

уравнений небольшого порядка, равному числу двойных узлов. Эффективность методики может быть существенной при решении последовательности контактных задач, характерных для динамических расчетов.

Применение методики показано при решении задачи о деформировании вала с трещиной под действием веса при его медленном вращении.

**Список литературы:** 1. *Грабовски Б.* Вибрационные свойства ротора турбины с поперечной трещиной // Конструирование и технология машиностроения. – 1980. – № 1. – С. 98-104. 2. *Шульженко Н.Г.* Влияние излома упругой оси ротора с поперечной трещиной на его вибрационные характеристики / *Н.Г.Шульженко, Г.Б.Овчарова* // Проблемы прочности. – 1997. – № 4. – С. 82-89. 3. *Bachschmid N.* Cracks in rotating shafts: experimental behaviour, modelling and identification // SURVEILLAN 5 CETIM, Senlis (2004). 4. *Матвеев В.В.* К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях / *В.В.Матвеев, А.П.Бовсуновский* // Проблемы прочности. – 2000. – № 3. – С. 5-23. 5. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. *С.Атлури*. – М.: Мир, 1990. – 392 с. 6. *Сиратори М.* Вычислительная механика разрушения / *М.Сиратори, Т.Миеси, Х.Маусита*. – М.: Мир, 1986. – 334 с. 7. Асаенок А.В. Трехмерное моделирование деформаций и вопросы прочности объемных элементов поворотлопастных гидротурбин / *А.В. Асаенок, Б.Ф. Зайцев* // Вестник науки и техники. – Харьков: Харьк. дом науки и техники, 1997. – Вып. 1. – С. 10-18. 8. *Асаенок А.В.* Методика введения разрезов в схеме метода конечных элементов в задачах статики и собственных колебаний трехмерных конструкций / *А.В.Асаенок, Б.Ф.Зайцев, Н.Г.Шульженко* // Проблемы машиностроения. – 2003. – 6, № 3. – С. 58-63.

*Поступила в редколлегию 19.07.2007*

УДК 539.3

***Р.Е.КОЧУРОВ; К.В.АВРАМОВ***, докт. техн. наук; ***И.Д.БРЕСЛАВСКИЙ***,  
НТУ «ХПИ»

## **К ПРОЩЕЛКИВАНИЮ ПОЛОГИХ АРОК**

У роботі проведено чисельне моделювання динамічної поведінки положистої арки в процесі прощиглення. Для моделювання використовувався метод сіток та процедура чисельного інтегрування.

The snap-through motions of shallow arch are simulated in this paper. Net method and direct numerical integrations are used to study snap-through motions.

**1. Состояние и актуальность темы.** Пологие арки используются в строительстве, машиностроении, аэрокосмической технике как составные части более сложных конструкций. Арки часто используются в электромеханических системах. Пологие арки могут использоваться как элемент, изолирующий от вибраций, и как гаситель колебаний [1, 2, 3].

Много усилий было предпринято для исследования статики и динамики

пологих арок. Тимошенко рассматривал шарнирно-опертую синусоидальную арку под действием распределенной поперечной нагрузки [4]. Он определил величину критической загрузки, которая приводит к прощелкиванию. Динник и Григолюк [5, 6] прощелкивание пологих арок представляли в виде суперпозиции симметричной и асимметричной моды. Фанг и Каплан [7] обобщили результаты статического анализа пологих арок на случай произвольных поперечных сил, включая сосредоточенные нагрузки. Одни из первых исследований по анализу динамики прощелкивания пологой арки представлены в работах [8, 9]. В частности, достаточные условия устойчивости и неустойчивости пологих арок под действием статических нагрузок выведены в [8]. Ханг [10] рассматривал асимметричные движения прощелкивания пологих арок под действием высокочастотных нагрузок. Он высокочастотные движения прощелкивания разделил на быстрые и медленные движения. В монографии [11] представлена асимптотическая процедура для анализа движений прощелкивания.

В этой статье используется прямое численное моделирование с помощью конечных разностей нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Такой анализ позволяет исследовать явление прощелкивания пологой арки между несколькими положениями статического равновесия. Цель такого расчета является выявление форм колебаний, которые принимают участие в динамическом прощелкивании пологой арки.

