

2. Моделирование задач эксплуатации систем трубопроводного транспорта / *Е.И. Яковлев, В.Д. Куликов и др.* М.: ВНИИОЭНГ, 1992. 358 с. 3. Моделирование и управление газотранспортными системами / *Г.Н. Поляков, Е.И. Яковлев, А.С. Пиотровский.* СПб.: Недра, 1992. 256 с. 4. *Кривошеин Б.Л.* Теплофизические расчеты газопроводов. М.: Недра, 1982. 168 с. 5. *Коротаев Ю.П., Кривошеин Б.Л., Новаковский В.Н.* Термогазодинамика газопромысловых систем. М.: Недра, 1991. 276 с. 6. О математических моделях неизотермического нестационарного течения газа в трубах / *Б.Л. Кривошеин, А.В. Дубинский и др.* // Известия вузов. Нефть и газ. 1976. №12. С. 82–86. 7. *Брук В.А.* Нестационарный теплообмен между потоком газа в трубопроводе и внешней средой // Промышленная теплотехника. 1982. Т. 4. №5. С. 48–53. 8. *Идин М.А., Шериков В.В.* Решение задачи движения газа в трубе методом малого параметра // Пневматика и гидравлика: Приводы и системы управления. 1984. Вып. 10. С. 249–263. 9. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с. 10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с. 11. *Скляр Ю.С., Минкин С.И.* Анализ переходных процессов в длинных линиях постоянного тока методами теории дифференциально-разностных уравнений // Известия вузов. Электромеханика. 1975. №7. С. 687–694.

*Поступила в редколлегию 00.00.02*

УДК 621.771.63; 621.785

***Т.С.СКОБЛО***, докт.техн.наук; ***А.И.СИДАШЕНКО***, канд.техн.наук;  
***А.Д.МАРТЫНЕНКО; Н.В.СЛОНОВСКИЙ***; ХГТУСУХ

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РЕЖИМА ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПОДВЕРГНУТЫХ ХИМИКО-ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ПРОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОКРЫТИЙ**

В роботі розглянуті існуючі методи проведення деазотування деталей, попередньо підданих хіміко-термічній обробці та наведено результати експериментів і математичне обґрунтування режимів процесу дисоціації нітридів для підвищення міцності відновлювальних покриттів.

Ряд деталей машин и оборудования для повышения износостойкости и обеспечения высокого уровня прочности и твердости подвергаются химико-термической обработке – азотированию, цементации, нитро-цементации. В процессе их эксплуатации и изнашивания такой упроченный слой частично сохраняется, что при восстановлении любым из общепринятых методов наращивания не обеспечивает получение качественного покрытия.

Наиболее часто встречаемые в производстве способы восстановления [1] включают такие технологические операции как - предварительную термообработку, удаление дефектов путем обточки, наплавку слоя металла с помощью электрода, предварительную и окончательную механическую и термическую обработки.

Недостатком этих способов является то, что требуется выполнение большого количества операций, предшествующих восстановительной – наплавке, отжиг для снятия напряжений, механическая обработка для снятия

дефектного слоя. Кроме того, наплавка слоя металла с помощью электрода приводит к интенсивному прогреву и короблению тонкостенных и длинномерных деталей, а также изменению физико-механических свойств сердцевины деталей. Для завершения операции восстановления детали требуется последующая окончательная термическая обработка. Такая технология эффективна для небольшого объема восстанавливаемых деталей или для которых требуется компенсация изношенного слоя более 2-3мм.

Удаление частично сохранившегося упрочненного слоя путём механической обработки уменьшает эффективное сечение и снижает усталостную прочность детали. При такой подготовке к ремонту много металла идет в отходы, приходится удалять полностью оставшийся упрочненный слой, который в ряде случаев и не содержит каких-либо дефектов. В процессе ремонта и восстановления деталей приходится наносить компенсирующий слой существенно больший, чем это можно было бы сделать при сохранении качественного и предварительно упрочненного слоя. Это связано с тем, что при наличии такого слоя при восстановлении наплавкой из-за нагрева происходят структурные изменения, которые приводят к разложению (диссоциации) окислов нитридов и растворения карбидов.

Процесс сопровождается газовыделением, поро- и трещинообразованием. Кроме того, большое количество тепла, выделяемое при наплавке, может существенно изменить геометрическую форму детали. Поэтому наиболее целесообразным является разложение упрочняющих фаз перед восстановлением с использованием локального нагрева для формирования заданной по величине переходной зоны при обработке лазерным лучом.

В промышленности известен способ разложения слоя, полученного химико-термической обработкой [2], который позволяет восстанавливать деталь без полного его удаления. Метод заключается в обезуглероживании стальных изделий путем нагрева и выдержки при 1000-1050<sup>0</sup>С в расплаве оксидов: - железа (2,7-2,9вес %); – бария (14–16 вес %) и хлористого железа (остальное). Этот метод не может быть использован для тонкостенных, длинномерных деталей, поскольку приведет к изменению геометрических размеров (короблению), разупрочнению сердцевины, увеличению зерна в металле рабочего слоя при длительной выдержке в области высоких температур, развитию процессов эрозии.

Большинство деталей машин и оборудования, работающих в сопряжении, имеют износ рабочего слоя, не превышающий 0,5 мм, поэтому компенсировать его по известной технологии не эффективно из-за большого количества операций, интенсивного прогрева деталей, большого расхода наплавляемого металла и объемов механической обработки (до и после восстановления).

Для восстановления длинномерных и тонкостенных деталей, предварительно упрочненных химико-термическим способом, нами предложено выполнение следующего ряда технологических операций:

– предварительную лазерную термическую обработку поверхности детали (отжиг) для “разложения” оставшегося после эксплуатации азотированного

слоя, путем его нагрева до температуры диссоциации нитридов и карбонитридов на глубину формирования переходной зоны (0,4-0,5мм);

- нанесение компенсирующего износ покрытия, используя при этом электроискровую обработку (ЭИО) электродами из стали типа 30X13 с одновременной пластической деформацией (ППД) шариком или роликом;

- окончательная механическая обработка детали под номинальный размер – шлифование.

Для определения математической зависимости между параметрами лазерной обработки и глубиной разложения нитридов в качестве геометрической модели выбрали полый цилиндр ограниченный двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Используя принцип относительности, считали процесс обработки – установившимся, отсутствует зависимость между температурой детали и ее теплопроводностью, луч лазера постоянным (отсутствует неоднородность в распределении плотности мощности по диаметру лазерного пятна) и неподвижным, а цилиндр – совершающим сложное движение: вращательное относительно оси и поступательное вдоль нее. Выбрали цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$  (рис. 1) с осью, совпадающей с осью цилиндра (втулки). В рассматриваемом случае движущейся среды (т.е. перемещающейся втулки) уравнение теплопроводности имеет вид 1 с учетом конвективных процессов (во внутренней части втулки) [3-5].

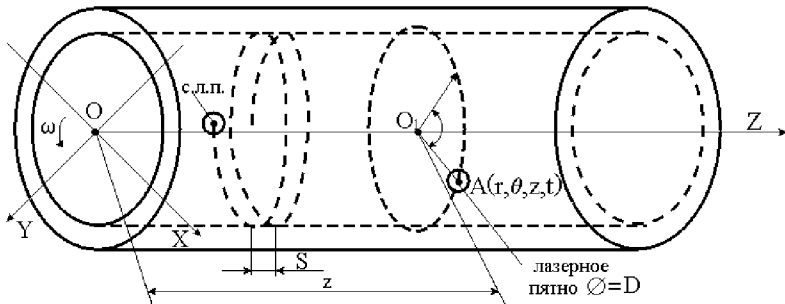


Рис. 1. Схема для расчета режимов лазерной термообработки

$$\frac{D}{Dt} T - \chi \nabla^2 T = 0, \quad (1)$$

где  $D/Dt$  – субстанциональная производная;  $T$  – температура во внутренних точках цилиндра;  $\chi$  – коэффициент температуропроводности;  $\nabla^2$  – оператор Лапласа. Температуру  $T$  отсчитывали от окружающей среды (температура воздуха внутри помещения  $T_b = 20$  °C).

