

УДК 669:1:539.374

**О. В. ЗАГОРЯНСКИЙ****МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ТЕЧЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ МЕТАЛЛОВ  
И ИХ ДЕФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ**

В статье на основе вариационных принципов механики сплошных сред разработаны математические зависимости для распределения истинного поля скоростей в очаге деформации при осадке двухслойных полос. Рассмотрены случаи, когда отсутствует скольжение между слоями двухслойной полосы и когда имеется скольжение, то есть при наличии схватывания между слоями двухслойной полосы и при его отсутствии. На основе полученных зависимостей определяются зависимости распределения деформаций по слоям двухслойной полосы при ее обжатии. Полученные зависимости позволяют определять поле скоростей в очаге деформации в двухслойных полосах, изготовленных из любых металлов.

**Ключевые слова:** осадка полосы, двухслойная полоса, вариационные зависимости, поле скоростей, неравномерность деформаций.

У статті на основі варіаційних принципів механіки суцільних середовищ розроблені математичні залежності для розподілення істинного поля швидкостей в осередку деформації при осаджуванні двохшарових смуг. Розглянуті випадки, коли відсутнє ковзання між шарами двохшарової смуги та коли має місце ковзання, тобто при наявності схлопювання між шарами двохшарової смуги та при його відсутності. На основі розроблених залежностей визначаються залежності розподілу деформацій по шарах двохшарової смуги при її обтисканні. Отримані залежності дозволяють визначити поле швидкостей в очагу деформації в двохшарових смугах, виготовлених з будь-яких металів.

**Ключові слова:** осаджування смуги, двохшарова смуга, варіаційні залежності, поле швидкостей, нерівномірність деформацій.

Layered metal compositions have become part of the practice in a variety of industries, and the proportion of these materials in the total production volume is increasing every year. At the core technologies of their production often are empirical approaches based on diverse experimental material. In the paper, based on variation principles of mechanics of continua, the mathematical relations of distribution of true field of velocities at deformation zone in a case of upsetting of two-layered plates are developed. Cases when there is no friction between layers of two-layered plate and when there is the friction, i. e. when there is a gripping and there is no gripping are considered. Based on developed relations, the relations of distribution of deformations of layer of two-layered plate at its upsetting are determined. The resulting variation depending describing the true velocity field in the deformation in cases of sliding between layers of a two-layer strip, and in his absence, after integration and solutions for the parameter and are according to the distribution of strains in the layers. From the values of yield strength metal layers in a two-layer band, the original thickness of the layers and the absolute compression band can calculate the absolute (and relative) deformation layers. The dependences allow determining field of velocities at the deformation zone in two-layered plates made from any metals.

**Keywords:** upsetting of plate, two-layer plate, variation relations, field of velocities, irregularity of deformations.

**Введение.** Слоистые металлические композиции прочно вошли в практику в различных отраслях промышленности, и удельный вес данных материалов в общем объеме выпуска возрастает с каждым годом. В основе технологий их получения зачастую лежат эмпирические подходы, основанные на разномобразном экспериментальном материале.

Для изучения течения слоистых металлических композитов при их пластической деформации успешно применяются методы механики сплошных сред [1]. Параметры поля течения при этом описываются кусочно-непрерывными функциями, которые имеют разрыв (разрывы) на поверхности (поверхностях) раздела разнородных материалов, в связи с, как правило, существенными различиями свойств металлов, составляющих композицию [2].

**Анализ последних исследований и литературы.** Отметим, что проблема течения металла и неравномерности деформации при свободном формообразовании монометалла освещена достаточно полно как в отечественных публикациях, так и в зарубежных [3,4], в то время как той же проблеме для случая свободного формообразования многослойных композиций, в частности, осаживания, не уделялось достаточного внимания.

Особенности деформации при осадке цветных металлов широко освещены в публикациях последнего времени, в частности, значительный вклад внесен отечественными исследователями [5].