В основном, при исследовании явления прощелкивания пологой арки динамической модели принудительно навязываются колебания по одной, или двум балочным формам. Однако, прощелкивание описывается существенно нелинейным уравнением в частных производных и, конечно, не всегда может быть представлено в виде конечной суммы балочных функций.

**2. Постановка задачи и метод ее решения.** Рассмотрим пологую арку, представленную на рис. 1. Ее свободные колебания описываются следующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением в частных производных:

$$Hy_{xx} - EI(y - y_0)_{xxxx} = 0; \quad (1)$$

$$H = -\frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 \right) dx,$$

где  $EI$  – жесткость балки на изгиб;  $y(x,t)$  – прогиб балки;  $H$  – продольная сила (распор);  $A$  – площадь поперечного сечения;  $y_0(x)$  – начальная погибь арки.

В этой работе будет исследоваться прощелкивание арки между тремя положениями статического равновесия. Поэтому амплитуды колебаний арки соизмеримы с радиусом инерции поперечного сечения.

Для дальнейшего анализа введем безразмерные переменные и параметры:

$$u_0 = \frac{y_0}{\lambda_1}; \quad u = \frac{y}{\lambda_1}; \quad \xi = \frac{\pi}{L}x; \quad \tau = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \lambda_1 t. \quad (2)$$

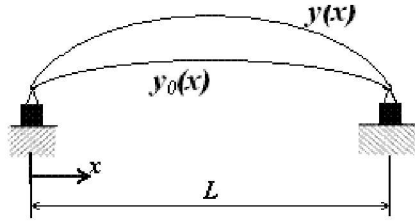


Рисунок 1 – Пологая арка

Тогда динамическая система (1) примет следующий вид:

$$\frac{u_{\xi\xi\xi}}{2\pi} \int_0^{\pi} (u_{0,\xi}^2 - u_{\xi}^2) d\xi + \varepsilon (u - u_0)_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\tau\tau} = 0, \quad (3)$$

где  $\varepsilon = r^2 / \lambda_1^2$ ,  $r$  – радиус инерции поперечного сечения.

В этой статье рассматривается шарнирно опертая арка и защемленная с обоих концов арка. При исследовании шарнирно опертой балки начальная погибь берется в виде:

$$u_0(\xi) = \sin(\xi). \quad (4)$$

В анализе динамики защемленной арки начальная погибь принимается в виде:

$$u_0 = K_4(\lambda_1)K_3\left(\lambda_1 \frac{\xi}{\pi}\right) - K_3(\lambda_1)K_4\left(\lambda_1 \frac{\xi}{\pi}\right), \quad (5)$$

где  $\lambda_1 = 4,730$ ;  $K_3, K_4$  – функции Крылова [12].

Для решения краевой задачи используем метод конечных разностей. Введем сетку по пространственной координате  $\xi$  с постоянным шагом  $h$ .

$$\xi_i = ih; \quad u_i = u(\xi_i). \quad (6)$$

Для каждого внутреннего узла ( $i = 1 \dots n$ ) составим разностное уравнение, заменив в точке с координатой  $\xi_i$  производные, входящие в уравнение движения разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_i &\approx \frac{(u_{i-1} - u_i)}{h}, \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|_i &\approx \frac{(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}))}{h^2}, \\ \left. \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} \right|_i &\approx \frac{(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}))}{h^4}. \end{aligned}$$

Для приближенного вычисления интеграла, входящего в уравнение (3),

воспользуемся формулой трапеций. Подставив выражения для производных и начальной погиби в уравнение (3) получим систему  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\tau^2} + f(\bar{u}, u_{-1}, u_0, u_{n+1}, u_{n+2}) = 0, \quad (7)$$

$$\bar{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n].$$

Полученная система уравнений дополняется граничными условиями. Для шарнирно опертой арки граничные условия таковы:

$$u(0) = u(\pi) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\pi} = 0. \quad (8)$$

Для защемленной с обоих концов арки граничные условия принимают следующий вид:

$$u(0) = u(\pi) = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\pi} = 0.$$

