

С.А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ

В статті пропонуються методи аналізу чутливості складних скінченноелементних моделей при дії фізичних полів різної природи. Досліджено обчислювальні етапи одержання градієнтів функціоналів механічних систем за наявності силової, електромагнітної і теплової дій. Розглянуто області застосування розробленого математичного апарату.

Coupled-field analyses are useful for solving problems where the coupled interaction of phenomena from various disciplines of physical science is significant. There are basically two methods of coupling distinguished by the finite element formulation techniques used to develop the matrix equations. Complicated finite-element models with high geometric and physical self-descriptiveness sensitivity analysis methods are given in this article. The developed mathematical apparatus application domains are examined.

Интенсификация рабочих процессов, усложнение конструктивных форм, применение новых конструкционных материалов и технологий обуславливают необходимость расширения интеграции и взаимодействия математических моделей высокого уровня, обеспечивающих инновационные решения широкого спектра multidisciplinary проблем жизненного цикла изделий [1,2]. Анализ чувствительности позволяет производить оценку изменений без перестройки всей конструкции. Анализ чувствительности позволяет решить целый ряд практических задач на всех этапах жизненного цикла конструкций – от проектирования до контроля эффективной эксплуатации [3]. В настоящее время практически отсутствуют работы, посвященные multidisciplinary анализу чувствительности конструкций.

Целью проведенных исследований была разработка методики анализа чувствительности сложных конечноэлементных моделей при воздействии физических полей различной природы; ориентированной на большие размерности векторов переменных состояния и проектирования. Предпосылкой данной разработки является предположение о том, что всеобъемлющая теория multidisciplinary анализа чувствительности может быть рассмотрена при помощи единого подхода, т.к. задачи теории поля (теплопроводность, гидромеханика, расчет электрических или магнитных полей и т.д.) сводятся к системе уравнений, аналогичной соотношениям МКЭ для задач механики деформируемого твердого тела, являющегося наиболее мощным, универсальным и распространенным методом расчета.

Разработанная методика анализа чувствительности предполагает следующую последовательность вычислительных этапов: КЭ дискретизация задачи анализа; введение вектора сопряженных переменных; введение пространств проектных переменных; вычисление градиентов функционалов.

Рассмотрим особенности анализа чувствительности мультифизических конечноэлементных моделей конструкций различной степени связанности: последовательная (при одностороннем взаимодействии), слабая с учетом обрат-

ных связей (при двустороннем взаимодействии), сильная (полная). Основным отличием моделей последовательной (слабой) степени связанности от сильной является отсутствие внедиагональных блоков связи глобальных матриц состояния различных физических задач.

Примерами конструкций, для которых важен учет воздействия сильно связанных физических полей различной природы, являются пьезоэлектрические устройства акустоэлектроники. Исходными соотношениями состояния для данной задачи будут уравнения пьезоэффекта, отражающие взаимосвязь тензоров механических напряжений и деформаций, векторов электрической индукции и напряженности; квазистатические уравнения Максвелла; уравнения движения элемента среды; а также соотношения Коши. После применения вариационного принципа и конечноэлементной дискретизации, конечноэлементные соотношения для задачи о собственных колебаниях в матричной форме для пьезоэлемента представляются в виде $K_{yy} \cdot \vec{y} + K_{y\varphi} \vec{\varphi} - \omega^2 M_{yy} \cdot \vec{y} = 0$; $K_{y\varphi}^T \vec{y} + K_{\varphi\varphi} \vec{\varphi} = 0$, где K_{yy} ; $K_{y\varphi}$; $K_{\varphi\varphi}$ – соответственно матрицы жесткости; пьезоэлектрической связи; диэлектрической проницаемости, M – матрица масс системы; \vec{y} и $\vec{\varphi}$ – вектора узловых перемещений и потенциалов электрического поля в пьезоэлектрике.

