

четной области. Из анализа представленных в таблице 2 результатов для различных значений толщины цилиндра, когда давление  $p_1$  действует не на всей внутренней поверхности ( $b = 0,5a$ ), следует, что теория [6] применима для оболочек средней толщины при  $h/R \leq 1/5$ ; для более толстых оболочек необходимо использовать более точные сдвиговые модели.

В заключение отметим, что при решении рассмотренных задач в силу программно реализованной интегральной оценки численных результатов процесс сходимости решения имеет устойчивый характер.

**Список литературы:** 1. Сало В.А. Доказательство достаточного признака сходимости метода Рунге для смешанного вариационного принципа Рейсснера // Вестник Харьков. гос. политех. ун-та. - Харьков: ХГПУ. - 2000. - Вып. 95. - С. 70-75. 2. Морачковский О.К., Ромашов Ю.В., Сало В.А. О методе двусторонней оценки решений смешанных вариационных задач теории упругости // Информ. технологии: Сб. науч. трудов ХГПУ. - Харьков: ХГПУ. - 1999. - Вып. 7, Ч.1. - С. 322-326. 3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. - К.: Наук. думка, 1982. - 566 с. 4. Экланд И., Тетам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. - М.: Мир, 1979. - 309 с. 5. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. - М.: Наука, 1983. - 448 с. 6. Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. - СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-т, 1996. - 278 с.

*Поступила в редакцию 27.02.02*

УДК 539.3

**С.Н.СКЛЕПУС**, канд.физ.-мат.наук

## **ВАРИАЦИОННО-СТРУКТУРНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ ПОЛЗУЧЕСТИ ГИБКИХ ПЛАСТИН**

В статті розглядається задача повзучості гнучких пластин складної форми. Наведено варіаційну постановку задачі на основі варіаційного принципу в формі Лагранжа. Метод розв'язку нелінійної задачі повзучості базується на сумісному застосуванні методів R-функцій, Рітта та Рунге-Кутта-Мерсона. Наведені результати розрахунку повзучості квадратної пластини та пластини складної геометричної форми.

В процессе ползучести стрела прогиба пластины может достигь величины, сравнимой с ее толщиной ( $w \geq 0,2h$ ). В этом случае необходимо использовать геометрически нелинейную теорию пластин больших прогибов.

Пластинчатые элементы конструкций часто имеют неканоническую форму и сложные условия закрепления. Адекватное описание физически и геометрически нелинейного поведения таких объектов требует разработки достаточно точных и универсальных методов расчета.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2z$  тон-

кую изотропную пластину толщиной  $h$  произвольной формы  $\Omega$ . Температура постоянная. Пластина нагружена поперечной нагрузкой  $q_z = q_z(x_1, x_2, t)$ , контурными нормальными  $P_n^{(0)}(x_1, x_2, t)$  и касательными  $P_\tau^{(0)}(x_1, x_2, t)$  усилиями. Здесь  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  – внешняя нормаль и касательная к контуру  $\partial\Omega$ .

Предполагаем, что выполняются гипотезы Кирхгофа-Лява. Считаем, что деформации в пластине остаются малыми в процессе ползучести, а квадраты углов поворота элемента пластины имеют тот же порядок, что и деформации.

Тензор скоростей полных деформаций может быть представлен как

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + p_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{ij}^e$  – тензор скоростей упругих деформаций,  $p_{ij}$  – тензор скоростей деформаций ползучести. Точка над символом обозначает производную по времени.

В рамках гипотез Кирхгофа-Лява, выражения для скоростей перемещений точек пластины и связь между скоростями полных деформаций и скоростями перемещений имеют вид

$$\dot{v}_1 = \dot{u}_1 - z\dot{w}_{,1}, \quad \dot{v}_2 = \dot{u}_2 - z\dot{w}_{,2}, \quad \dot{v}_3 = \dot{w}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11} = \dot{u}_{1,1} - z\dot{w}_{,11} + \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,1}, \quad \varepsilon_{22} = \dot{u}_{2,2} - z\dot{w}_{,22} + \dot{w}_{,2} \dot{w}_{,2},$$

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = \dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2z\dot{w}_{,12} + \dot{w}_{,1} \dot{w}_{,2} + \dot{w}_{,2} \dot{w}_{,1}, \quad \varepsilon_{i3} = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где  $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{w}$  – скорости перемещений точек координатной поверхности вдоль осей  $0x_1, 0x_2, 0z$  соответственно.