Дискретная динамическая система, описывающая прощелкивание полой арки с начальной погибью (4), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} + \frac{1}{h^4} (u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}) - \sin(\xi_i) - \\ & - \frac{1}{4\pi h} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \times \\ & \times \sum_{j=1}^{n+1} \left[ \frac{1}{h^2} ((u_{j-2} - u_{j-1})^2 + (u_{j-1} - u_j)^2) - \cos^2(\xi_{j-1}) - \cos^2(\xi_j) \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Динамическая система (7) с  $\varepsilon = 0,02$  численно интегрировалась методом Рунге-Кутты. При анализе колебаний шарнирно опертой арки начальные условия для численного интегрирования выбирались в следующем виде:

- 1)  $u_i(0) = \theta_1 \sin(\xi_i) + \theta_2 \sin(2\xi_i)$ ,  $\dot{u}_i(0) = 0$ ,  $\theta_1 = 2$ ,  $\theta_2 = 0$ ;
- 2)  $u_i(0) = \theta_1 \sin(\xi_i) + \theta_2 \sin(2\xi_i)$ ,  $\dot{u}_i(0) = 0$ ,  $\theta_1 = 0,024$ ,  $\theta_2 = 1,263$ ;
- 3)  $u_i(0) = 0$ ,  $\dot{u}_i(0) = \theta_1$ ,  $\theta_1 = 2$ .

Как показали результаты численного интегрирования, в случае 1 в прощелкивании принимает участие только первая форма колебаний шарнирно опертой балки. Динамическое поведение системы для случаев 2, 3 представлено на рисунках 2, 3 соответственно. Как видно из рисунков в случае 2 в колебания арки принимают участие только первая и вторая формы колебаний. В случае 3 в колебаниях арки участвуют большое число форм свободных колебаний.

Для защемленной с двух сторон арки начальные условия для интегрирования выбирались в следующем виде:

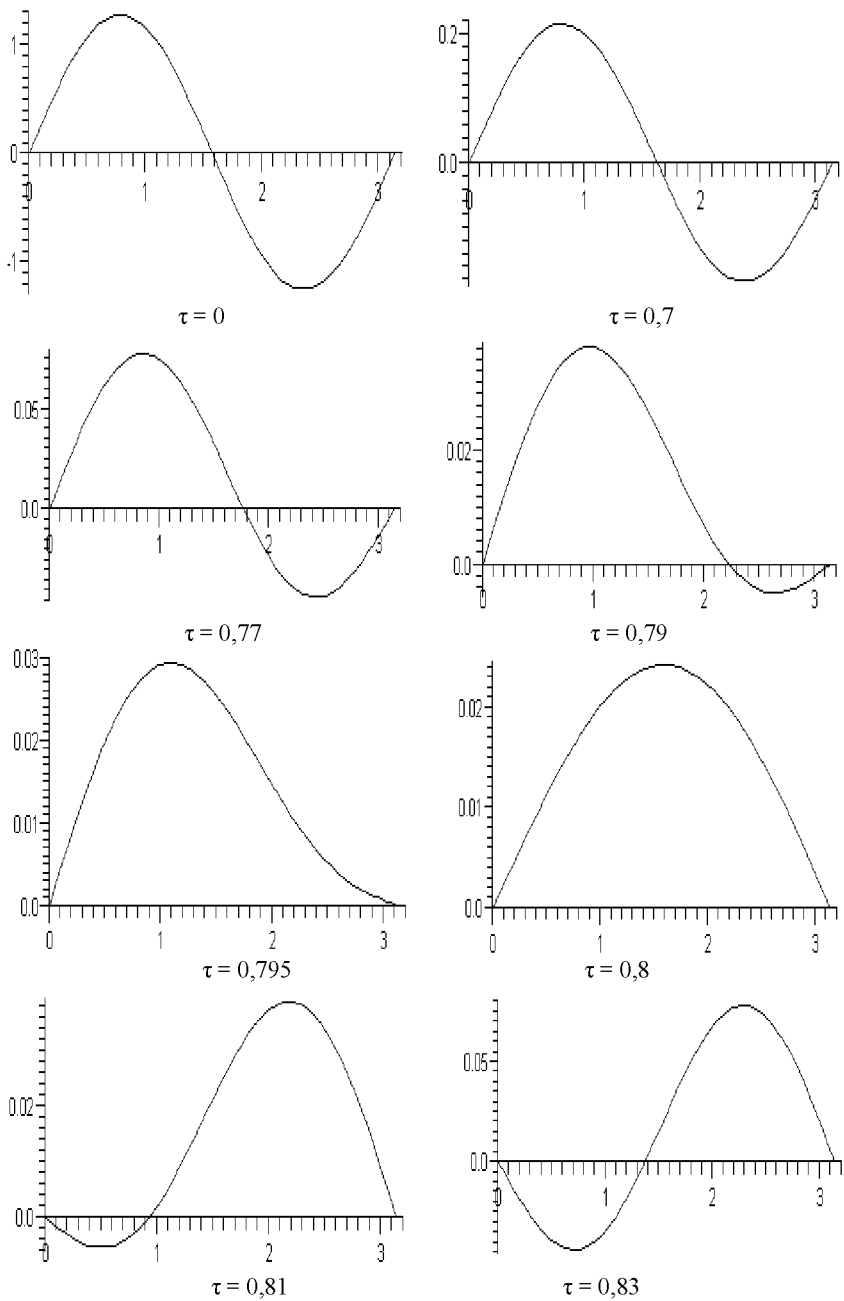
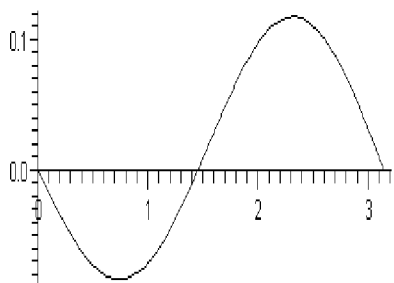
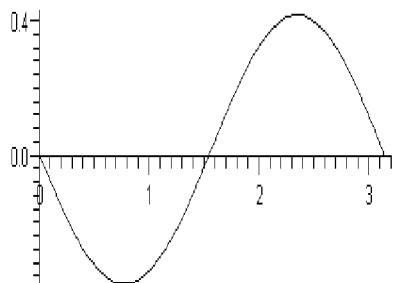