Вопросы анализа процессов совместного пластического течения разнородных материалов при некоторых процессах обработки давлением (в частности, при осадке и прокатке) освещены в работах Г.Э. Аркулиса [6]. Следует отметить, что разработанная Г.Э. Аркулисом теория совместной пластической деформации разных металлов (СПДРМ) не всегда применима на практике, а ее изложение изобилует неточностями.

**Цель исследования, постановка проблемы.**

Для случая осаживания на параллельных бойках слоистой металлической композиции, используя вариационные принципы механики сплошных сред, выявить закономерности течения металла, определяющие неравномерность деформации слоев композиции.

**Материалы исследований.** Для анализа влияния различных факторов на распределение деформаций при обработке давлением широкие возможности открывает применение приближенных методов расчета, в частности, прямых методов вариационного исчисления (конечно-разностного метода Эйлера, метода Рунге, метода Канторовича)

[7]. Определить функционал, принимающий в реальном процессе экстремальные значения, позволяет начало Лагранжа (начало возможных изменений деформированного состояния), служащее для постановки вариационной задачи. После нахождения функционала решение вариационной задачи может быть найдено с любой степенью точности.

Мощность всех внешних и внутренних сил на возможных перемещениях около состояния равновесия равна нулю [7]

$$\iiint_V \left( \delta\sigma_x \varepsilon_x + \delta\sigma_y \varepsilon_y + \dots + \delta\tau_{zx} \gamma_{zx} \right) dV - \iint_S \left( \delta X_n v_x + \delta Y_n v_y + \delta Z_n v_z \right) dS = 0 \quad (1)$$

где  $V$  – объем тела;  $S$  – поверхность, на которой заданы силы  $X_n, Y_n, Z_n$  – противоположные по знаку силам сопротивления деформации, возникающим при приложении нагрузки, и направленные противоположно действующим силам;  $v_x, v_y, v_z$  – проекции полной скорости точки среды на координатные оси;  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – скорости относительных деформаций элементарного объема в направлениях координатных осей  $x, y$  и  $z$ ;  $\tau_{zx}$  – касательное напряжение в рассматриваемой плоскости,  $\gamma_{zx}$  – относительный сдвиг в рассматриваемой плоскости.

Рассмотрим два случая [8,9]:

– схватывание между слоями композиции наступило (или, когда длина очага деформации приблизительно равна его высоте). В этом случае влияние трения на межслойных границах и на поверхностях контакта с инструментом можно не учитывать;

– схватывание между слоями композиции наступило. В этом случае скольжение и трение на межслойных границах отсутствует. Трение на поверхностях контакта с инструментом имеет место.

В первом случае вариационное уравнение, задающее поле скоростей в очаге деформации, с использованием первого приближения метода гидродинамических аналогий (модель линейно-вязкой среды) [10], принимает вид

$$\delta \left[ \iiint_V \frac{\eta H^2}{2} dV \right] = 0, \quad (2)$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости, связывающий девиатор скоростей деформаций с девиатором напряжений;  $H$  – интенсивность деформаций сдвига.

В втором случае вариационное уравнение, задающее поле скоростей в очаге деформации, также с использованием первого гидродинамического приближения и энергетический метод механики сплошных сред [10], принимает вид

$$\delta \left[ \iiint_V \frac{\eta H^2}{2} dV + \iint_S \sqrt{3} \eta \alpha \varepsilon_{\max} v_c ds \right] = 0, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – экспериментальный коэффициент, зависящий от состояния поверхности контакта металла и инструмента и фактора формы очага деформации;

$\varepsilon_{\max}$  – максимальная скорость деформации на контактной поверхности;  $v_c$  – скорость скольжения на контактной поверхности.

Отметим здесь же, что энергетический метод положен в основу так называемых экстремальных принципов, составляющих сущность вариационных методов. В его основе лежит энергетическое равенство, согласно которому алгебраическая сумма мощностей внутренних и внешних сил равна нулю.