Продифференцировав по времени закон Гука, запишем связь между скоростями напряжений и скоростями деформаций:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - p_{11} - \nu p_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - p_{22} - \nu p_{11}),$$

$$\sigma_{12} = G(\gamma_{12} - 2p_{12}). \quad (4)$$

Здесь  $E, G, \nu$  – модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

В общем случае, задача ползучести для произвольного тела объемом  $V$ , в момент времени  $t \neq 0$ , может быть сведена к вариационной задаче для функционала относительно кинематически возможных скоростей перемещений [1]:

$$I(\dot{v}_i) = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_{kl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - p_{kl}) + \sigma_{ij} \dot{v}_{k,i} \dot{v}_{k,j}] dV - \int_{S_2} P_i \dot{v}_i dS, \quad (5)$$

где  $\dot{v}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – скорости перемещений;  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – тензор скоростей полных деформаций;  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – тензор напряжений Коши;  $P_i$  – скорости поверхностных нагрузок, действующих на поверхности  $S_2$ . Компоненты тензора скоростей деформаций ползучести  $p_{ij}$  считаются заданными и не зависят от скоростей изменения деформаций.

Предполагая, что  $v_{i,j} \sim w_i^2 \ll 1$  ( $i, j = 1, 2$ ), и пренебрегая членами высшего порядка малости в (5), получим функционал в форме Лагранжа для тонкой гибкой пластины:

$$\begin{aligned} \Pi(u_1, u_2, w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{(h)} \left[ \sigma_{kl} (\varepsilon_{kl} - p_{kl}) + \sigma_{11} w_{,1}^2 + \sigma_{22} w_{,2}^2 + 2\sigma_{12} w_{,1} w_{,2} \right] dx_1 dx_2 dz - \\ & - \int_{\Omega} q_z w dx_1 dx_2 - h \int_{\partial\Omega} \left[ p_n^{(0)} (u_1 n_1 + u_2 n_2) + P_\tau^{(0)} (u_2 n_1 - u_1 n_2) \right] d\Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $k, l = 1, 2$ ;  $n_1, n_2$  – направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$  к контуру  $\partial\Omega$ .

Подставив формулы (3), (4) в (6) и проинтегрировав по толщине, окончательно получим:

$$\Pi = \Pi_L + \Pi_N, \quad (7)$$

где  $\Pi_L, \Pi_N$  – части функционала, определяемые формулами:

$$\begin{aligned} \Pi_L = & 0,5 \iint_{\Omega} \left\{ A_1 (u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2) + 2A_2 u_{1,1} u_{2,2} + A_3 (u_{1,2} + u_{2,1})^2 - \right. \\ & - 2B_1 (u_{1,1} w_{,11} + u_{2,2} w_{,22}) - 2B_2 (u_{1,1} w_{,22} + u_{2,2} w_{,11}) - \\ & - 2B_3 w_{,12} (u_{1,2} + u_{2,1}) + D_1 (w_{,11}^2 + w_{,22}^2) + 2D_2 w_{,11} w_{,22} + D_3 w_{,12}^2 \left. \right\} dx_1 dx_2 - \\ & - \iint_{\Omega} \left[ \dot{N}_{11}^c \dot{u}_{1,1} + \dot{N}_{22}^c \dot{u}_{2,2} + \dot{N}_{12}^c (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1}) - \dot{M}_{11}^c \dot{w}_{,11} - \dot{M}_{22}^c \dot{w}_{,22} - 2\dot{M}_{12}^c \dot{w}_{,12} + \dot{q}_z \dot{w} \right] dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Pi_N = & 0,5 \iint_{\Omega} \left\{ A_1 (w_{,1}^2 w_{,1}^2 + w_{,2}^2 w_{,2}^2 + 2w_{,1} w_{,1} u_{1,1} w_{,1} + 2w_{,2} u_{2,2} w_{,2}) + \right. \\ & + 2A_2 (w_{,1} u_{2,2} w_{,1} + w_{,2} u_{1,1} w_{,2} + w_{,1} w_{,2} w_{,1} w_{,2}) + \\ & + A_3 [w_{,1}^2 w_{,2}^2 + w_{,2}^2 w_{,1}^2 + 2(u_{1,2} + u_{2,1})(w_{,2} w_{,1} + w_{,1} w_{,2}) + 2w_{,1} w_{,2} w_{,1} w_{,2}] - \\ & - 2B_1 (w_{,1} w_{,1} w_{,11} + w_{,2} w_{,2} w_{,22}) - 2B_2 (w_{,1} w_{,1} w_{,22} + w_{,2} w_{,2} w_{,11}) - \\ & - 2B_3 w_{,12} (w_{,2} w_{,1} + w_{,1} w_{,2}) + a_{11} w_{,1}^2 + a_{22} w_{,2}^2 + 2a_{12} w_{,1} w_{,2} \left. \right\} dx_1 dx_2 - \\ & - \iint_{\Omega} \left[ \dot{N}_{11}^c w_{,1} w_{,1} + \dot{N}_{22}^c w_{,2} w_{,2} + \dot{N}_{12}^c (w_{,2} w_{,1} + w_{,1} w_{,2}) \right] dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$A_1 = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} dz, \quad A_2 = \nu A_1, \quad A_3 = \int_{(h)} G dz, \quad B_1 = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} dz, \quad B_2 = \nu B_1,$$