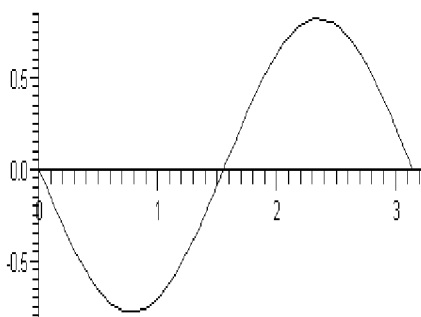
Рисунок 2 – Формы свободных колебаний шарнирно опертой арки



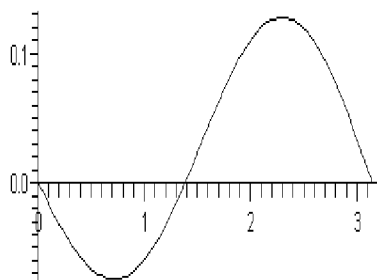
$\tau = 0,85$



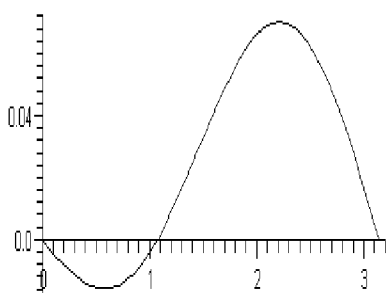
$\tau = 1$



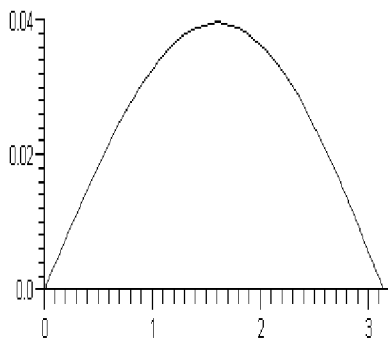
$\tau = 2$



$\tau = 2,35$



$\tau = 2,38$



$\tau = 2,4$

Продолжение рис. 2

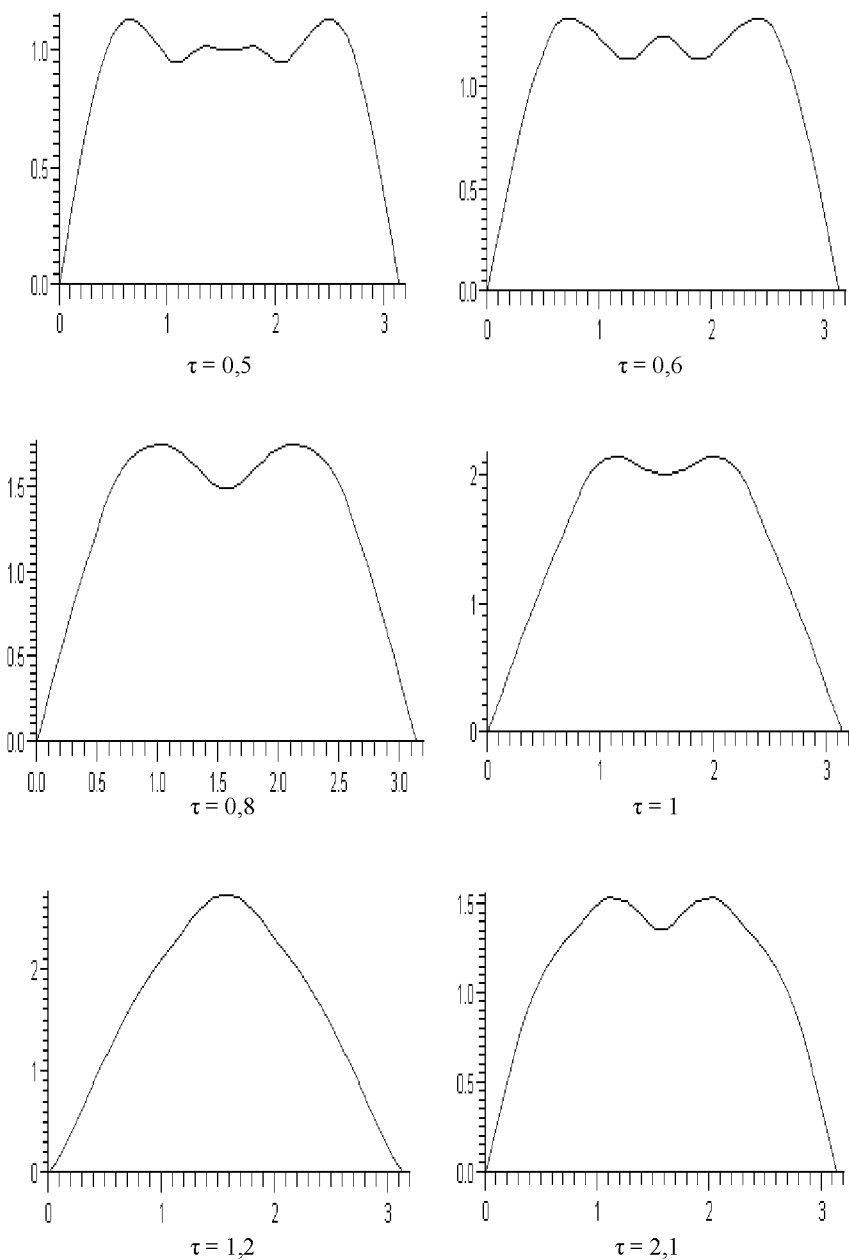
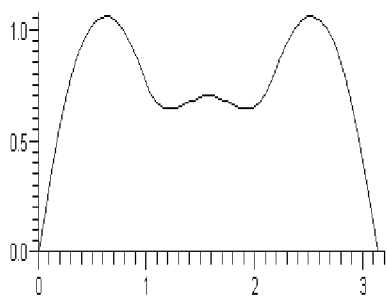
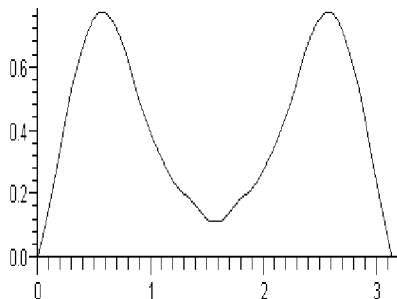