Рассмотрим термообработку внешней поверхности цилиндра (втулки). При этом крайвым условием на внутренней поверхности будет:  $T(r, \theta, z) = 0$  (2), а на внешней поверхности в области  $\Gamma^b$ , совпадающей со следом лазерно-

го луча –  $\frac{\partial}{\partial r} T(r, \theta, z) \int_{r=b} = -\frac{q}{\lambda}$  (3), и вне области  $\Gamma^b: T(b, \theta, z) = 0$  (4), где  $\partial/\partial r$  – частная производная;  $q$  – плотность теплового потока переносимого лазерным пучком через поверхность цилиндра;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала втулки;  $a, b$  – внутренний и внешний радиусы цилиндра.

Решение уравнения (1) при краевых условиях (2) и (4) даст распределение температурного поля во внутренних точках цилиндра. Переходя к решению краевой задачи (1) и (4) перепишем уравнение (1) в эквивалентном виде [3]:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} T + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} T + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T - \frac{\omega}{\chi} \frac{\partial}{\partial \theta} T - \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} T = 0; \quad (5)$$

краевыми условиями будут:  $T(a, \theta, z) = 0$  (6);  $T(b, \theta, z) = T^b \chi(\theta) \chi(z)$  (7), где  $T^b$  – температура поверхности в области  $\Gamma^b$ ;  $\chi(\theta), \chi(z)$  – функции, равные единице в области  $\Gamma^b$  и нулю вне  $-\Gamma^b$ .

Найдем коэффициент Фурье  $T_k(r, z)$  функции  $T(r, \theta, z)$ ,

$$T_k(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(r, \theta, z) e^{-ki\theta} d\theta, \quad (8)$$

где  $k$  – индекс суммирования  $k = -\infty; +\infty$ ;  $i$  – мнимая единица  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\theta$  – полярный угол.

Умножая соотношения (5) и (7) на  $e^{-ki\theta}$  и интегрируя почленно (слагаемые в (5), содержащие производные по  $\theta$ , интегрируем по частям), находим:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} T_k(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_k(r, z) - \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} T_k(r, z) - \frac{i\omega}{\chi} T_k(r, z) = 0, \quad (9)$$

где в соотношениях (5) и (9):  $V$  – скорость перемещения лазерного луча вдоль оси цилиндра;  $\omega$  – угловая скорость вращения цилиндра (втулки).

В дальнейшем будут использоваться функции  $U_{sk}^a(r)$ , определяемые соотношением:

$$U_{sk}^a(r) = I_k(\beta_{sk} r) N_k(\beta_{sk} a) - I_k(\beta_{sk} a) N_k(\beta_{sk} r), \quad (10)$$

где  $I_k(\cdot), N_k(\cdot)$  – функции Бесселя и Неймана порядка  $n$ ;  $\beta_{sk}$  – корни уравнения. При этом:

$$I_k(\beta_{sk} b) N_k(\beta_{sk} a) - I_k(\beta_{sk} a) N_k(\beta_{sk} b) = 0. \quad (11)$$

Найдем приближенные (но достаточно точные) значения корней  $\beta_{sk}$ . Используя асимптотические представления функций  $I_k(\xi), N_k(\eta)$  при больших значениях параметров  $\xi, \eta$  [6], находим:

$$I_k(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \quad (12); \quad N_k(\eta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}} \sin\left(\eta - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right). \quad (13)$$

Исходя из (10) (12), (13) получим:

$$U_{sk}^a(r) \approx \frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta_{sk}} \frac{1}{\sqrt{ra}} \left[ \cos\left(\beta_{sk}r - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\beta_{sk}a - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\beta_{sk}a - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\beta_{sk}r - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (14)$$

Таким образом, по формуле сложения имеем:

$$U_{sk}^a(r) \approx -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\beta_{sk}} \frac{1}{\sqrt{ra}} \sin[\beta_{sk}(r-a)]; \quad (15)$$

из (11) и (15) находим:  $\sin[\beta_{sk}(b-a)] \approx 0$ ,

$$\text{откуда:} \quad \beta_{sk} \approx \frac{\pi}{b-a} s, \quad s = \overline{0 \dots \infty}. \quad (16)$$

Отметим, что в [7] получены более точные асимптотические оценки для бесселевых функций, что дает возможность уточнить соотношения (15), (16). Умножим почленно уравнение (9) на  $U_{sk}^a(r)$ , и проинтегрируем в пределах (a, b). Преобразуем, имеющееся выражение (13), введя оператор  $L_k$  и используем функции  $T_{sk}^a(z)$  и  $U_{sk}^a(z)$ :

$$\begin{aligned} L_k T_{sk}^a(z) &\equiv \left( -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^a(z) = \int_a^b \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_k(r,z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T_k(r,z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r,z) \right] \times \\ &\times U_{sk}^a(r) r dr = \int_a^b \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r,z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r,z) \right] [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \times \\ &\times r dr = \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r,z) - \frac{k^2}{r} T_k(r,z) \right] [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = \\ &= \int_a^b [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r,z) dr - k^2 \int_a^b T_k(r,z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) \times \\ &\times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r,z) [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \Big|_{r=a}^b - \\ &- \int_a^b r \frac{\partial}{\partial z} T_k(r,z) \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr - k^2 \int_a^b T_k(r,z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) \times \\ &\times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = b [I_k(\beta_{sk}b) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}b)] \frac{\partial}{\partial r} T_k(r,z) \Big|_{r=b} - \\ &- a [I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}a)] \frac{\partial}{\partial r} T_k(r,z) \Big|_{r=a} - \int_a^b [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) \times \\ &\times N_k(\beta_{sk}r)] \frac{1}{r} dr T_k(r,z) - k^2 \int_a^b T_k(r,z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = \\ &= - \left[ r [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] \frac{1}{r} T_k(r,z) \Big|_{r=a}^b - \int_a^b T_k(r,z) \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r) \times \right. \\ &\left. \times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr \right] - k^2 \int_a^b T_k(r,z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) N_k(\beta_{sk}r)] dr = \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
&= -\left\{ I_k^1(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b) \right\} \beta_{sk} T_k(b, z) - a \left[ I_k^1(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a) \right] \times \\
&\times N_k^1(\beta_{sk}a) \beta_{sk} T_k(a, z) + \int_a^b T_k(r, z) \left\{ \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)] + \right. \\
&+ \left. \left( r\beta_{sk}^2 - \frac{k^2}{r} \right) [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)] - r\beta_{sk}^2 [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - \right. \\
&- \left. I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)] \right\} dr
\end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в фигурной скобке, тождественно равно нулю в соответствии с дифференциальным уравнением для цилиндрических функций [6]. Используя выражение для вронскиана функций Бесселя [7] зависимость (17) представится в виде:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{sk}^a(z) - \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} T_{sk}^a(z) - \left( \beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^a(z) = \frac{2}{\pi} \left[ T_k(a, z) - \frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)} T_k(b, z) \right], \quad (17, a)$$

$$\text{где} \quad T_{sk}^a(z) = \int_a^b T_k(r, z) U_{sk}^a(r) r dr.$$

Найдем выражение для  $T_k(b, z)$ , из (8) имеем:

$$T_k(b, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi_0/2}^{\varphi_0/2} T^b \chi(\theta) \chi(z) e^{-ki\theta} d\theta, \quad (18)$$

где  $\varphi_0$  – угловой размер области  $\Gamma^b$ , центр которой расположен в точке  $(b, 0, 0)$ . Считая температуру  $T^b$  в области  $\Gamma^b$  постоянной, получим:

$$T_k(b, z) = \frac{1}{2\pi} T^b \frac{1}{-ik} \left( e^{-ik\frac{\varphi_0}{2}} - e^{ik\frac{\varphi_0}{2}} \right) = \frac{1}{\pi} T^b \chi(z) \frac{1}{k} \frac{e^{ik\frac{\varphi_0}{2}} - e^{-ik\frac{\varphi_0}{2}}}{2} = \frac{1}{\pi} \chi(z) T^b \frac{\text{sink}\varphi_0/2}{k}, \quad (19)$$