$$B_3 = 2 \int_{(h)} Gz dz, \quad D_1 = \int_{(h)} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} dz, \quad D_2 = \nu D_1, \quad D_3 = 4 \int_{(h)} Gz^2 dz;$$

$$\dot{N}_{11}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (p_{11} + \nu p_{22}) dz, \quad \dot{N}_{22}^c = \int_{(h)} \frac{E}{1-\nu^2} (p_{22} + \nu p_{11}) dz, \quad \dot{N}_{12}^c = 2 \int_{(h)} G p_{12} dz,$$

$$M_{11}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (p_{11} + \nu p_{22}) dz, \quad M_{22}^c = \int_{(h)} \frac{Ez}{1-\nu^2} (p_{22} + \nu p_{11}) dz,$$

$$M_{12}^c = 2 \int_{(h)} G p_{12} z dz, \quad a_{11} = \int_{(h)} \sigma_{11} dz, \quad a_{22} = \int_{(h)} \sigma_{22} dz, \quad a_{12} = \int_{(h)} \sigma_{12} dz.$$

Условиями стационарности для функционала (7) являются уравнения равновесия и статические граничные условия, записанные для скоростей. Для скоростей перемещений должны быть заданы кинематические граничные условия.

Физические соотношения для скоростей деформаций ползучести примем в виде [4]:

$$\dot{p}_{kl} = \frac{3}{2} A \sigma_i^{m-1} s_{kl} \frac{1}{(1-d^n)^m}, \quad (k, l = 1, 2), \quad (10)$$

где  $d$  – скалярный параметр повреждаемости, определяемый следующим уравнением:

$$\dot{d} = B \sigma_i^m \frac{1}{(1-d^n)^m}, \quad (11)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{kl} s_{kl}} \quad - \quad \text{интенсивность напряжений}; \quad s_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} I_1,$$

$I_1 = \delta_{ij} \sigma_{ij}$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $A, B, m, n$  – постоянные материала. В начальный момент времени  $d = 0$ , а критическое значение параметра повреждаемости  $d = d_*$  соответствует времени разрушения  $t = t_*$ .

Основные неизвестные задачи в произвольной точке пластины могут быть найдены из решения начальной задачи Коши по времени:

$$\frac{dG_k}{dt} = F_k(t, G_l), \quad (k = 1, 2, \dots, 15), \quad (12)$$

где  $\mathbf{G} = \{G_k\} = \{u_i, w, w_{,i}, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, p_{ij}, d\}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – вектор неизвестных функций. Правые части уравнений (12) имеют вид:  $F_1 = \dot{u}_1, F_2 = \dot{u}_2, F_3 = \dot{w}$ ;  $F_4 = w_{,1}, F_5 = w_{,2}$ ;  $F_k$  ( $k = 6, 7, 8$ ) определяются с помощью формул (4);  $F_k$  ( $k = 9, 10, 11$ ) – с помощью формул (3);  $F_k$  ( $k = 12, 13, 14, 15$ ) – формулами (10), (11).

Начальные условия для искомых функций в момент времени  $t = 0$  находятся из решения линейной задачи упругого деформирования пластины. Для решения упругой задачи можно использовать функционал в форме (8), заменив скорости входящих в него функций самими функциями и отбросив добавки, связанные с ползучестью.