Для решения уравнений (2) и (3) воспользуемся прямым методом вариационного исчисления – методом Ритца, который состоит в том, что отыскание экстремума функционала  $J[y(x)]$  предполагает анализ не всего пространства допустимых функций, а только линейных комбинаций допустимых функций вида

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x), \quad (4)$$

где  $\alpha_i$  – постоянные,  $\varphi_i(x)$  – система координатных функций, которые линейно независимы и образуют в рассматриваемом пространстве полную систему функций [11].

На рис. 1 приведена схема осадки двухслойной полосы толщиной  $h_0$  (толщина плакирующего слоя  $h_{01}$ , основного слоя –  $h_{02}$ ) параллельными плоскими бойками [8]. Скорость перемещения инструмента –  $v_0$ .

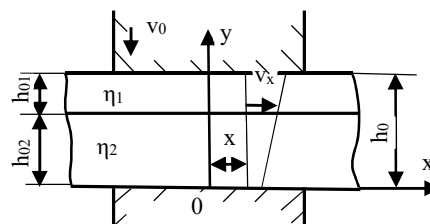


Рис. 1 – Схема осадки двухслойной полосы [8]

Коэффициенты вязкости плакирующего слоя  $\eta_1$ , основного слоя –  $\eta_2$ . При этом предполагаем, что  $\eta_2 > \eta_1$ . Верхний, плакирующий слой – мягкий металл, нижний, основной слой – твердый металл.

Для первого случая граничные условия: при  $x = 0$   $v_x = 0$ , при  $y=0$   $v_y = 0$ , при  $y = h_0$   $v_y = -v_0$ ; условие несжимаемости:  $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$ , где  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  – скорости деформации в направлениях  $x$  и  $y$ .

Поле скоростей для очага деформации в плакирующем слое:

$$v_x = ax, \quad (5)$$

$$v_y = -[a(y - h_0) + v_0], \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_x = -\dot{\varepsilon}_y = a, \quad (7)$$

Поле скоростей для очага деформации в основном слое:

$$v_x = -\left[ a - \left( a - \dot{\varepsilon} \right) \frac{h_0}{h_{02}} \right] x, \quad (8)$$

$$v_y = -\left[ a - \left( a - \dot{\varepsilon} \right) \frac{h_0}{h_{02}} \right] y, \quad (9)$$

$$\dot{\varepsilon}_x = \dot{\varepsilon}_y = a - \left( a - \dot{\varepsilon} \right) \frac{h_0}{h_{02}}, \quad (10)$$

где  $v_x$  и  $v_y$  – скорости перемещения в направлениях  $x$  и  $y$ ;  $\dot{\varepsilon} = \frac{v_0}{h_0}$  – скорость деформации по очагу деформации;  $a$  – варьируемый параметр, определяемый из вариационного уравнения.

Для второго случая граничные условия аналогичны: при  $x = 0$   $v_x = 0$ , при  $y = h_0$   $v_y = -v_0$ , при  $y = 0$   $v_y = 0$ ; аналогично и условие несжимаемости.

Поле скоростей запишется следующим образом:

$$v_x = \left[ a + \frac{2y(\dot{\varepsilon} - a)}{h_0} \right] x, \quad (11)$$

$$v_y = -\left[ a + \frac{2y(\dot{\varepsilon} - a)}{h_0} \right] y, \quad (12)$$

$$\dot{\varepsilon}_x = -\dot{\varepsilon}_y = a + \frac{2x(\dot{\varepsilon} - a)}{h_0}, \quad (13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2x(\dot{\varepsilon} - a)}{h_0} \quad (14)$$