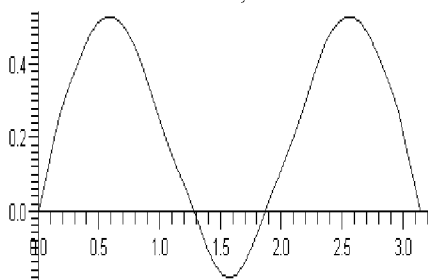
Рисунок 3 – Формы свободных колебаний шарнирной арки



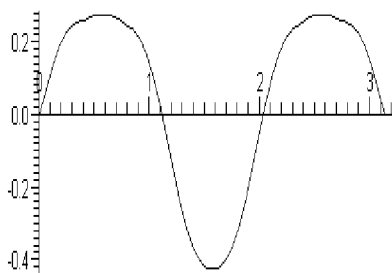
$\tau = 2,4$



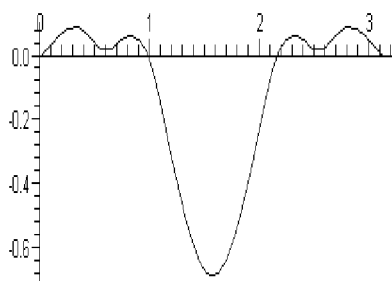
$\tau = 2,6$



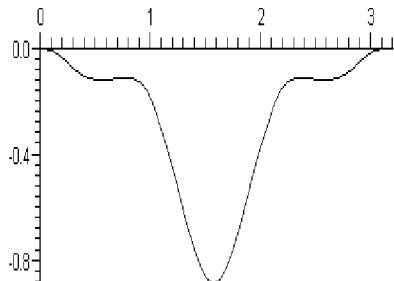
$\tau = 2,7$



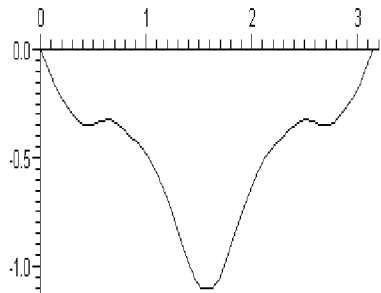
$\tau = 2,8$



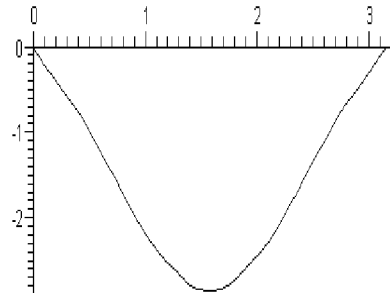
$\tau = 2,9$



$\tau = 2,98$



$\tau = 3,1$



$\tau = 4,4$

Продолжение рис. 3



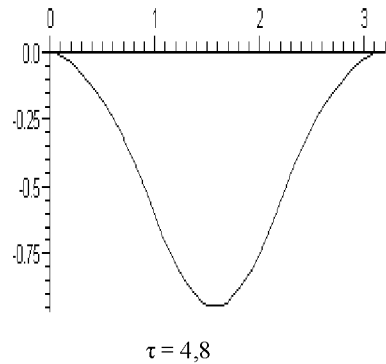
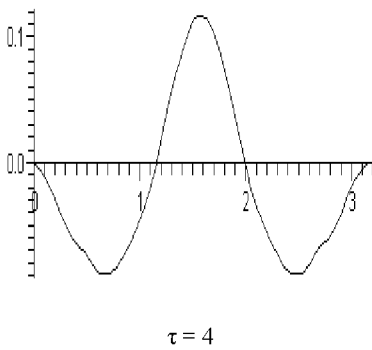
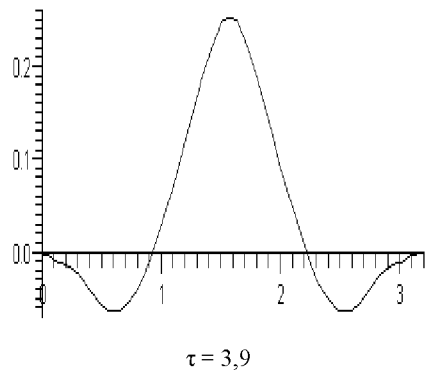
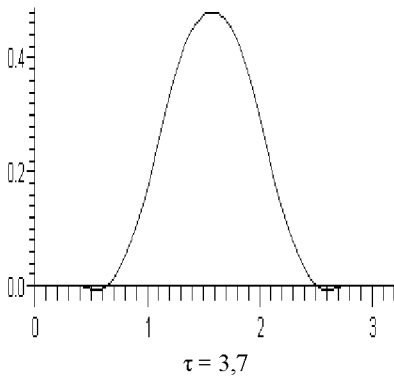
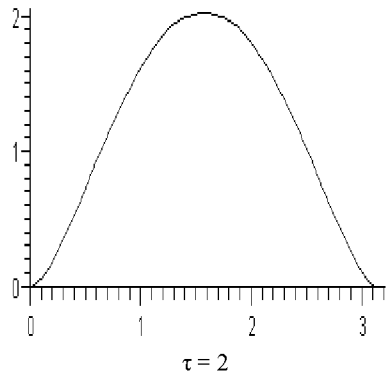
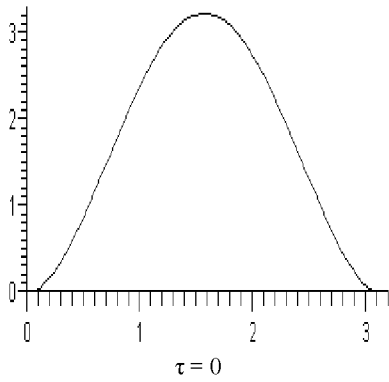