Таким образом, решение начально-краевой задачи ползучести пластин сводится к решению вариационной задачи для функционала (7) в сочетании с

процедурой интегрирования начальной задачи Коши (12) по времени при заданных начальных условиях.

Интегрирование начальной задачи Коши по времени будем выполнять методом Рунге-Кутты-Мерсона с автоматическим выбором шага [4], который выбирается исходя из условия непревышения погрешностью метода некоторой заданной величины  $\delta_0$ .

Краевые задачи, в начальный момент времени и на каждом временном шаге, будем решать вариационно-структурным методом, который позволяет представить приближенное решение в виде формулы – структуры решения, точно удовлетворяющей заданным граничным условиям [2].

Рассмотрим основные типы кинематических граничных условий и соответствующие им структуры решения.

Жесткая заделка:

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0, \quad u_n = 0, \quad u_\tau = 0. \quad (13)$$

$$w = \omega^2 \Phi_1, \quad u_1 = \omega \Phi_2, \quad u_2 = \omega \Phi_3. \quad (14)$$

Жесткая заделка, подвижная в плоскости пластины:

$$w = 0, \quad w_{,n} = 0. \quad (15)$$

$$w = \omega^2 \Phi_1, \quad u_1 = \Phi_2, \quad u_2 = \Phi_3. \quad (16)$$

Шарнир, неподвижный в тангенциальном направлении:

$$w = 0, \quad u_\tau = 0. \quad (17)$$

$$w = \omega \Phi_1, \quad u_1 = \omega_{,1} \Phi_2 + \omega \Phi_3, \quad u_2 = \omega_{,2} \Phi_2 + \omega \Phi_4. \quad (18)$$

Неподвижный шарнир:

$$w = 0, \quad u_n = 0, \quad u_\tau = 0. \quad (19)$$

$$w = \omega \Phi_1, \quad u_1 = \omega \Phi_2, \quad u_2 = \omega \Phi_3. \quad (20)$$

Свободное опирание:

$$w = 0. \quad (21)$$

$$w = \omega \Phi_1. \quad (22)$$

Здесь  $u_n = u_1 n_1 + u_2 n_2$ ,  $u_\tau = u_2 n_1 - u_1 n_2$ ,  $w_{,n} = w_{,1} n_1 + w_{,2} n_2$ ;  $\Phi_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – неопределенные компоненты, которые представляются в виде

$$\Phi_i(x) \approx \Phi_{iN}(x) = \sum_{k=1}^N C_k^{(i)} \varphi_k(x), \quad x = (x_1, x_2),$$

$C_k^{(i)}$  неопределенные коэффициенты;  $\{\varphi_k\}$  полная система функций [2]. Функция  $\omega(x)$  строится с помощью теории R-функций и удовлетворяет условиям [2]:  $\omega(x) = 0$ ,  $|\omega_{,n}| = 1$ ,  $x \in \partial\Omega$ ;  $\omega(x) > 0$ ,  $x \in \Omega$ .

Имея приведенные выше структуры, можно строить структурные формулы для комбинированных условий опирания. Например, если часть контура

$\partial\Omega_1$  жестко закреплена (условия (13)), а часть  $\partial\Omega_2$  – шарнирно оперта (условия (17)), то соответствующая структура решения будет иметь вид:

$$w = \omega_1^2 \omega_2 \Phi_1, \quad u_1 = \omega_1 \omega_{2,1} \Phi_2 + \omega_0 \Phi_3, \quad u_2 = \omega_1 \omega_{2,2} \Phi_2 + \omega_0 \Phi_4, \quad (23)$$

где  $\omega_1(x) = 0, (x \in \partial\Omega_1)$ ;  $\omega_2(x) = 0, (x \in \partial\Omega_2)$ ;  $\omega_0(x) = 0, (x \in \partial\Omega_1 \vee \partial\Omega_2)$ .

