

Ильченко Е.Н., Шальгин С.А. Численная оценка сходимости традиционного и полуаналитического вариантов МКЭ при расчете циклически симметричных тел // Сопроотивление матер. и теория сооруж. 1989. – С. 40-42. 3. Qiu Chunhang, Wu Gaofeng Coupling analysis of substructures with different symmetries // Comput. and struct. – 1988. – № 30, Т. 4. – P. 861-863. 4. Dickens John M., Pool Kirby V. Dynamic response analysis of cyclic symmetry structure to periodic time domain loading // AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 31st Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Long Beach, Calif., 1990: Techn. Pap. Pt.1. – Washington (D.C.). – 1990. – P. 436-443. 5. Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин А.Ю., Любецкая В.Б. Анализ чувствительности для конечноэлементных моделей конструкций // Вестник НГУ «ХПИ». – 2003. – № 8, Т. 3. – С. 77-82.

Поступила в редакцию 25.04.2006

УДК 539.3

**Н.В.СМЕТАНКИНА**, канд.техн.наук, **Е.В.СВЕТ**,  
**А.Н.ШУПИКОВ**, докт.техн.наук; ИПМаш НАН Украины

### **РАСЧЕТ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ**

Пропонується метод розв'язання задачі стаціонарної термопружності багатопарових пластин неканонічної форми в плані, контур яких складений із прямих і дуг кіл. Температурні навантаження одержані у результаті розв'язання задачі теплопровідності багатопарових пластин. Досліджено температурні напруження у п'ятипаровій пластині.

A method for solution of a stationary thermoelasticity problem of multilayer plates of non-canonical plan form which contour formed by straight lines and arches of circles is offered. Thermal loadings are obtained as result of solution of multilayer plate heat conduction problem. Thermal stresses in a five-layer plate are analyzed.

**Введение.** Широкое применение многослойных элементов конструкций в различных отраслях техники связано с необходимостью разработки методов их расчета при различных нагружениях, в том числе при тепловых воздействиях. Как показывает анализ литературных источников, наиболее исследованы однородные конструкции [1-5]. Задачи термоупругости многослойных пластин и оболочек чаще всего решаются для объектов канонической формы, а также, когда закон распределения температуры по толщине и поверхности конструкции задан, а не получен из решения задачи теплопроводности этих элементов конструкций [6-9].

В настоящей работе предлагается метод решения задачи термоупругости многослойных пластин неканонической формы в плане при воздействии температурных полей, которые определяются из решения задачи стационарной теплопроводности.

**Основные соотношения.** Рассматривается многослойная пластина, собранная из  $l$  слоев постоянной толщины и отнесенная к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя. На коор-

динатной поверхности пластина занимает область  $G$ , ограниченную контуром  $L$ . На пластину действует система силовых и тепловых нагрузок.

Поведение пластины описывается в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига [10, 11]. Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Перемещения точек пластины представляются в виде

$$u^i = u + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \Psi_x^j + (z - \delta_{i-1}) \Psi_x^i; \quad v^i = v + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \Psi_y^j + (z - \delta_{i-1}) \Psi_y^i; \\ w^i = w; \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j; \quad \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i; \quad i = \overline{1, I}, \quad (1)$$

где  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ ,  $w = w(x, y)$  – перемещения точки координатной поверхности в направлении координатных осей;  $\Psi_x^i = \Psi_x^i(x, y)$ ,  $\Psi_y^i = \Psi_y^i(x, y)$  – углы поворота нормального элемента в  $i$ -м слое вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$ ;  $h_j$  – толщина  $j$ -го слоя. Деформации слоев  $\varepsilon_x^i, \varepsilon_y^i, \gamma_{xy}^i, \gamma_{xz}^i, \gamma_{yz}^i$  определяются согласно формулам Коши [10]. Напряжения и деформации в  $i$ -м слое связаны законом Гука

$$\sigma_x^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\varepsilon_x^i + \nu_i \varepsilon_y^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_i^i T_i; \quad \sigma_y^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\varepsilon_y^i + \nu_i \varepsilon_x^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_i^i T_i; \\ \tau_{xy}^i = G_i \gamma_{xy}^i; \quad \tau_{xz}^i = G_i \gamma_{xz}^i; \quad \tau_{yz}^i = G_i \gamma_{yz}^i; \quad i = \overline{1, I}, \quad (2)$$

где  $G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$ ;  $E_i$  – модуль Юнга материала  $i$ -го слоя;  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона;  $\alpha_i^i$  – коэффициент линейного температурного расширения материала  $i$ -го слоя;  $T_i$  – изменение температуры по отношению к температуре ненапряженного состояния.