Градиент собственного значения имеет вид [4] $\lambda'_{i_i} = \vec{y}^T [K' - \lambda M'] \vec{y} / \vec{y}^T M \vec{y}$

(1). Рассмотрим особенности дифференцирования матриц жесткости объемного изопараметрического конечного элемента по координатам точек поверхности. Отметим что, матрицы K_{yy} ; $K_{y\varphi}$; $K_{\varphi\varphi}$ вычисляются одновременно как «обобщенная» матрица жесткости, при этом в каждом узле элемента считаются неизвестными три перемещения и потенциал электрического поля. В соответствии с правилами дифференцирования сложных функций можно записать следующие соотношения

$$\frac{d[K^e]}{dx_{il}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{dB^T}{dx_{il}} DB \det[J] + B^T D \frac{dB}{dx_{il}} \det[J] + B^T DB \frac{d \det[J]}{dx_{il}} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad \text{где}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} C^E & -P \\ -P^T & E^s \end{bmatrix}, \quad C^E - \text{матрица модулей упругости, измеренных при постоянной}$$

напряженности электрического поля; P – матрица пьезоэлектрических коэффициентов; E^s – матрица коэффициентов диэлектрической проницаемости, измеренных при постоянной механической деформации.

Примерами конструкций, для которых важен учет воздействия последовательно связанных физических полей различной природы, являются колеса турбины, нагруженные тепловым потоком от выхлопных газов цилиндров ДВС. Уравнения состояния термоупругости получаются согласно гипотезе Дюамеля-Неймана, путем замены вектора упругих деформаций вектором $(\vec{\epsilon} - \delta T)$, где δ – коэффициент теплового расширения, T – приращение температур, зависящее от координат и времени. Температурное нагружение оказывает двоякое действие: вызывает дополнительные статические напряжения,

связанные с градиентом температур, и приводит к изменениям физико-механических характеристик материала. Задача анализа включает в себя: 1) задачу стационарной теплопроводности $\Lambda \vec{T} = \vec{Q}$, где Λ – матрица теплопроводности, \vec{Q} – вектор обобщенной тепловой нагрузки; 2) задачу термоупругости $K\vec{Y} = \vec{F}_{t_0}$, где \vec{Y} – обобщенный вектор термоупругих перемещений. Совместное решение задачи теплофизики и механики позволяет, с одной стороны, возможность экономии времени (например, за счет генерации единой КЭ сетки), а с другой стороны – более точно задавать нагрузки. Анализ проводился с использованием циклической симметрии. Температурные напряжения для колеса турбины ТКР-8.5-ТВ. составляют порядка 5...7 % напряжений от центробежных сил. Полная модель колеса турбины связана также с решением задач термогазодинамики и колебаний.

Задача анализа резонансного состояния колесо турбины в поле центробежных сил, представляет собой матричную проблему $K(\vec{u})\vec{y}_s = \vec{F}(\vec{u})$, $[K + G(\vec{y}_s) - \lambda M]\vec{y}_d = 0$ (2), где $G(\vec{y}_s, \vec{u})$ – матрица «геометрической» жесткости (приведенных начальных напряжений), формируемая на решении \vec{y}_s статической задачи; \vec{u} – вектор варьируемых конструктивных параметров системы. После дифференцирования (2) и введения сопряженных задач вида:

$$K\vec{\psi}_s = \frac{\partial (\vec{\psi}_d^T G \vec{y}_d)}{\partial \vec{y}_s}; [K + G - \lambda M]\vec{\psi}_d = \frac{\partial J}{\partial \vec{y}_d} - \mu^* M \vec{y}_d \quad (3)$$

значения принимает вид: $\vec{\nabla} \lambda = \left\{ \vec{y}_d^T (K' + G' - \lambda M') \vec{y}_d - \vec{\psi}_{s\lambda}^T (K \vec{y}_s - F') \right\}_{\lambda=1, n}$ (4), где $\vec{\psi}_{s\lambda}$ – обозначено решение сопряженной задачи (3), в которой $\vec{\psi}_d$ заменяется на \vec{y}_d . Сравнение соотношений (1) и (4) наглядно показывает различия в подходах к анализу чувствительности для сильно- и последовательно связанных моделей.