В качестве примеров расчета рассмотрим ползучесть прямоугольной пластины [4] и пластины неканонической формы (см. рис. 1) находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки  $q_z = 0,3$  МПа. Геометрические параметры пластины:  $2a = 2b = 0,08$  м,  $r = 0,01$  м толщина  $h = 0,003$  м. Материал – алюминиевый сплав AlCuMg2 при температуре  $T = 573$  К. Условия закрепления краев – жесткая заделка, подвижная в плоскости пластины. Упругие константы:  $E = 65$  ГПа,  $\nu = 0,3$ . Постоянные материала при ползучести [4]:  $A = 3,35 \cdot 10^{-8}$  МПа $^{-m} \text{ч}^{-1}$ ;  $B = 1,9 \cdot 10^{-7}$  МПа $^{-m} \text{ч}^{-1}$ ;  $m = 3$ ;  $n = 1,4$ ;  $d_* = 1$ . Уравнения границ области  $\Omega$  приведено в [3].

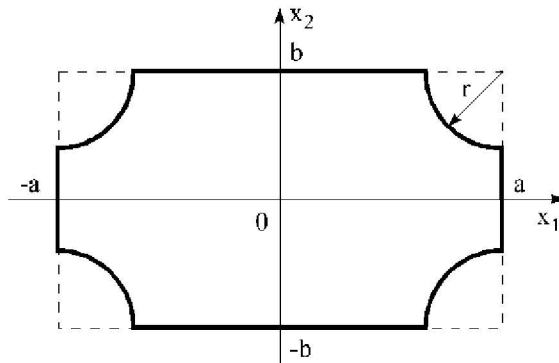


Рис. 1

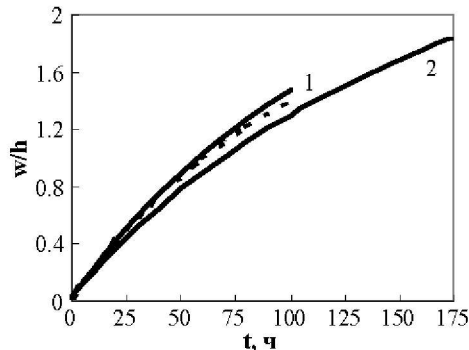


Рис. 2

Для решения использовалась структура (16). В качестве  $\{\varphi_k\}$  были выбраны степенные полиномы. Для нахождения неопределенных коэффициентов использовался метод Рунге. Максимальная степень полинома для  $\Phi_1$  равнялась 12, для  $\Phi_2, \Phi_3 - 9$ . При численной реализации учитывалась симметрия задачи. Интегрирование по области  $\Omega$  и толщине  $h$  проводилось с помощью квадратур Гаусса. Общее число узлов при интегрировании по четверти области равнялось 144, для квадратной пластины и 196, для пластины сложной формы. Число узлов по толщине равнялось 10. Погрешность интегрирования по времени  $\delta_0 = 0,01$ .

Результаты расчетов приведены на рис. 2-6. На рис. 2-4 сплошными линиями показаны результаты, полученные с помощью метода R-функций, пунктирными – полученные в работе [4] для квадратной пластины.

На рис.2 показано изменение во времени безразмерных прогибов в центре пластин. Здесь цифрой 1 обозначены прогибы квадратной пластины, цифрой 2 – прогибы пластины неканонической формы.

На рис.3 представлены изгибающие моменты  $M_{11}$  для квадратной пластины в центре (кривые 1) и в заделке в точке  $(a;0)$  (кривые 2).

На рис.4 приведен параметр повреждаемости  $d$  при  $z = h/2$  в центре квадратной пластины (кривые

1), в точке  $(a; 0)$  квадратной пластины, при  $z = h/2$  (кривые 2) и в точке  $(a;0)$  пластины сложной формы, при  $z = h/2$  (кривые 3). Было найдено время скрытого разрушения  $t_*$  в заделке, которое для квадратной пластины составило 106 часов, а для пластины с круговыми вырезами – 174 часа.

На рис. 5, 6 показано изменение напряжений во времени, при  $z = h/2$ , в точке  $(0;0)$  и в точке  $(a;0)$  соответственно. Сплошными линиями представлены напряжения в пластине сложной формы, пунктирными – в квадратной пластине.