Для первого случая интенсивность скоростей деформации (при равномерной деформации) [12]:

$$H = 2\dot{\varepsilon}_x \quad (15)$$

Для второго случая интенсивность скоростей деформации (для плоского деформированного состояния) [12]:

$$H = 2\sqrt{\dot{\varepsilon}_x^2 + 0,25\gamma_{xy}^2} \quad (16)$$

Так как значения коэффициентов вязкости и скоростей деформации в направлении  $x$  будут различны для основного и плакирующего слоев, то выражение (2) для первого случая будет представлено в виде

$$\delta \left[ \int_{h_{02}}^{h_0} \int_0^L \left( 2\dot{\varepsilon}_{x1} \right)^2 \frac{\eta_1}{2} dx dy + \int_0^{h_{02}} \int_0^L \left( 2\dot{\varepsilon}_{x2} \right)^2 \frac{\eta_2}{2} dx dy \right] = 0 \quad (17)$$

где  $L$  – полуширина бойка (расстояние от оси  $y$  до края бойка), а индексы 1 и 2 относятся к плакирующему и основному слою соответственно. Для второго случая выражение (2) преобразуется в (17) с добавлением еще двух слагаемых:

$$\delta \left[ 2 \left( \int_{h_{02}}^{h_0} \int_0^L \left( \dot{\varepsilon}_{x2} \right)^2 \frac{\eta_2}{2} dx dy + \int_0^{h_{02}} \int_0^L \left( \dot{\varepsilon}_{x1} \right)^2 \frac{\eta_1}{2} dx dy \right) + \sqrt{3}\alpha \left( \int_0^L \eta_1 \dot{\varepsilon} v_{x(y=h_0)} dx + \int_0^L \eta_2 \dot{\varepsilon} v_{x(y=0)} dx \right) \right] = 0 \quad (18)$$

Подставляя в зависимость (17) выражения для  $\dot{\varepsilon}_x$  (7) и (10), интегрируя (17) и варьируя, получаем

$$a \left( \frac{h_{02}}{h_0} - \left( \frac{h_{02}}{h_0} \right)^2 + \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \left( \frac{h_{02}}{h_0} \right)^2 - 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{h_{02}}{h_0} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) + \frac{v_0}{h_0} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1} \left( \frac{h_{02}}{h_0} - 1 \right) \quad (19)$$

После преобразования получим

$$a = \frac{\frac{v_0}{h_0} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1}}{\frac{h_{02}}{h_0} - \frac{\eta_2}{\eta_1} \left( \frac{h_{02}}{h_0} - 1 \right)} \quad (20)$$

Известно [12], что

$$v_y = \frac{dy}{dt} \quad (21)$$

Подставляя вместо координаты  $y$  толщины слоев и подставляя выражение (6), получаем

$$\frac{dh_0}{v_0} = \frac{dh_{02}}{a[h_{02} - h_0] + v_0} \quad (22)$$

Используя зависимость (20), получаем

$$\frac{dh_0}{v_0} = \frac{dh_{02}}{\frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{v_0}{h_0} \cdot \frac{h_{02} - h_0}{h_0} + 1} \quad (23)$$

Сокращая  $v_0$  в знаменателях, получим выражение для  $dh_{02}$

$$dh_{02} = \frac{dh_0 \left( \frac{h_{02}}{h_0} \right)}{\frac{\eta_2}{\eta_1} + \frac{h_{02}}{h_0} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)} \quad (24)$$

Полагая, что отношения толщин и вязкостей – постоянные величины, после интегрирования зависимости (24) получим выражение для абсолютного обжатия основного (твердого) слоя

$$\Delta h_{02} = \frac{\Delta h_0 \left( \frac{h_{02}}{h_0} \right)}{\frac{\eta_2}{\eta_1} + \frac{h_{02}}{h_0} \left( 1 - \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)} \quad (25)$$

Для практического применения выражение (25) применимо, когда задано общее обжатие  $\Delta h_0$ . Обжатие плакирующего (мягкого) слоя определится по зависимости

$$\Delta h_{01} = \Delta h_0 - \Delta h_{02} \quad (26)$$

Отношение вязкостей  $\eta_2/\eta_1$  для практического применения неудобно, поэтому предлагается [9] использовать вместо него отношение пределов текучести металлов слоев при аналогичных условиях деформации. Аналогично решение может быть получено и для второго случая.