На основе вариационного принципа виртуальной работы получены уравнения равновесия многослойной пластины

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{Q}^l - \mathbf{Q}; \quad (x, y) \in G, \quad (3)$$

а также соответствующие граничные условия

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{U} = \mathbf{Q}^L. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  – вектор силовых нагрузок,  $\mathbf{U}$  – вектор искомых функций перемещений,

$$\mathbf{U} = \{u, v, w, \Psi_x^i, \Psi_y^i\}^T; \quad \mathbf{Q}^l = \{C_{t,x}^l, C_{t,y}^l, 0, D_{t,x}^l, D_{t,y}^l\}^T; \quad \mathbf{Q}^L = \{C_t^L, 0, 0, D_t^L, 0\}^T; \\ C_t^l = \sum_{i=1}^l N_t^i; \quad D_t^l = h_i \sum_{j=1}^i N_t^{j+1} + M_t^l; \\ N_t^i = \frac{E_i \alpha_i^i}{1-\nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz; \quad M_t^i = \frac{E_i \alpha_i^i}{1-\nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) dz; \quad i = \overline{1, I}.$$

Элементы симметричной матрицы  $\mathbf{C}$  (3) приведены в работе [11], эле-

менты матрицы  $\Gamma$  (4) – в работе [10].

**Метод решения.** Решение поставленной задачи термоупругости опирается на метод погружения, ранее разработанный для решения задач нестационарной динамики многослойных пластин [12]. Исходная многослойная пластина произвольной формы в плане погружается во вспомогательную охватывающую многослойную пластину с такой же композицией слоев. Форма охватывающей пластины выбирается таким образом, чтобы возможно было получить простое аналитическое решение. В настоящей работе в качестве вспомогательной принимается прямоугольная многослойная шарнирно опертая пластина. Условия нагружения вспомогательной пластины в области  $G$  совпадают с условиями нагружения исходной пластины.

Чтобы обеспечить выполнение действительных граничных условий (4), к вспомогательной пластине по следу контура  $L$  прилагаются дополнительные компенсирующие усилия и моменты  $\mathbf{Q}^c = \{q_j^c(x, y)\}$ ,  $(x, y) \in L$ ,  $j = \overline{1, 2I+3}$ . В уравнения термоупругого равновесия (3) функции компенсирующих нагрузок входят в виде интегральных соотношений:

$$p_j^c(x, y) = \int_0^{s^*} q_j^c(x_L, y_L) \delta(x - x_L, y - y_L) ds, \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad (5)$$

где  $\delta(x - x_L, y - y_L)$  – двумерная  $\delta$ -функция Дирака;  $L: x_L = x(s), y_L = y(s), 0 \leq s \leq s^*$ ;  $s$  – текущая длина дуги;  $s^*$  – периметр пластины.

Граничные условия (4) с учетом (5) приводят к системе интегральных уравнений для определения интенсивностей компенсирующих нагрузок

$$\Gamma \mathbf{U}[\mathbf{Q}^c(x, y)] = \mathbf{Q}^L, \quad (x, y) \in L. \quad (6)$$

Метод решения системы (6) состоит в том, что функции перемещений  $\mathbf{U}$ , силовых  $\mathbf{Q}$ , температурных  $\mathbf{Q}^t$  и компенсирующих  $\mathbf{P}^c$  (5) нагрузок разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим условиям шарнирного опирания вспомогательной прямоугольной пластины

$$u_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jmn} B_{jmn}(x, y); \quad q_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{jmn} B_{jmn}(x, y);$$

$$q_j^t(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{jmn}^t B_{jmn}(x, y); \quad p_j^c(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^c B_{jmn}(x, y); \quad (7)$$

$$B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}; \quad B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B};$$

$$B_{3+i, mn} = B_{1mn}; \quad B_{3+I+i, mn} = B_{2mn}; \quad i = \overline{1, I}; \quad j = \overline{1, 2I+3},$$

$A$  и  $B$  – геометрические размеры пластины в направлении координатных осей.