Примерами конструкций, для которых важен учет воздействия слабосвязанных физических полей различной природы, являются резонансные приборы. Особенностью таких задач является учет обратных связей (при двустороннем взаимодействии) и необходимость нескольких итераций при решении нелинейной задачи. Ультразвуковые колебания высокой интенсивности вызывают существенный разогрев системы. Соответствующая связанная нелинейная математическая модель включает стационарные уравнения теплопроводности, в которых функция тепловых источников строится по форме резонансных динамических напряжений как доля интенсивности гистерезисных потерь и уравнения собственных колебаний, включающие зависимость физико-механических характеристик и геометрии элемента от распределения температуры:

$$\Lambda \vec{T}^0 = \vec{Q}(\vec{y}); [K(\vec{T}^0) - \omega^2 M(\vec{T}^0)] \vec{y} = 0.$$

На рис. 1 и 2 приведены для примера картины функциональных производных конструкций к добавлению материала (нормальным перемещениям точек поверхности). При исследовании использовались трехмерные КЭ.

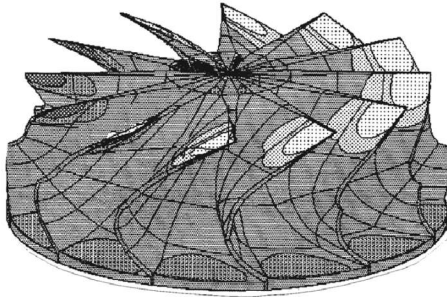


Рисунок 1 – 15-я собственная частота рабочего колеса турбины ТКР-8.5-ТВ.

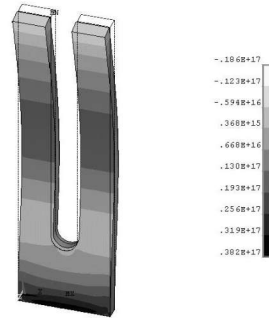


Рисунок 2 – 5-я собственная частот пьезоэлектрического резонатора

Данное исследование позволило провести классификацию задач анализа чувствительности мультифизических конечноэлементных моделей различной степени связанности и успешно апробировать анализ градиентов функционалов на ряде практических задач. Дальнейшим направлением исследований является применение разработанного математического аппарата при исследовании жизненного цикла ряда современных конструкций.

Список литературы: 1. Автономова Л.В., Лавинский В.И. Бондарь С.В. Узагальнена математична модель структурно зв'язаних систем // Вісник НТУ «ХПІ», – Харків: НТУ «ХПІ», – 2003. – Вип. 12, т.1. – С. 160-164. 2. Xu B. and Jiang J. S., Integrated optimization of structure and control for piezoelectric intelligent trusses with uncertain placement of actuators and sensors // Computational Mechanics. – 2004. – Vol. 33, № 5. – P. 406-412. 3. Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин, А.Ю., В.Б. Любецкая В.Б. Анализ чувствительности для конечноэлементных моделей конструкций // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 77-82. 4. Богомолов С.И., Назаренко С.А., Симсон Э.А. Расчет и оптимизация оболочек общей формы на базе смешанного подхода МКЭ // Динамика и прочность тяжелых машин. – 1986. – С. 91-97.

Поступила в редколлегию 04.10.2006.

УДК 839.04:03

В.О.ПОВГОРОДНИЙ, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины;
С.В.ЗАЙМАК, НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ МЕТАЛЛО-КЕРАМИЧЕСКОГО НАГРЕВАТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

Розглянуто шляхи розв'язання геометричних обернених задач термопружності. Задачі вирішуються за використанням методу скінчених елементів для металокерамічного нагрівального елемента.

In this article the determine of the geometrical inverse problem of thermoelasticity. This problem is determined by the finite element method. This problem is determined to the electrical hearts elements.