Из (19) и (17) имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{sk}^a(z) - \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} T_{sk}^a(z) - \left( \beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^a(z) = \frac{2}{\pi} \left[ T_k(a, z) - \frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)} \frac{1}{\pi} \chi(z) \frac{\text{sink}\varphi_0/2}{k} T^b \right], \quad (20)$$

Аналогичным образом может быть преобразовано уравнение (9), но уже применительно к функциям  $T_{sk}^b(z)$  и  $U_{sk}^b(r)$ . С помощью зависимости (21):

$$U_{sk}^b(r) = I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r), \quad (21)$$

имеем:

$$\begin{aligned}
L_k T_{sk}^b(z) &\equiv \left( -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{V}{\chi} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^b(z) = \int_a^b \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} T_k(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r, z) \right] \times \\
&\times U_{sk}^b(r) r dr = \int_a^b \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r^2} T_k(r, z) \right] [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] \times \\
&\times r dr = \int_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) - \frac{k^2}{r} T_k(r, z) \right] [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] r dr =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) dr - k^2 \int_a^b T_k(r, z) I_k(\beta_{sk}r) \times \\
&\times N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r) dr = r \frac{\partial}{\partial r} T_k(r, z) I_k(\beta_{sk}r) N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b) N_k(\beta_{sk}r) \Big|_{r=a}^b - \\
&- \int_a^b r \frac{\partial}{\partial z} T_k(r, z) \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} I_k(\beta_{sk}r) \times \\
&\times N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r) dr = b [I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b)] \frac{\partial}{\partial r} T_{sk}(r, z) \Big|_{r=b} - \\
&- a [I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a)] \frac{\partial}{\partial r} T_{sk}(r, z) \Big|_{r=a} - \int_a^b r [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b) \times \\
&\times N_k(\beta_{sk}r)] \frac{1}{r} dr T_k(r, z) - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr
\end{aligned} \tag{2I,a}$$

Выражение в первой квадратной скобке в 2I,a тождественно равно нулю, функция во второй квадратной скобке равна нулю в соответствии с (II). Таким образом, предыдущее соотношение (после еще одного интегрирования по частям) преобразуется в:

$$\begin{aligned}
&- \left\{ r [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] \frac{1}{r} T_k(r, z) \Big|_{r=a}^b - \int_a^b T_k(r, z) \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - \right. \\
&- I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr \Big\} - k^2 \int_a^b T_k(r, z) \frac{1}{r} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] dr = - \{ b I_k \times \\
&\times [I_k'(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b) - (\beta_{sk}b)N_k'(\beta_{sk}b)] \beta_{sk} T_k(b, z) - a [I_k'(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a)] \times \\
&\times \beta_{sk} T_k(a, z) \} + \int_a^b T_k(r, z) \left[ \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] + \left( r \beta_{sk}^2 - \frac{k^2}{r} \right) \times \right. \\
&\times [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] - r \beta_{sk}^2 [I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)] \Big\} dr
\end{aligned} \tag{2I,б}$$

Подынтегральное выражение в фигурной скобке тождественно равно нулю в связи с тем, что цилиндрические функции первого, второго и третьего рода, либо их линейные комбинации удовлетворяют дифференциальному

уравнению [115]  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} U + \left( \beta_{sk}^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) U = 0$ , где  $U = z_k(\beta_{sk}r)$ ;  $z_k(\beta_{sk}r)$  – любая

из перечисленных цилиндрических функций.

Выражения в квадратных скобках вне интегралов могут быть преобразованы с помощью вронскианов функций Бесселя и Неймана [116] в выражения для вронскиана  $W$  функций  $U_1, U_2$ :  $W(U_1, U_2) = U_1 U_2' - U_1' U_2$ ; подставив функции Бесселя и Неймана, найдем:  $W(I_k, N_k) = 2/\pi z$ , отсюда для соотношения в первой квадратной скобке в (2I,б) находим его значение:  $-2/\pi r_{sk} b$ .

Преобразуем выражение во второй квадратной скобке вне интеграла в

(21,б), используя соотношение, вытекающее из (11)

$$N_k(\beta_{sk}b) = N_k(\beta_{sk}a) \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)},$$

получим для второй квадратной скобки представление:

$$-\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} W(I_k, N_k)(\beta_{sk}a)$$

В этом выражении указан условно аргумент функций, входящий в определитель Вронского [8]. При этом получаем соотношение:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{sk}^b(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{sk}^b(z) - \left( \beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{sk}^b(z) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} T_k(a, z) - T_k(b, z) \right], \quad (22)$$

Рассмотрим частные случаи уравнений (20) и (22). Если на внешней поверхности температура равна нулю, то и  $T_k(b, z) = 0$  тогда из (22) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{skb}^b(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{skb}^b(z) - \left( \beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{skb}^b(z) = \frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} T_k(a, z), \quad (23)$$

В случае равной нулю температуры поверхности  $T_k(a, z) \equiv 0$  из выражения (20) при нулевой температуре на внутренней поверхности имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{ska}^a(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{ska}^a(z) - \left( \beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{ska}^a(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)} T_k(b, z), \quad (24)$$

Вычислим  $T_k(a, z)$  по аналогии с (19):

$$T_k(a, z) = \frac{1}{2\pi} T^a \chi(z) \frac{1}{-ik} (e^{-ik \frac{|\varphi_0|}{2}} - e^{ik \frac{|\varphi_0|}{2}}) = \frac{1}{\pi} T^a \chi(z) \frac{e^{ik \frac{\varphi_0}{2}} - e^{-ik \frac{\varphi_0}{2}}}{2i} = \frac{1}{\pi} T^a \chi(z) \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k}, \quad (25)$$

где  $T^a$  – температура (постоянная) на внутренней поверхности цилиндра при воздействии лазерного луча (то есть в области  $\Gamma^a$ ). Из (24) и (25) имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{ska}^a(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{ska}^a(z) - \left( \beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{ska}^a(z) = -\frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)} \frac{1}{\pi} T^a \chi(z) \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k}, T^b = 0, \quad (26)$$

а из (22) и (19) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{skb}^b(z) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{skb}^b(z) - \left( \beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{skb}^b(z) = \frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{1}{\pi} T^a \chi(z) \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k}, T^b = 0, \quad (27)$$

Нижние индексы "a" и "b" указывают на какой из поверхностей  $\Gamma^a$  или  $\Gamma^b$  температура равна нулю, верхние индексы в  $T_{skb}^b(z)$ ,  $T_{ska}^a(z)$  указывают какое из интегральных преобразований из  $U_{sk}^a(r)$ , (или  $U_{sk}^b(r)$ ) было использовано. Из сопоставления (26) и (27) выходит следующее правило перехода от  $T_{skb}^b(z)$  к  $T_{ska}^a(z)$  для получения  $T_{ska}^a(r)$ : если известно выражение для  $T_{skb}^b(r)$



следует функцию  $T_{skb}^b(z)$  умножить на:  $-\frac{I_k^2(\beta_{sk} a) \theta_k^b}{I_k^2(\beta_{sk} b) \theta_k^a}$  (28),

$$\text{где} \quad \theta_k^a = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k} T^a, \quad \theta_k^b = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sink}|\varphi_0|/2}{k} T^b. \quad (29)$$

Предварительно решив уравнение для  $T_{skb}^b(r)$  в соответствии с (22), (27) и (29) получим:

$$\frac{d^2}{dz^2} T_{skb}^b(r) - \frac{V}{\chi} \frac{d}{dz} T_{skb}^b(z) - \left( \beta_{sk} + \frac{i\omega k}{\chi} \right) T_{skb}^b(z) = \frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \chi(z) \theta_k^a, \quad (30)$$

а затем по указанному выше правилу перейдем к  $T_{ska}^a(z)$ .

