)} - X^{*(k+1)T}DX^{*(k+1)}L(X^{*(k)}) = \max_{X^{(k+1)}} X^{(k+1)T}D_k X^{k+1}. \quad (16)$$

Вычислительную процедуру естественно остановить, когда будет выполнено неравенство

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon,$$

где ε - некоторое достаточно малое число.

Каждая из последовательности задач (16) легче исходной задачи, поскольку здесь максимизация дробно-квадратичного функционала (11) заменена оптимизацией обычного квадратичного функционала (16).

Выводы. Предложена простая вычислительная процедура решения задачи линейного программирования, параметры целевой функции которой заданы нечетко. Процедура является итерационной и, как показано на многочисленных примерах, быстро сходится.

Поступила в редколлегию 4.07.05.