**Выводы.** Разработанные вариационные зависимости, описывающие истинное поле скоростей в очаге деформации для случаев скольжения между слоями двухслойной полосы и при его отсутствии, после интегрирования и решения относительно параметра  $a$  представляют собой зависимости для распределения деформаций по слоям. С практической точки зрения это позволяет, зная пределы текучести металлов слоев в двухслойной полосе, исходные толщины слоев и абсолютное обжатие полосы, рассчитать абсолютные (и относительные) деформации слоев.

#### Список литературы

1. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением / В. Л. Колмогоров. – Екатеринбург: УПИ, 2001. – 592 с.
2. Ковалев С. И. Напряжения и деформации при плоской прокатке / С. И. Ковалев, Н. И. Корягин, И. В. Ширко; Под ред. А. Ф. Белова. – М.: Металлургия, 1982. – 256 с.
3. Young M., Cartwright B., Paton R., Yu X., Zhang L. and Mai Y-W. Material characterisation tests for finite element simulation of the diaphragm forming process // Proc. 4th Int. ESAFORM Conference on Material Forming, University of Liege, April 2001.
4. Dixit P. M., Dixit U. S. Modeling of Metal Forming and Machining Processes by Finite Element and Soft Computing Methods. – London: Springer, 2008. – 590 p.
5. Кухарь В. В. Напряженно-деформированное состояние и степень использования запаса пластичности на боковой поверхности осажённых заготовок при различных условиях на контакте / В. В. Кухарь, К. К. Диамантопуло, В. А. Бурко // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в машинобудуванні та металургії: Зб. наук. пр. – Краматорськ: ДДМА, 2007. – С. 157–162.

6. Аркулис Г. Э. Совместная пластическая деформация разных металлов / Г. Э. Аркулис. – М.: Металлургия, 1964. – 272 с.
7. Тарновский И. Я. Деформация металлов при прокатке / И. Я. Тарновский, А. А. Поздеев, В. Б. Ляшков. – Свердловск, Metallurgizdat, 1956. – 287 с.
8. Меандров Л. В. Применение вариационных принципов для исследования деформаций и усилий при прокатке биметаллических листов / Меандров Л. В., В. А. Устименко, А. А. Быков // Инженерные методы расчета технологических процессов обработки металлов давлением: Межвузовская научно-техническая конференция: докл. конф. – Свердловск: АН СССР, 1963. – С. 308–314.
9. Меандров Л. В. Исследование деформации слоев биметалла при обработке давлением / Л. В. Меандров, В. А. Устименко // Известия вузов. Черная металлургия. – 1963. – № 11. – С. 109–112.
10. Тарновский И. Я. Инженерные методы расчета технологических процессов обработки металлов давлением / И. Я. Тарновский. – М.: Металлургия, 1973. – 252 с.
11. Пантелеев А. В. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А. В. Пантелеев. – И.: Изд-во МАИ, 2006. – 228 с.
12. Богатов А. А. Механические свойства и модели разрушения металлов / А. А. Богатов. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2002. – 329 с.