Введем обозначения:

$$\eta^{sk}(z) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} T_k(a, z) - T_k(b, z) \right] = \frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \chi(z) \theta_k^a, \quad \text{при } T_k(b, z) = 0; \\ b^* = -V/\chi; \quad C^{sk} = -(\beta_{sk}^2 + i k \omega / \chi), \quad (31)$$

Таким образом, из (30) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi^{sk}(z) + b^* \frac{d}{dz} \varphi^{sk}(z) + C^{sk} \varphi^{sk} = \eta^{sk}(z), \quad (32)$$

где  $-\varphi^{sk}(z) = T_{sk}^b(z)$ , (либо  $= T_{skb}^b(z)$ , если  $T_k(b, z) = 0$ ) (32,а)

Преобразуем (32) к виду не содержащему первой производной. Имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left\{ [\varphi^{sk}(z) e^{\alpha z}] e^{-\alpha z} \right\} + b^* \left\{ [\varphi^{sk}(z) e^{\alpha z}] e^{-\alpha z} \right\} + C^{sk} [\varphi^{sk}(z) e^{\alpha z}] e^{-\alpha z} = \eta^{sk}(z), \quad (33)$$

$$\text{полагая:} \quad \varphi_{sk}(z) = \varphi^{sk}(z) e^{\alpha z}, \quad (34)$$

(считаем  $\alpha$  постоянным параметром) получим:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_{sk}(z) - 2\alpha \frac{d}{dz} \varphi_{sk}(z) + \alpha^2 \varphi_{sk}(z) + b^* \left[ \frac{d}{dz} \varphi_{sk}(z) - \alpha \varphi_{sk}(z) \right] + C^{sk} \varphi_{sk}(z) = \eta^{sk}(z) e^{\alpha z}, \quad (35)$$

или:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_{sk}(z) + (b^* - 2\alpha) \frac{d}{dz} \varphi_{sk}(z) + (\alpha^2 - b^* \alpha + C^{sk}) \varphi_{sk}(z) = \eta_{sk}(z), \quad (36)$$

$$\text{где} \quad \eta_{sk}(z) = \eta^{sk}(z) e^{\alpha z}, \quad (37)$$

Далее выберем  $\alpha$ , удовлетворяющее соотношению:  $\alpha = b^*/2$ , (38)

$$\text{тогда:} \quad \alpha^2 - b^* \alpha + C^{sk} = -(b^*)^2/4 + C^{sk} \equiv -\mu_{sk}^2, \quad (39)$$

$$\text{отсюда:} \quad \mu_{sk}^2 = (b^*)^2/4 - C^{sk} = (V/2\chi)^2 + \beta_{sk}^2 + k\omega/\chi, \quad (40)$$

Таким образом находим:

$$\frac{d^2}{dz^2} \varphi_{sk}(z) - \mu_{sk}^2 \varphi_{sk}(z) = \eta_{sk}(z), \quad (41)$$

Это уравнение решим методом вариации произвольных постоянных [6]. В качестве фундаментальной системы однородного уравнения (41) имеем:

$$\varphi_{sk}^{(1)}(z) = e^{\mu_{sk}z}, \quad \varphi_{sk}^{(2)}(z) = e^{-\mu_{sk}z}, \quad (42)$$

Представим  $\varphi_{sk}(z)$  в виде:

$$\varphi_{sk}(z) = C_{sk}^{(1)}(z)\varphi_{sk}^{(1)}(z) + C_{sk}^{(2)}(z)\varphi_{sk}^{(2)}(z) = C_{sk}^{(1)}(z)e^{\mu_{sk}z} + C_{sk}^{(2)}(z)e^{-\mu_{sk}z}, \quad (43)$$

откуда находим в соответствии с методом Лагранжа:

$$\left[ \frac{d}{dz} C_{sk}^{(1)}(z) \right] e^{\mu_{sk}z} + \left[ \frac{d}{dz} C_{sk}^{(2)}(z) \right] e^{-\mu_{sk}z} = 0, \quad (44)$$

$$\left[ \frac{d}{dz} C_{sk}^{(1)}(z) \right] e^{\mu_{sk}z} + \left[ \frac{d}{dz} C_{sk}^{(2)}(z) \right] e^{-\mu_{sk}z} = \frac{1}{\mu_{sk}} \eta_{sk}(z), \quad (45)$$

тогда:

$$\frac{d}{dz} C_{sk}^{(1)}(z) = \frac{1}{2\mu_{sk}} e^{-\mu_{sk}z} \eta_{sk}(z) \quad (46), \quad \frac{d}{dz} C_{sk}^{(2)}(z) = -\frac{1}{2\mu_{sk}} e^{\mu_{sk}z} \eta_{sk}(z), \quad (47),$$

или после интегрирования:

$$C_{sk}^{(1)}(z) = C_{sk}^{(1)}(0) + \frac{1}{2\mu_{sk}} \int_0^z e^{-\mu_{sk}\bar{z}} \eta_{sk}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad (48)$$

$$C_{sk}^{(2)}(z) = C_{sk}^{(2)}(0) - \frac{1}{2\mu_{sk}} \int_0^z e^{\mu_{sk}\bar{z}} \eta_{sk}(\bar{z}) d\bar{z}, \quad (49)$$

Исходя из (43) находим результат выражения:

$$\begin{aligned} \varphi_{sk}(z) &= C_{sk}^{(1)}(0)e^{\mu_{sk}z} + C_{sk}^{(2)}(0)e^{-\mu_{sk}z} + \frac{1}{2\mu_{sk}} \int_0^z \eta_{sk}(\bar{z}) \left[ e^{\mu_{sk}(z-\bar{z})} - e^{-\mu_{sk}(z-\bar{z})} \right] d\bar{z} = \\ &= A_{sk} e^{\mu_{sk}z} + B_{sk} e^{-\mu_{sk}z} + \frac{1}{\mu_{sk}} \int_0^z \eta_{sk}(\bar{z}) \operatorname{sh}[\mu_{sk}(z-\bar{z})] \eta_{sk}(\bar{z}) e^{\alpha\bar{z}} d\bar{z} \end{aligned} \quad (50)$$

где  $A_{sk}$ ,  $B_{sk}$  – произвольные постоянные (как и  $C_{sk}^{(1)}(0)$ ,  $C_{sk}^{(2)}(0)$ ).

Соотношение (50) есть общим решением однородного уравнения (41), так как является суммой частного решения неоднородного. Из (50) находим в соответствии с (34) и (37).

$$\varphi_{sk}^{sk}(z) = e^{-\alpha z} \left\{ A_{sk} e^{-\mu_{sk}z} + \beta_{sk} e^{-\mu_{sk}z} + \frac{1}{\mu_{sk}} \int_0^z \operatorname{sh}[\mu_{sk}(z-\bar{z})] e^{\alpha\bar{z}} \eta_{sk}(\bar{z}) d\bar{z} \right\}, \quad (51)$$

или используя (38) и (40) имеем:

$$\varphi_{sk}^{sk}(z) = A_{sk} e^{\left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi} + \frac{1}{2\chi}} \right] z} + B_{sk} e^{\left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi} - \frac{1}{2\chi}} \right] z} + \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}}} \times \quad (52)$$

$$\times \int_0^z \left[ \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} T_k(a, \bar{z}) - T_k(b, \bar{z}) \right] \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar{z})} d\bar{z}$$

что соответствует "полному" уравнению (22) для  $T_{sk}^b(z)$  (т.е. неравны нулю значения температуры на поверхности цилиндра при  $r = a$ ,  $r = b$ ). Из уравнения (52) при соотношении между  $\phi^{sk}(z)$  и  $T_{sk}^b(z)$  имеем:

$$T_{sk}^b(z) = A_{sk} e^{\left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + B_{sk} e^{-\left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}}} \times$$

$$\times \int_0^z \left[ \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} T_k(a, \bar{z}) - T_k(b, \bar{z}) \right] \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar{z})} d\bar{z} \quad (53)$$

В частном случае, когда температура на наружной поверхности равна нулю из (53) имеем:

$$T_{skb}^b(z) = A_{sk} e^{\left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + B_{sk} e^{-\left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}}} \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} \int_0^z T_k(a, \bar{z}) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar{z})} d\bar{z} \quad (54)$$

Если учитывать значение уравнения (25), слагаемое в (54), содержащее интеграл, запишем в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}}} \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} \frac{1}{\pi} T^a \frac{\operatorname{sink} \left| \frac{\Phi_0}{k} \right|}{2} \int_0^z \chi(z) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar{z})} d\bar{z}, \quad (55)$$

отсюда на основании (29) представим это выражение в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}}} \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} \theta_k^a \int_0^z \chi(z) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\left( \frac{V}{2\chi} \right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar{z})} d\bar{z}$$

Внося это выражение в (54) находим  $T_{skb}^b(z)$ :

$$T_{skb}^b(z) = A_{sk} e^{\left[ \sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + B_{sk} e^{-\left[ \sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}} \frac{V}{2\chi} \right] z} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}}} \frac{2 I_k(\beta_{sk} b)}{\pi I_k(\beta_{sk} a)} \Theta_k^a \int_0^z \chi(z) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi}} (z - \bar{z}) \right] e^{\frac{V}{2\chi}(z - \bar{z})} d\bar{z}, \quad (56)$$

Таким образом, функция  $T_{skb}^b(z)$  удовлетворяет уравнению (30).