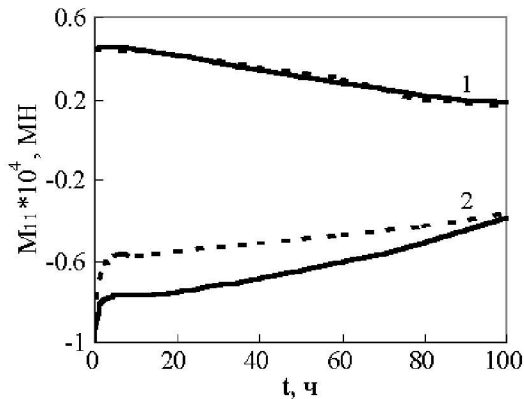


Рис. 3

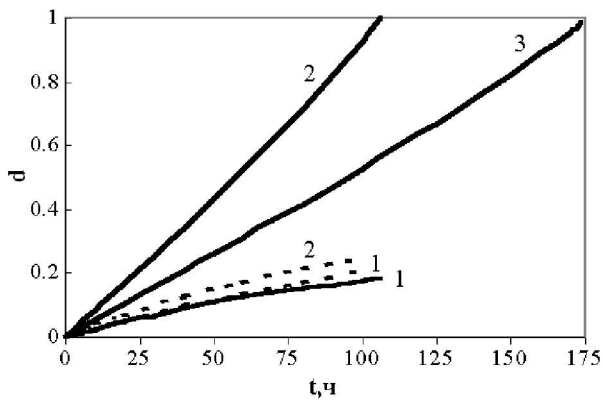


Рис. 4

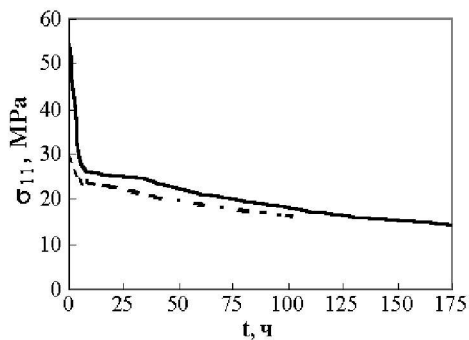


Рис. 5

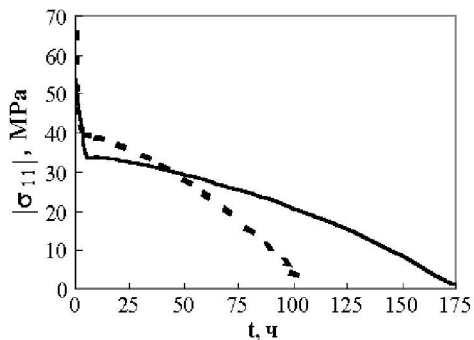


Рис. 6

Как видно из приведенных результатов, геометрическая форма пластины оказывает влияние на интенсивность процессов ползучести и повреждаемости.

Предложенный метод расчета реализован в виде комплекса программ на



языке С++ и обладает возможностями для автоматизации расчетов и проведения численного эксперимента при расчетах ползучести и длительной прочности пластинчатых элементов конструкций.

**Список литературы:** 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 2. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 3. *Склепус С.Н.* Вариационно-структурный метод в задачах ползучести пологих оболочек сложной формы // Доповіді НАН України. 2001. №9. С. 73-78. 4. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep-damage conditions // Archive of Applied Mechanics. 1997. 67. p. 339–352.

*Поступила в редакцию 04.04.02*

УДК 539.3

**Н.А. ТКАЧУК**, канд.техн.наук

## **РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Запропоновано основи розрахунково-експериментального методу для розрахунку напружено-деформованого стану елементів складних механічних систем. Описано структурну та функціональну схеми досліджень із застосуванням методу скінчених елементів та спекл-голографічної інтерферометрії.

Рассмотрим механический объект в пространстве с декартовыми координатами, занимающий область  $\Omega$  с границей  $S = S_u \cup S_F \cup S_c$ , где  $S_u$  – часть границы с заданными перемещениями,  $S_F$  – часть границы с заданными нагрузками,  $S_c$  – часть границы с заданными условиями контакта. Пусть задано также некоторое механическое пространственное, температурное или иное воздействие на тело. Напряженно-деформированное состояние описывается в операторном виде

$$L(u, p) = 0, \quad (1)$$

где  $L$  и  $u$  – оператор краевой задачи и переменная состояния;

$p$  – массив параметров, включающий в зависимости от типа задачи геометрические параметры, характеристики материала, параметры силовой, термической нагрузки и т.д.

Для решения данной задачи используется расчетный метод конечных элементов и экспериментальный метод спекл-голографической интерферометрии [1,2]. Пусть в операторном виде численная модель принимает вид:

$$L_N(u_N, p_N) = 0, \quad (2)$$

где индекс  $N$  соответствует численным параметрам теоретической модели (1).