Рисунок 4 – Формы свободных колебаний жестко заземленной арки

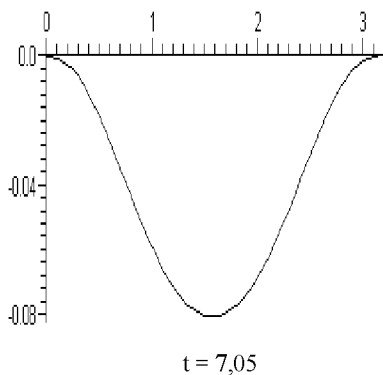
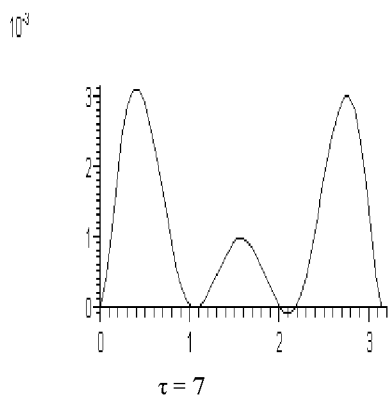
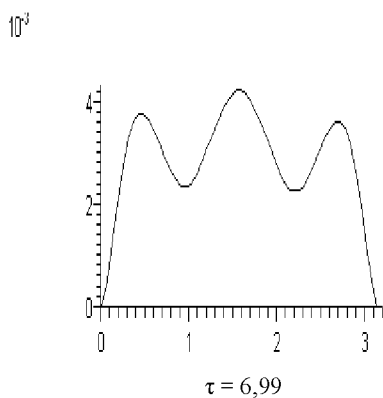
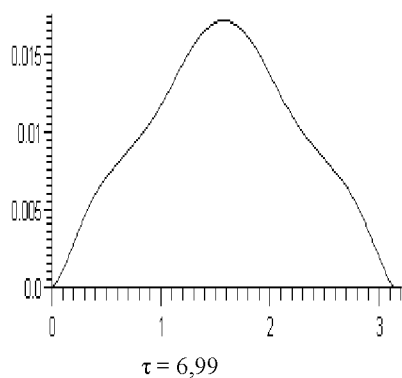
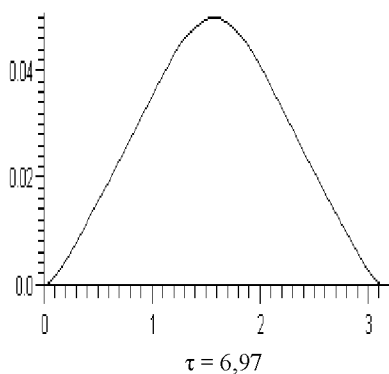
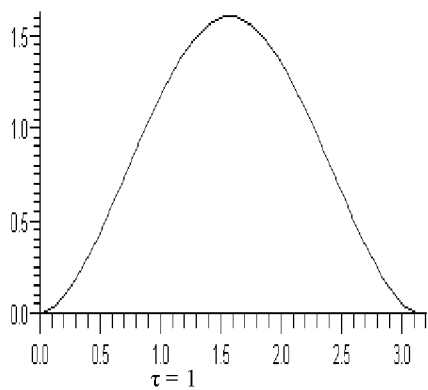