Проверим, что функция  $T_{skb}^b(z)$ , определяемая соотношением (54) удовлетворяет решению дифференциального уравнения (23). Функция  $T_k(a, z)$  является разрывной в точке  $z = \pm|z_0|/2$ ,

где  $z_0$  – размер области  $\Gamma^a$  в направлении оси  $z$ .

В соответствии с (25) функция  $T_k(a, z)$  имеет вид:  $T_k(a, z) = \theta_k^a \chi(z)$ ,

где  $\chi(z)$  – разрывная функция, которая может быть представлена, например, с помощью функции Хевисайда [8] соотношением:

$$\chi(z) = \theta(z+a) - \theta(z-a) \equiv \theta(a - |z|),$$

где  $\chi(z)$  – характеристическая функция отрезка  $[-a, a]$ ;  $\theta(a)$  – функция Хевисайда (в нашем случае следует полагать  $a = |z_0|/2$ ).

Находим последовательно для членов, содержащихся в выражении (54) произвольные постоянные ( $A_{sk}$  и  $B_{sk}$ ), т.е. для однородного уравнения (30), используя сокращенное обозначение:  $\sqrt{(V/2\chi)^2 + \beta_{sk}^2 + i\kappa\omega/\chi} = \sqrt{\phantom{x}}$ ,

$$\text{получим: } (V/2\chi \pm \sqrt{\phantom{x}})^2 - V/\chi(V/2\chi \pm \sqrt{\phantom{x}}) - (\beta_{sk}^2 + i\kappa\omega/2) = 0.$$

Таким образом, содержащиеся в формуле (54) произвольные постоянные ( $A_{sk}$  и  $B_{sk}$ ), удовлетворяют решению однородного выражения (23). Подставляя слагаемое, содержащее интеграл в (23) получим:

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\phantom{x}}} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \left\{ \frac{d}{dz} T_k(a, z_1) e^{\frac{1V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\phantom{x}}(z-z_1) \right] \Big|_{z_1=z} + \frac{d}{dz} \int_0^z T_k(a, z) \frac{d}{dz} e^{\frac{1V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\phantom{x}}(z-z_1) \right] dz_1 - \frac{V}{\chi} \left( T_k(a, z) e^{\frac{1V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\phantom{x}}(z-z_1) \right] \Big|_{z_1=z} + \int_0^z T_k(a, z_1) \frac{d}{dz} e^{\frac{1V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\phantom{x}}(z-z_1) \right] dz_1 \right) - \left( \beta_{sk}^2 + \frac{i\kappa\omega}{\chi} \right) \right\}$$

Первые слагаемые в фигурной и угловой скобках равны нулю т.к.  $\operatorname{sh}(0) = 0$ . Тогда это выражение представим в виде:

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\phantom{x}}} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \left\{ \frac{d}{dz} \int_0^z T_k(a, z_1) \left( \frac{V}{2\chi} \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\phantom{x}}(z-z_1) \right] + \operatorname{ch} \left[ \sqrt{\phantom{x}}(z-z_1) \right] \sqrt{\phantom{x}} \right) e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} dz - \frac{V}{\chi} \int_0^z T_k(a, z_1) \left( \frac{V}{2\chi} \right) \times,$$

$$\times \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] + \text{ch}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)]\sqrt{\cdot} \Big\} e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} dz_1 - (\beta_{sk}^2 + \frac{i\alpha k}{\chi}) \int_0^z T_{sk}(a, z_1) e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] dz_1 \Big\},$$

или:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\cdot}} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \left[ \int_0^z T_k(a, z) + \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \left( \frac{V}{2\chi} \right) \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] + \frac{V}{2\chi} \sqrt{\cdot} \text{ch}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] \right\rangle dz_1 + \int_0^z T_k(a, z_1) \times \right. \\ & \times \frac{V}{2\chi} \sqrt{\cdot} \text{ch}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] + (\sqrt{\cdot})^2 \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] - \frac{V}{\chi} \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \frac{V}{2\chi} \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] + \text{ch}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)]\sqrt{\cdot} \right\rangle \times \\ & \left. \times e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} dz_1 - (\beta_{sk}^2 + \frac{i\alpha k}{\chi}) \int_0^z T_{sk}(a, z_1) e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] dz_1 \right\} \end{aligned}$$

отсюда и из выражения (23), приводя подобные члены получим:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\cdot}} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \int_0^z T_k(a, z_1) \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] + \frac{V}{2\chi} \sqrt{\cdot} \text{ch}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] dz_1 + \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \frac{V}{2\chi} \sqrt{\cdot} \text{ch}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] + \right. \\ & \left. + \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] - \frac{V}{\chi} \int_0^z T_k(a, z_1) \left\langle \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] + \sqrt{\cdot} \text{ch}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] \right\rangle e^{\frac{1}{2} \frac{V}{\chi}(z-z_1)} dz_1 \right. \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $T_{skb}^b(z)$ , определяемая соотношением (54), удовлетворяет уравнению (23). Перейдем к определению постоянных  $A_{sk}$  и  $B_{sk}$ , входящих в функцию  $T_{skb}^b(z)$ . В соответствии с (56) вычислим предварительно интеграл:

$$S = \int_0^z \chi(z_1) \text{sb}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} dz_1, \quad (57)$$

Рассмотрим отдельно области изменения значений  $z$ :  $-|z_0|/2 < z < |z_0|/2$ ,  $z < -|z_0|/2$ ,  $z > |z_0|/2$ . В первой области  $-|z_0|/2 < z < |z_0|/2$  имеем  $\chi(z) \equiv 1$  и из (57) находим последовательно:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^z e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] dz_1 = \frac{1}{2} \int_0^z \left[ e^{(\sqrt{\cdot} + V/2\chi)(z-z_1)} - e^{(-\sqrt{\cdot} + V/2\chi)(z-z_1)} \right] dz_1 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cdot} + V/2\chi} \left[ e^{(\sqrt{\cdot} + V/2\chi)z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{\cdot} - V/2\chi} \left[ e^{(-\sqrt{\cdot} + V/2\chi)z} - 1 \right] \right] \end{aligned} \quad (58)$$

В области  $z > |z_0|/2$  имеем:

$$S = \int_0^{|z_0|/2} e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \text{sh}[\sqrt{\cdot}(z-z_1)] dz_1 = \frac{1}{2} \int_0^{|z_0|/2} \left[ e^{(\sqrt{\cdot} + \frac{V}{2\chi})(z-z_1)} - e^{(-\sqrt{\cdot} - \frac{V}{2\chi})(z-z_1)} \right] dz_1 = -\frac{1}{2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z - \frac{|z_0|}{2}} - e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ e^{\left(-\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z - \frac{|z_0|}{2}} - e^{\left(-\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left[ 1 - e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \right\} \quad (59)$$

Для области  $z < -|z_0|/2$  находим:

$$S = \int_0^{-|z_0|/2} e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)} \operatorname{sh} \sqrt{\chi}(z-z_1) dz_1 = \frac{1}{2} \int_0^{-|z_0|/2} \left[ e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)(z-z_1)} - e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)(z-z_1)} \right] dz_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \right\}, \quad (60)$$