Одновременно, функции компенсирующих нагрузок и функции, входя-

щие в граничные условия (4), разлагаются в ряд вдоль следа контура  $L$  [12]

$$q_j^c(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{j\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s); \quad u_j(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} u_{j\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s); \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad (8)$$

где

$$d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)]; \quad d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)]; \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \int_0^{s^*} d\tilde{s}; \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi.$$

В результате разложений (7), (8) и дальнейших преобразований система интегральных уравнений (6) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций компенсирующих нагрузок  $f_{j\alpha\mu}$ , решение которой позволяет определить значения компенсирующих нагрузок. Окончательно, решение задачи (3), (4) можно представить в виде

$$u_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{2I+3} \sum_{k=1}^m \eta_{jk}^{mn} \left[ q_{jmn} - q'_{jmn} + \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{j\alpha\mu} \theta_{j\alpha\mu}^{mn} \right] B_{jmn}; \quad j = \overline{1, 2I+3},$$

где  $\eta_{jk}^{mn}$  – коэффициенты обратной матрицы, полученной при разложении функций перемещений, входящих в уравнения равновесия (3), в ряды по функциям, удовлетворяющим условиям шарнирного опирания вспомогательной прямоугольной пластины;

$$\theta_{j\alpha\mu}^{mn} = \frac{4}{AB} \int_0^{s^*} d_{\alpha\mu}(s) B_{jmn}(x_L, y_L) ds; \quad j = \overline{1, 2I+3}.$$

**Численные результаты.** Работоспособность и эффективность разработанного метода проиллюстрирована на примере решения задачи термоупругости многослойной пластины, контур которой составлен из  $K$  отрезков прямых и сопряженных с ними  $K$  дуг окружностей ( $K = 4$ ). Участки контура  $s_{2k-1}$ , представляющие собой отрезки прямых, задаются следующими уравнениями:

$$x_L = x_{2k-1} + (S - S_{2(k-1)}) \cos \alpha_{2k-1}; \quad y_L = y_{2k-1} + (S - S_{2(k-1)}) \sin \alpha_{2k-1}; \quad k = \overline{1, K},$$

где точка с координатами  $(x_{2k-1}, y_{2k-1})$  – начало  $(2k-1)$ -го отрезка прямой.

Участки контура  $s_{2k}$ , представляющие собой дуги окружностей, задаются соотношениями:

$$x_L = x_{2k} + R_k \left[ \sin \left( \frac{S - S_{2k-1}}{R_k} + \alpha_{2k-1} \right) - \sin \alpha_{2k-1} \right];$$

$$y_L = y_{2k} - R_k \left[ \cos \left( \frac{S - S_{2k-1}}{R_k} + \alpha_{2k-1} \right) - \cos \alpha_{2k-1} \right]; \quad k = \overline{1, K},$$

где точка  $(x_{2k}, y_{2k})$  – конец  $(2k-1)$ -го отрезка прямой,  $\alpha_{2k-1}$  – угол между  $(2k-1)$ -м отрезком прямой на контуре и положительным направлением оси  $Ox$ ,  $S$  – длина участка контура от начала отсчета [точка  $(x_1, y_1)$ ] до текущей

точки  $(x, y)$  на данном участке контура;  $S_k = \sum_{i=1}^k s_i$ ,  $S_0 = 0$ .

На рис. 1 приведена расчетная схема пластины,  $l_1 = 74$  мм,  $l_2 = 53$  мм,  $l_3 = 77$  мм,  $l_4 = 60$  мм,  $R_i = 30$  мм,  $i = \overline{1, 4}$ . Слои пластины выполнены из материалов со следующими характеристиками:  $E_i = 6,8 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_i = 0,22$ ,  $\alpha_i^t = 9 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $i = 1, 3, 5$ ;  $E_i = 2,2 \cdot 10^2$  МПа,  $\nu_i = 0,38$ ,  $\alpha_i^t = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $i = 2, 4$ ;  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = 3$  мм,  $h_3 = 19$  мм,  $h_4 = 2$  мм,  $h_5 = 12$  мм.

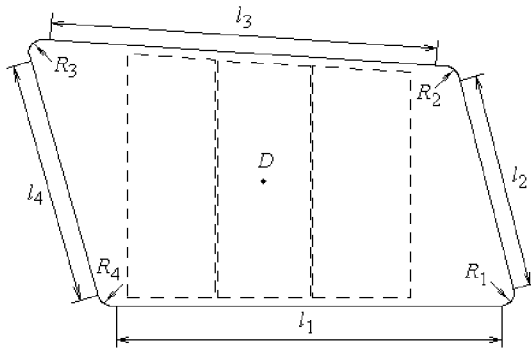


Рисунок 1 – Расчетная схема

Предполагается, что силовые нагрузки отсутствуют. Поле температурных нагрузок получается из решения задачи теплопроводности многослойных пластин [13] с учетом воздействия пленочного источника тепла. Боковая поверхность пластины считается идеально теплоизолированной. Задача теплопроводности решена с такими исходными данными:  $k_i = 1,08$  Вт/(м $\cdot$ °C),  $i = 1, 3, 5$ ;  $k_i = 0,22$  Вт/(м $\cdot$ °C),  $i = 2, 4$  (коэффициенты теплопроводности материала  $i$ -го слоя);  $H_1 = 433$  Вт/(м $^2$ ·°C),  $H_2 = 20$  Вт/(м $^2$ ·°C) (коэффициенты конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях пластины);  $T_1 = -30$  °C,  $T_2 = 20$  °C (температура среды на границе с верхней и нижней поверхностями). Пленочный источник тепла мощностью  $q = 6$  кВт/м $^2$  расположен между первым и вторым слоями пластины. Расположение источника показано на рис. 1 штриховой линией.