#### References (transliterated)

1. Kolmogorov V. L. *Mehanika obrabotki metallov davleniem* [Mechanics of pressure treatment of metals]. Ekaterinburg, UPI, 2001. 592 p.
2. Kovalev S. I., Koryagin, N. I. and Shirko, I. V. *Napryazheniya i deformatsii pri ploskoy prokatke* [Stresses and deformations at the flat rolling]. Moscow, Metallurgiya, 1982. 256 p.
3. Young M. et al. Material characterisation tests for finite element simulation of the diaphragm forming process. *Proc. 4th Int. ESAFORM Conference on Material Forming*, University of Liege, 2001.
4. Dixit P. M. and Dixit U. S. Modeling of Metal Forming and Machining Processes by Finite Element and Soft Computing Methods. London: Springer, 2008. 590 p.
5. Kukhar V. V., Diamantopulo K. K. and Burko V. A. *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyaniye i stepen' ispol'zovaniya zapasa plastichnosti na bokovoy poverhnosti osazhennykh zagotovok pri razlichnykh usloviyakh na kontakte* [Stressed-deformationed state and the degree of utilization of plasticity margin on the side of jumped blanks under different conditions on contact] *Udoskonalennyya protsessiv i obladnannyya obrabotki tyskom v mashinobudovanni ta metallurgii: Zb. nauk. pr. Kramators'k, DDMA, 2007. pp. 157–162.*
6. Arkulis G. E. *Sovmestnaya plasticheskaya deformatsiya raznykh metallov* [The joint plastic deformation of different metals]. Moscow, Metallurgiya, 1964. 272 p.
7. Tarnovskij I. Ya., Pozdeev A. A. and Lyashkov V. B. *Deformatsiya metallov pri prokatke* [Deformation of metals at rolling]. Sverdlovks, Metallurgizdat, 1956. 287 p.
8. Meandrov L. V., Ustimenko, V. A. and Bykov A. A. *Prinenenie varatsionnykh printsipov dlya issledovaniya deformatsij i usilij pri prokatke bimetallicheskikh listov* [Application of variational principles for the study of the deformation and forces during rolling of bimetallic sheets]. *Inzhenernyye metody rascheta tehnologicheskikh protsessov obrabotki metallov davleniem: Mezhhuzovskaya nauchno-tehnicheskaya konferentsiya: dokl. konf. Sverdlovsk, AN SSSR, 1963. pp. 308–314.*
9. Meandrov, L. V. and Ustimenko, V. A. *Issledovanie deformatsii sloev bimetalla pri obrabotke davleniem* [Research of deformation of the bimetal layers by pressure treatment]. *Izvesiya vuzov. Chernaya metallurgiya, 1963, no 11. Pp. 109–112.*
10. Tarnovskij I. Ya. *Inzhenernyye metody rascheta tehnologicheskikh protsessov obrabotki metallov davleniem* [Engineering methods of calculation of technological processes of pressure treatment of metals]. Moscow, Metallurgiya, 1973. 252 p.
11. Panteleev A. V. *Variatsionnoe ischislenie v primerah i zadachah* [The calculus of variations in examples and problems]. Moscow, Izd-vo MAI, 2006. 228 p.
12. Bogatov A. A. *Mehanicheskie svoystva i modeli razrusheniya metallov* [Mechanical properties and models of cracking of metals]. Ekaterinburg, GOU VPO UGTU-UPI, 2002. 329 p.

*Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions*

**Моделювання сумісної течії різнорідних металів та їх деформації на основі варіаційних принципів / О. В. Загорянський** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – № 31(1203). – С. 31–35. – Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2519-2671

**Моделирование совместного течения разнородных металлов и их деформации на основе вариационных принципов / О. В. Загорянский** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – № 31(1203). – С. 31–35. – Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2519-2671.

**Modeling the joint flow of dissimilar metals and deformation based on variational principles / O. V. Zagoryanskiy** // Bulletin of NTU «KhPI». Series: Innovative technologies and equipment handling materials in mechanical engineering and metallurgy. – Kharkiv: NTU «KhPI» – 2016. – No 31(1203). – P. 31–35. – Bibliogr.: 12 – ISSN 2519-2671

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Загорянський Олег Володимирович** – Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, аспірант; тел.: (050) 702-39-10; e-mail: olegzahor@gmail.com.

**Загорянский Олег Владимирович** – Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского, аспирант; тел.: (050) 702-39-10; e-mail: olegzahor@gmail.com.

**Zagoryanskiy Oleg Vladimirovich** – Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, aspirant; tel.: (050) 702-39-10; e-mail: olegzahor@gmail.com.