Рисунок 5 – Формы свободных колебаний жестко заземленной арки

$$4) u_i(0) = 2 \sin \frac{\lambda_1}{l} \xi_i + 2A_1 \cos \frac{\lambda_1}{l} \xi_i + 2B_1 sh \frac{\lambda_1}{l} \xi_i + 2C_1 ch \frac{\lambda_1}{l} \xi_i, \quad \dot{u}_i(0) = 0;$$

$$5) u_i(0) = 0, \quad \dot{u}_i(0) = \sin \frac{\lambda_1}{l} \xi_i + A_1 \cos \frac{\lambda_1}{l} \xi_i + B_1 sh \frac{\lambda_1}{l} \xi_i + C_1 ch \frac{\lambda_1}{l} \xi_i.$$

На рисунках 4, 5 представлено динамическое поведение системы для случаев 4 и 5 соответственно. Как видно из этих рисунков в колебаниях системы принимает участие большое число форм свободных колебаний защемленного с двух сторон стержня.

**3. Заключение.** Из проделанного численного анализа можно сделать следующие выводы. При колебаниях защемленной с двух сторон арки в движение чаще всего вовлекается большое число форм свободных колебаний защемленного с двух сторон прямого стержня, если начальные перемещения и начальные скорости задаются по первой форме колебаний защемленного с двух сторон стержня. Если арка с двух сторон шарнирно оперта, то вовлеченные моды шарнирно опертого стержня выше второй при задании начальных скоростей и начальных перемещений по первым двум формам колебаний прямого шарнирно опертого стержня является редкостью. Поэтому при исследовании движений прощелкивания представление колебаний в виде конечного разложения по формам собственных линейных колебаний соответствующего прямого стержня возможно только для шарнирно опертого с двух сторон стержня. Если при исследовании прощелкивания пологой арки применяется разложение по собственным формам, необходимо дополнительное прямое численное интегрирование для подтверждения результатов.

**Список литературы:** 1. *L.N.Virgin, R.B.Davis* Vibration isolation using buckled struts // 2003 Journal of Sound and Vibration, **260**. – P. 965-973. 2. *K.V.Avramov, Yu.V.Mikhlin* Snap-through truss as a vibration absorber // 2004 Journal of Vibration and Control **10**. – P. 291-308. 3. *K.V.Avramov, Yu.V.Mikhlin* Snap-through truss as an absorber of forced oscillations // 2006 Journal of Sound and Vibration **29**. – P. 705-722. 4. *S.P.Timoshenko* Buckling of flat curved bars and slightly curved plates // 1935 ASME J. Appl. Mech. **2**. – P. 17-20. 5. *Динник А.Н.* Устойчивость арок. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 156 с. 6. *Григолюк Э.И.* К расчету устойчивости пологих арок // Инженерный сборник. – 1951. – Т. 9. – С.177-200. 7. *Y.C.Fung, A.Kaplan* Buckling of Low Arches or Curved Beams of Small Curvature // NACA Technical Note 2840. – 1952. 8. *C.S.Hsu* Stability of shallow arches against snap-through under timewise step loads // 1968 ASME Journal of Appl. Mech. **33**. – P. 31-39. 9. *C.S.Hsu, C.T.Kuo, R.H.Plant* Dynamic stability criteria for clamped shallow arches under timewise step loads // 1969 AIAA Journ. **7**, 1925 – 1931. 10. *N.C.Hung* Dynamic buckling of some elastic shallow structures subjected to periodic loading with high frequency // 1972 Int. J. Solids and Structures **8**, 315-326. 11. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М: Наука, 1989. – 280 с. 12. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972.

Поступила в редколлегию 19.03.2007