На рис. 2 представлено распределение температуры и главного напряжения  $\sigma_1^t$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) по толщине пластины в точке  $D$  (см. рис. 1), расположенной посередине области, занимаемой источником тепла. Также показана композиция слоев. На поверхности раздела первого и второго слоев пластины наблюдается резкое изменение температуры и напряжения, вызванное наличием источника тепла.

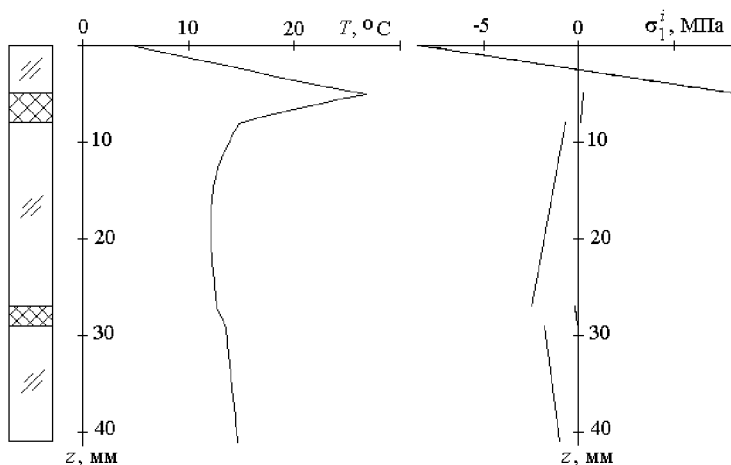


Рисунок 2 – Распределение температуры и напряжения по толщине пластины

**Выводы.** Разработан метод решения задач термоупругости многослойных пластин неканонической формы в плане, позволяющий представить решение задачи в аналитической форме. Предложенный подход может быть применен при проектировании систем обогрева многослойного остекления различных транспортных средств.

**Список литературы:** 1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с. 2. *Болл Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с. 3. *Подстригач Я.С., Швец Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наукова думка, 1978. – 344 с. 4. *Рвачев В.Л., Тицкий В.П., Шевченко А.Н.* К решению одной задачи термоупругости для тонких изотропных пластин сложной геометрии // Матем. методы и физико-механич. поля. – 1984. – Вып. 19. – С. 62-65. 5. *Мотовиловец И.А., Козлов В.И.* Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т. – Т. 1. Термоупругость. – Киев: Наукова думка, 1987. – 264 с. 6. *Пискунов В.Г., Сипетов В.С.* Об одном подходе к решению задач термоупругости слоистых пластин // Строит. механика и расчет сооружений. – 1986. – № 1. – С. 28-31. 7. *Khdeir A.A.* On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates // J. Applied Mechanics. – 1997. – V. 64, № 1. – P. 229-233. 8. *Verijenko V.E., Tauchert T.R., Tabakov P.Y.* Refined theory of laminated anisotropic shells for the solution of thermal stress problems // J. Thermal Stresses. – 1999. – V. 22, № 1. – P. 75-100. 9. *Ogutanam D.C.D., Hansen J.S., Heppler G.R.* Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels // J. Applied Mechanics. – 2004. – V. 71, № 1. – P. 49-56. 10. *Сметанкина Н.В., Свет Е.В., Шутиков А.Н.* Термоупругое деформирование многослойных пластин // Вестник НТУ «ХПИ». – Динамика и прочность машин. – 2001. – Вып. 25. – С. 135-140. 11. *Сметанкина Н.В., Свет Е.В., Шутиков А.Н.* Термонапряженное состояние многослойных пластин // Вестник НТУ «ХПИ». – Динамика и прочность машин. – 2002. – Т. 9, № 9. – С. 59-64. 12. *Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / Шутиков А.Н., Бузько Я.П., Сметанкина Н.В. и др.* – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с. 13. *Сметанкина Н.В., Свет Е.В., Шутиков А.Н.* Задача стационарной теплопроводности многослойных пластин со сложной формой // Проблемы машиностроения. – 2004. – Т. 7, № 3. – С. 25-31.

Поступила в редколлегию 11.04.2006