Из (56), (58) – (60) находим представления для  $T_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z)$  при  $z > |z_0|/2$ ;  $T_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z)$  при  $z < |z_0|/2$ ;  $T_{\text{skb}}^{\text{b}-}(z)$  при  $z > -|z_0|/2$  и  $T_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z)$  при  $z < -|z_0|/2$ ;

I. В области  $z > |z_0|/2$

$$T_{\text{skb}}^{\text{b}+}(z) = A_{\text{sk}}^+ e^{\left(\sqrt{+V/2\chi}\right)z} + B_{\text{sk}}^+ e^{\left(-\sqrt{-V/2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \text{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \text{a}) \sqrt{\chi}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right\}, \quad (61)$$

II. При  $z < -|z_0|/2$

$$T_{\text{skb}}^{\text{b}-}(z) = A_{\text{sk}}^- e^{\left(\sqrt{+V/2\chi}\right)z} + B_{\text{sk}}^- e^{\left(-\sqrt{-V/2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \text{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \text{a}) \sqrt{\chi}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ 1 - e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right\}, \quad (62)$$

III. В области  $-|z_0|/2 < z < |z_0|/2$

$$T_{\text{skb}}^{\text{b}\pm}(z) = A_{\text{sk}}^{\pm} e^{\left(\sqrt{+V/2\chi}\right)z} + B_{\text{sk}}^{\pm} e^{\left(-\sqrt{-V/2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{\text{sk}} \text{b}) \theta_k^{\text{a}}}{I_k(\beta_{\text{sk}} \text{a}) \sqrt{\chi}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ e^{\left(-\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] \right\}, \quad (63)$$

Здесь верхние индексы "+", "-" соответствуют принадлежности перемен-

ной  $z$  областям  $z > 0$  и  $z < 0$  соответственно. Для определения значений постоянных,  $A_{sk}^+$ ,  $B_{sk}^+$ ,  $A_{sk}^-$ ,  $B_{sk}^-$  воспользуемся условиями ограниченности  $T_{skb}^b(z)$  в областях  $z > 0$  и  $z < 0$ , а также условиями сопряжения в точке  $z = 0$  (аналогичные условия использовались в [5] при решении других задач). Рассмотрим условие ограниченности  $T_{skb}^{b+}(z)$  в области  $z > |z_0|/2$ . Из (61) имеем:

$$T_{skb}^{b+}(z) = \left\{ A_{sk}^+ + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] \right\} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + B_{sk}^+ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z}, \quad (64)$$

Исходя из (64) и условия ограниченности при  $z > |z_0|/2$  имеем:

$$A_{sk}^+ = -\frac{1}{\pi} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right], \quad (65)$$

Откуда следует, что при  $z > |z_0|/2$ :

$$T_{skb}^{b+}(z) = B_{sk}^+ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z}, \quad (66)$$

При  $z < -|z_0|/2$  условие ограниченности  $A_{skb}^{b-}(z)$ , вытекающее из (62), будет записано в виде:

$$T_{skb}^{b-}(z) = A_{sk}^- e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \left\{ B_{sk}^- - \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] \right\} \times e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} \quad (67)$$

Откуда условие ограниченности примет вид:

$$B_{sk}^- = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right], \quad (68)$$

При этом для  $T_{skb}^{b-}(z)$  имеем представление: при  $z < -|z_0|/2$ ;

$$T_{skb}^{b-}(z) = A_{sk}^- e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ 1 - e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z}, \quad (69)$$

Используя (63) и (65) находим  $T_{skb}^{b+}(z)$  при  $0 < z < |z_0|/2$ :

$$T_{skb}^{b+}(z) = -\frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + B_{sk}^+ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z} - 1 \right] \right\}, \quad (70)$$

Принимая во внимание (63) и (68), получим при  $-|z_0|/2 < z < 0$ :

$$T_{skb}^{b-}(z) = A_{sk}^- e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} + \frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) z} - 1 \right] \right\}, \quad (71)$$

Условиями сопряжения при  $z = 0$  будут:

$$T_{skb}^{b+}(z) \Big|_{z=0+0} = T_{skb}^{b-}(z) \Big|_{z=0-0}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T_{skb}^{b+}(z) \Big|_{z=0+0} = \frac{\partial}{\partial z} T_{skb}^{b-}(z) \Big|_{z=0-0} \quad (73)$$

Из (70), (71), (72) имеем:

$$\frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] + B_{sk}^+ = A_{sk}^- + \frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right]$$

отсюда;

$$A_{sk}^- - B_{sk}^+ = -\frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] \right\},$$

или;

$$A_{sk}^- - B_{sk}^+ = \frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] - \frac{1}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] \right\}, \quad (74)$$

используя (70), (71) и (73) находим;

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} \right] - \left( \sqrt{-\frac{V}{2\chi}} \right) B_{sk}^+ = \left( \sqrt{+\frac{V}{2\chi}} \right) A_{sk}^- -$$

$$-\frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] + \frac{1}{\pi} \frac{1_k(\beta_{sk}b)}{1_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \{1 - 1\}$$



отсюда;

$$\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)A_{sk}^- + \left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)B_{sk}^+ = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{f}} \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 \right], \quad (75)$$

Исключая  $A_{sk}^-$  из этого соотношения и (74) находим:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \left[ B_{sk}^+ + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{f}} \left[ \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left\langle 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left\langle 1 - e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right\rangle \right] \right] + \\ & + \left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) B_{sk}^+ = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{f}} \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 \right] \end{aligned}$$

или;

$$\begin{aligned} & \left[ \left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) + \left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right) \right] B_{sk}^+ = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{f}} \left[ \left[ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{f}} \left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \left[ \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] - \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \right] \right] \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{aligned} B_{sk}^+ 2\sqrt{f} &= \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{f}} \left[ \left( 1 + \frac{\sqrt{+V/2\chi}}{\sqrt{-V/2\chi}} \right) e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} + \left( 1 - \frac{\sqrt{+V/2\chi}}{\sqrt{+V/2\chi}} \right) e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - \right. \\ & \left. - 2 + \left( \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} - \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \right) \left( \sqrt{+V/2\chi} \right) \right] \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} B_{sk}^+ &= \frac{1}{2\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{(\sqrt{f})^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 - \frac{2\sqrt{f}}{\sqrt{-V/2\chi}\sqrt{+V/2\chi}} \left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{(\sqrt{f})^2} 2 \left[ \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}} e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{f}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}} \times \left[ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right], \quad (76) \end{aligned}$$

отсюда и из (74):

$$A_{sk}^- = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{f}} \left[ \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] - \right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \Bigg\} = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right], \quad (77)$$

Таким образом, для интервала  $0 < z < |z_0|/2$  из (63), (65) и (76) имеем

$T_{skb}^{b+}(z)$  :

$$\begin{aligned} T_{skb}^{b+}(z) &= -\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + B_{sk}^+ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] \right\} = -\frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \times \\ &\times \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \left[ e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} - 1 \right] \right\} = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \times \\ &\left[ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|-z}{2}} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|+z}{2}} - \left( \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} + \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \times \\ &\times \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left[ \frac{1}{\sqrt{+V/2\chi}} e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|-z}{2}} + \frac{1}{\sqrt{-V/2\chi}} e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|+z}{2}} - \frac{2\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}}{\left(\sqrt{+V/2\chi}\right)^2 - \left(\sqrt{-V/2\chi}\right)^2} \right]. \quad (78) \end{aligned}$$

Соответственно для области  $z > |z_0|/2$  находим  $T_{skb}^{b+}(z)$  из выражений (66) и (74):

$$\begin{aligned} T_{skb}^{b+}(z) &= \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \left\{ \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \times \right. \\ &\times \left. e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \right\} = -\frac{2}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{-V/2\chi}}} \operatorname{sh} \left[ \left( \sqrt{+\frac{V}{2\chi}} \right) \frac{|z_0|}{2} \right] e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z}, \quad (79) \end{aligned}$$

В случае  $z < -|z_0|/2$  имеем из (69), (77):

$$T_{skb}^{b-}(z) = \frac{1}{\pi} \frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)} \frac{\theta_k^a}{\sqrt{\sqrt{+V/2\chi}}} \left\{ \left[ e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1 \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} + \left[ 1 - e^{-\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)\frac{|z_0|}{2}} \right] \times \right.$$

$$\times e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z} \left\{ = -\frac{2 I_k(\beta_{sk}b) \theta_k^a}{\pi I_k(\beta_{sk}a) \sqrt{\chi}} \frac{1}{\sqrt{\chi + V/2\chi}} \operatorname{sh} \left[ \left( \sqrt{+\frac{V}{2\chi}} \right) \frac{|z_0|}{2} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z}, \quad (80) \right.$$

Таким образом, окончательное решение уравнения (30) при  $-\infty < z < +\infty$  приобретает вид:

1) При  $z \in (-\infty, -|z_0|/2)$  из (80):

$$T_{skb}^b(z) = -\frac{2 I_k(\beta_{sk}b) \theta_k^a}{\pi I_k(\beta_{sk}a) \sqrt{\chi}} \frac{1}{\sqrt{\chi + V/2\chi}} \operatorname{sh} \left[ \left( \sqrt{+\frac{V}{2\chi}} \right) \frac{|z_0|}{2} \right] e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right)z}, \quad (81)$$

2) При  $z \in (-|z_0|/2, |z_0|/2)$  из (78):

$$T_{skb}^{b+}(z) = -\frac{I_k(\beta_{sk}b) \theta_k^a}{\pi I_k(\beta_{sk}a) \sqrt{\chi}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\chi + V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2} - z} + \frac{1}{\sqrt{\chi - V/2\chi}} e^{\left(\sqrt{+\frac{V}{2\chi}}\right) \frac{|z_0|}{2} + z} - \frac{2\sqrt{\chi}}{\left(\sqrt{\chi}\right)^2 - (V/2\chi)^2} \right], \quad (82)$$

3) При  $z \in (|z_0|/2, +\infty)$  из (79):

$$T_{skb}^b(z) = -\frac{2 I_k(\beta_{sk}b) \theta_k^a}{\pi I_k(\beta_{sk}a) \sqrt{\chi}} \frac{1}{\sqrt{\chi - V/2\chi}} \operatorname{sh} \left[ \left( \sqrt{-\frac{V}{2\chi}} \right) \frac{|z_0|}{2} \right] e^{-\left(\sqrt{-\frac{V}{2\chi}}\right)z}, \quad (83)$$

В связи с тем, что характеристическая функция  $\chi(z)$  разрывна в точках  $z = \pm |z_0|/2$ , проводилась проверка условия их сопряжения для (81); (82); (83).

Отметим, что условия соответствия относятся к распределению температурного поля [3, 4], т.е. к функции  $T_b(r, \theta, z)$ . Выше использовались условия сопряжения величин  $T_{skb}^b(z)$ , которые являются коэффициентами Фурье разложения функции  $T_b(r, \theta, z)$  по составляющим  $e^{ik\theta}$ ,  $U_{sk}^b(r)$ , образующих ортонормированный базис (с точностью до нормирующего множителя) в пространстве  $L^2$  (пространстве Гильберта [8]).

В связи с тем, что  $T_b(r, \theta, z)$  принадлежит  $L^2(a, b)$ , указанные условия сопряжения для  $T_{skb}^b(z)$  относятся также и к  $T_b(r, \theta, z)$ . Используя формулы обращения для тригонометрических рядов Фурье по угловой координате  $\theta$  и задачи Штурма-Лиувилля – по радиальной координате  $r$  [6], получим представление для  $T(r, \theta, z)$ ; имеем при  $\theta, z \in \Gamma^b$ .

$$T(r, \theta, z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{ka}^a(r, z) e^{ik\theta}, \quad (84)$$

индексы "а" вверху и внизу в  $T_{ka}^a(r, z)$  соответствуют разложению  $T_{ka}^a(r, z)$  по функциям  $U_{sk}^a(\cdot)$  и условию равенства нулю температуры на внутренней стороне втулки. Таким образом, имеет место аналогия с (82).

Используем представления [6]

$$T_{ka}^a(r, z) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{sk} \frac{I_k^2(\beta_{sk} b)}{I_k^2(\beta_{sk} a) - I_k^2(\beta_{sk} b)} T_{ska}^a(z) U_{sk}^a(r), \quad (85)$$

или

$$T(r, \theta, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{sk}^2 \frac{I_k^2(\beta_{sk} b)}{I_k^2(\beta_{sk} a) - I_k^2(\beta_{sk} b)} \frac{1}{\pi} R^{sk} \theta_k^b \frac{I_k(\gamma_{sk} b)}{I_k(\gamma_{sk} a)} \frac{1}{\sqrt{\cdot}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cdot + 1/2 \sqrt{V}/\chi}} \times \right. \\ \left. \times e^{-\left(\sqrt{\cdot + 1/2 \sqrt{V}/\chi}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{\cdot - 1/2 \sqrt{V}/\chi}} e^{-\left(\sqrt{\cdot + 1/2 \sqrt{V}/\chi}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} - \frac{2\sqrt{\cdot}}{\sqrt{\cdot^2 - \left(1/2 \sqrt{V}/\chi\right)^2}} \right] U_{sk}^a(r), \quad (86)$$

или:

$$T(r, \theta, z) = -\frac{1}{2} T^b \sum e^{ik\theta} \frac{\text{sink} \frac{\Phi_0}{2}}{k} \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s \frac{\beta_s^2}{\sqrt{\cdot}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cdot + 1/2 \sqrt{V}/\chi}} e^{-\left(\sqrt{\cdot + 1/2 \sqrt{V}/\chi}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\cdot - 1/2 \sqrt{V}/\chi}} e^{-\left(\sqrt{\cdot - 1/2 \sqrt{V}/\chi}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} - \frac{2\sqrt{\cdot}}{\sqrt{\cdot^2 - \left(1/2 \sqrt{V}/\chi\right)^2}} \right] U_{sk}^a(r), \quad (87)$$

где

$$I_s = \frac{1}{\frac{I_k(\beta_{sk} a)}{I_k(\beta_{sk} b)} - \frac{I_k(\beta_{sk} b)}{I_k(\beta_{sk} a)}}, \quad (88)$$

Соотношение (87) может быть представлено в виде:

$$T_0 = \frac{T(r, \theta, z) - T_b(r, \theta, z)}{T^b \sqrt{ab}} (b-a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \frac{\text{sink} \frac{\Phi_0}{2}}{k} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{\cdot}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cdot + 1/2 \sqrt{V}/\chi}} \times e^{-\left(\sqrt{\cdot + 1/2 \sqrt{V}/\chi}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\cdot - 1/2 \sqrt{V}/\chi}} e^{-\left(\sqrt{\cdot - 1/2 \sqrt{V}/\chi}\right) \left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} \right] U_{sk}^a(r) + \sum (-1)^{s-1} U_{sk}^a(r) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{sk} e^{in\theta} \frac{\text{sin} \frac{\Phi_0}{2} k}{k} \quad (89)$$

где

$$M_{sk} = 1 - \frac{\beta_{sk}^2}{\beta_{sk}^2 + i k w / x} \quad (90)$$

Введем обозначения:

$$\Sigma_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\theta k} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{r}} \left[ \frac{1}{\sqrt{r + \left(\frac{1}{2}\sqrt{V/\chi}\right)^2}} e^{-\left(\sqrt{r + \frac{1}{2}V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{r - \frac{1}{2}V/\chi}} e^{-\left(\sqrt{r - \frac{1}{2}V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} \right] U_{sk}^a(r)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} U_{sk}^a(r) \Sigma_2' ; \quad \Sigma_2' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{sk} e^{i\theta k} \frac{\sin \frac{\Phi_0}{2} k}{k}$$

После чего получим выражение:

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = -\frac{2}{\pi^2} \frac{b-a}{\sqrt{ra}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\theta k} \frac{\sinh \frac{\Phi_0}{2}}{k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{r}} \left[ \frac{1}{\sqrt{r - \frac{1}{2}V/\chi}} e^{\left(\sqrt{r + \frac{1}{2}V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{r - \frac{1}{2}V/\chi}} \times \right. \\ \left. \times e^{-\left(\sqrt{r - \frac{1}{2}V/\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} \right] \frac{1}{s} \sin \left( \frac{b-r}{b-a} \pi s \right) - \frac{2}{\pi \sqrt{ra}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \left( \frac{b-r}{b-a} \pi s \right)}{s} e^{-\theta a} \times \frac{\operatorname{sh} \left[ \left( \pi - \frac{\Phi_0}{2} \right) s \right]}{\operatorname{sh} \pi a} \quad (91)$$

При получении (91) использовали равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^2 + k^2} \sin kx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sh}(x - \pi) a \operatorname{cosech} \pi a ; \quad 0 < x < 2\pi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^2 + k^2} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi}{2a^2} \{1 - \operatorname{sh}[(\pi - x)a] \operatorname{cosech} \pi a\} - \frac{x}{2a^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \cos ky = \frac{\pi - x}{2} ; \quad y < x < \pi ,$$

получаемые разложением правых частей в ряды Фурье.

Из соотношения:  $q = -\lambda \frac{\partial}{\partial r} T(r, \theta, z)$ ,

где

$$r = b ; \quad -|\Phi_0|/2 \leq \theta \leq |\Phi_0|/2 ; \quad -|z_0|/2 \leq z \leq |z_0|/2 ;$$

$q$  – мощность теплового потока, переносимого лазерным лучом через поверхность втулки;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала детали.

Подставляя сюда, выражение (91) получаем представление в виде:

$$\frac{T(r, \theta, z)}{T^b} = \frac{r-a}{b-a} \chi(\theta) \chi(z) + \sqrt{\frac{b}{r}} \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\theta k} \frac{\sin k \frac{\Phi_0}{2}}{k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{r}} \left[ \frac{1}{\sqrt{r + \frac{1}{2}V/\chi}} \times \right. \right.$$

$$\times e^{-\left(\sqrt{+\frac{1}{2}\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}-z\right)} + \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}\chi}} e^{-\left(\sqrt{-\frac{1}{2}\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}+z\right)} \left[ \frac{1}{s} \sin\left(\frac{b-r}{b-a}\pi s\right) - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \times \right. \\ \left. \times \sin\left(\frac{b-r}{b-a}\pi s\right) e^{-\theta a_s} \operatorname{sh}\left[\left(\pi - \frac{\Phi_0}{2}\right)a_s\right] \operatorname{cosec} \operatorname{ha}_s \right], \quad (92)$$

где  $a_s \equiv \beta_{sk} \chi / w$ ;  $T^b$  – температура в зоне  $\Gamma^b$ . Найдем:

$$T(r, \theta, z) = \frac{k|Q|}{\lambda S_{\text{пл}}} (b-a) \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{1}{b} + \sqrt{2} \pi^{3/4} \sqrt{\frac{b}{D}} \sqrt{\frac{\pi}{\chi}} \right] (b-a)} - \frac{k|Q|}{\lambda S_{\text{пл}}} (b-r), \quad (93)$$

где  $|Q|$  – тепловой поток, переносимый лазерным лучом;  $S_{\text{пл}}$  – площадь лазерного следа на поверхности детали. Из (93) находим:

$$\Delta = b - r = \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{1}{b} + \sqrt{2} \pi^{3/4} \sqrt{\frac{b}{D}} \sqrt{\frac{\pi}{\chi}} \right] (b-a)} - \frac{\pi \lambda D^2 T(r, \theta, z)}{4kp(b-a)} \right\} (b-a), \quad (94)$$

где  $T(r, \theta, z)$  – температура (под следом лазерного луча на поверхности детали) на глубине  $\Delta = b - r$  при принятом выше условии, что  $T_0$  – температура окружающей среды (воздуха) равна нулю.

При  $T_0 \neq 0$  очевидно имеем:  $T_d(r, \theta, z) = T(r, \theta, z) + T_0$

где  $T_d(r, \theta, z)$  – действительная температура внутри втулки, при температуре окружающей среды (воздуха) не равной нулю.

Таким образом, находим:  $T(r, \theta, z) = T_d(r, \theta, z) - T_0$  (95). Полагая, что значение  $T_d(r, \theta, z)$  является равным температуре разложения азотированного поверхностного слоя детали, т.е.  $T_d(r, \theta, z) = 625^\circ \text{C}$  (96), и используя средние величины параметров разупрочнения при лазерной обработке, входящих в (94) и равные:

$$\begin{aligned} \pi &= 0,29 \text{ л/с}; \quad D = 4 \times 10^{-3} \text{ м}; \quad P = 1,15 \times 10^3 \text{ Вт}; \quad k = 0,9; \quad \lambda = 24,7 \text{ Вт/м К}; \\ b &= 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad b-a = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \chi = 5,96 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad p = 7,83 \text{ г/см}^3, \end{aligned} \quad (97)$$

находим из него:  $\Delta = b - r = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,52 \text{ мм}$  (98), где  $\Delta$  – толщина слоя, разложившегося в результате лазерной термообработки на внешней поверхности детали.

Экспериментальная проверка подтвердила, что при таких параметрах обработки начинается диссоциация нитридов и карбонитридов на глубине до 0,50-0,54мм. Процесс лазерной обработки сопровождается потрескиванием и газо-

выделением. Качество обработанной поверхности хорошее и при диссоциации нитридов не требуется последующей механической обработки (точение, шлифовка). Использование лазерной обработки (перед восстанавливающей ЭИО) обеспечивает локальный нагрев и не приводит к разупрочнению сердцевины, что особенно важно для длинномерных деталей типа – шток, которые подвергаются сложной термической обработке. Эксперименты проводили на промышленной установке – "Комета - 2", образцами были детали узла парораспределения турбины, снятые после эксплуатации для ремонта.

Получены зависимости [9] уровня и однородности твердости от плотности мощности при лазерной обработке деталей (штоки и втулки узла парораспределения турбины, подвергнутые азотированию на глубину до 0,5 мм). Данные экспериментов представлены в виде таблицы.

Плотность мощности, КВт/см <sup>2</sup>	Средний уровень твердости, HRC	Наличие дефектов (поры, трещины)
6,0	56,6±2,0	наличие пор и микротрещин
7,0	28,5±2,0	поверхность без видимых дефектов
8,0	26,8±1,8	то же
9,0	25,7±2,2	-//-
10,0	26,1±1,5	незначительное оплавление поверхности
11,0	26,1±1,2	видимое оплавление поверхности

Примечание: \* – материал деталей – сталь 20Х1М1Ф1ТР; диаметр деталей 40мм; обороты – 16 мин<sup>-1</sup>.

**Список литературы:** 1. А.с. №1722762, СССР, МКИ В23Р 6/00. Способ ремонта прокатных валков. / Скобло Т.С., Сидашенко А.И., Автухов А.К. и др. /БИ. №12, 1990. – 8 с. 2. А.с. №1468933, СССР, МКИ 4С21 ДЗ/02. Способ обезуглероживания стальных изделий. / Кандаловский И.П. и др. – 3 с. 3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1986. – 480 с. 4. Морс Ф.М., Феибах Г.Н. Методы теоретической физики. Т.1. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 886 с. 5. Карслоу Г., Елгер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с. 6. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т.П. – М.: Наука, 1960. – 295 с. 7. Слоновский Н.В. Об одном классе интегральных представлений и некоторых оценках функций Бесселя. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – М.: АН СССР. – № 5. – 1968. 8. Функции математической физики. / Кампе де Фурье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т. – М.: Физматгиз, 1963. – 402 с. 9. Мартыненко А.Д., Скобло Т.С., Сидашенко А.И., Слоновский Н.В. Способ восстановления и упрочнения деталей лазерным лучом. //Сб. науч. тр.: Підвищення надійності відновлюємих деталей машин. Вып. 4: – Харьков: ХГТУСХ, 2000. – С. 82-87.

Поступила в редколлегию 16.07.02