

**А.В.ШАПОВАЛОВ**, канд.техн.наук;  
**В.М.ШАТОХИН**, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ»

## **КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ**

Досліджено особливості крутильних коливань стержня під дією системи рівних регулярно розташованих на окружності сил, лінії дії яких перпендикулярні площини окружності й осі стержня. Точки їхнього прикладання рівномірно рухаються по зазначеній окружності. Отримано критерії відсутності резонансів, а також умови виникнення полірезонансу.

Peculiarities of rod torsion oscillations under the influence of equal regularly located on circumference force system are investigated. Force lines of action are perpendicular to circumference plane and rod axle. Points of their application evenly move on stated circumference. Criteria of resonance lack and conditions of polyresonance beginnings are received.

**Введение.** К числу актуальных проблем теории колебаний деформируемых систем относится проблема изучения колебаний конструкций под действием нагрузок, место приложения которых меняется в зависимости от времени [1-3]. В динамике машин значительное внимание уделяется вопросам колебаний элементов машин, вращающихся в подшипниках качения и скольжения. При этом действие подшипника на опору заменяют сосредоточенной статической нагрузкой в то время как подшипник является источником динамических усилий на конструкцию. Последнее обстоятельство может привести к тому, что на определенных режимах работы податливые упругие опоры могут испытывать интенсивные колебания от действующих усилий в подшипниках. Исследования динамических процессов в конструкциях, находящихся под действием вращающейся нагрузки, в настоящее время находятся на начальном этапе.

В данной работе рассматривается задача возбуждения крутильных колебаний стержня от нагрузки, которая передается со стороны упорного шарикоподшипника, расположенного на его поверхности. Рассматривается стержень постоянного поперечного сечения под действием системы равных регулярно расположенных на окружности сил, линии действия которых перпендикулярны плоскости окружности и оси стержня. Точки их приложения равномерно движутся по указанной окружности (рис. 1).

**1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний и метод его решения.** Пусть крутильные колебания балки описываются следующим дифференциальным уравнением [4]

$$J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = M(x, t), \quad (1)$$

где  $J$  – погонный момент инерции относительно оси стержня;

$D$  – крутильная жесткость;

$M(x, t)$  – интенсивность моментной нагрузки.

Поместив начало системы координат  $xOy$  в левый конец балки (рис. 1) так, чтобы ось  $Ox$  совпадала с продольной осью балки, разложим угол закрутки стержня в ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x \right), \quad (2)$$

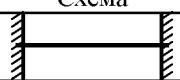
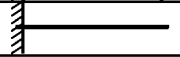
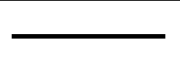
где  $l$  – длина балки.

Постоянные величины  $a_1$ ,  $a_2$  и параметры  $\lambda_n$  определяются из крайних условий задачи. Данные по характерным типам конструкций приведены в табл. 1.

Внешнюю нагрузку аналогично (2) представим рядом

$$M(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x \right). \quad (3)$$

Таблица 1

Схема	$\lambda_n$	$a_1$	$a_2$
	$n\pi$	1	0
	$(2n-1)\pi$	1	0
	$n\pi$	0	1

Для рассматриваемого случая имеем следующее. Из рис. 1 видно, что крутящий момент от силы, приложенной в точке с координатами  $x_i = x_i(t)$ ;  $y_i = y_i(t)$ , может быть задан выражением

$$M_i = P y_i \delta(x - x_i),$$

где  $\delta$  – функция Дирака.

Тогда общая нагрузка на стержень от  $m$  сил, вращающихся по окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $(a, b)$  будет

$$M(x, t) = P \sum_{i=1}^m y_i \delta(x - x_i). \quad (4)$$

Из сравнения выражений (3), (4) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x \right) = P \sum_{i=1}^m y_i \delta(x - x_i). \quad (5)$$

Для нахождения коэффициентов разложения умножим левую и правую часть (5) на  $a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x$ . Возьмем интегралы от обеих частей полученного выражения по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ . Тогда с учетом свойства ортогональности собственных форм, получим

$$B_n(t) = \frac{2P}{l} \sum_{i=1}^m y_i \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x_i + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x_i \right). \quad (6)$$

После соответствующих преобразований с учетом того, что  $x_i = \xi_i + a$ ;  $y_i = \eta_i + b$ ;  $\alpha = \lambda_n/l$ , выражение (6) приобретает вид

$$B_n(t) = \frac{2P}{l} \left[ (a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a) \left( b \sum_i^m \cos \alpha \xi_i + \sum_i^m \eta_i \cos \alpha \xi_i \right) + (a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a) \left( b \sum_i^m \sin \alpha \xi_i + \sum_i^m \eta_i \sin \alpha \xi_i \right) \right]. \quad (7)$$

Переходя к полярной системе координат, положение точки  $(x_i, y_i)$  на окружности радиуса  $r$  определим углом  $\varphi_i$  по формулам

$$\xi_i = r \sin \varphi_i; \quad \eta_i = r \cos \varphi_i; \quad (i = \overline{1, m}).$$

Тогда будем иметь

$$B_n(t) = \frac{2P}{l} \left\{ (a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a) \left[ b \sum_i^m \cos(\alpha r \sin \varphi_i) + r \sum_i^m \cos \varphi_i \cos(\alpha r \sin \varphi_i) \right] + (a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a) \left[ b \sum_i^m \sin(\alpha r \sin \varphi_i) + r \sum_i^m \cos \varphi_i \sin(\alpha r \sin \varphi_i) \right] \right\}. \quad (8)$$

Преобразуем выражение (8), используя известные разложения [5]

$$\cos(z \sin \vartheta) = J_0(z) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(z) \cos 2j\vartheta;$$

$$\sin(z \sin \vartheta) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} J_{2j-1}(z) \sin(2j-1)\vartheta,$$

где  $J_\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) – функция Бесселя первого рода.

В результате соответствующих преобразований имеем

$$B_n(t) = \frac{2P}{l} \left\{ mbJ_0(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{1j} \sum_{i=1}^m \cos 2j\varphi_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{2j} \sum_{i=1}^m \sin(2j-1)\varphi_i + J_0(\alpha r)(a_1 \cos \alpha a + a_2 \sin \alpha a) \sum_{i=1}^m \cos \varphi_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{3j} \sum_{i=1}^m [\cos(2j+1)\varphi_i + \cos(2j-1)\varphi_i] + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{4j} \sum_{i=1}^m [\sin 2j\varphi_i + \sin(2j-2)\varphi_i] \right\}, \quad (9)$$

где

$$\lambda_{1j} = 2bJ_{2j}(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a); \quad \lambda_{2j} = 2bJ_{2j-1}(\alpha r)(a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a);$$

$$\lambda_{3j} = rJ_{2j}(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a); \quad \lambda_{4j} = rJ_{2j-1}(\alpha r)(a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a).$$

Легко показать, что для регулярного расположения сил

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + i\Delta\varphi \quad (i = \overline{0, m-1})$$

из формул [5, 6]

$$\sum_{i=1}^{m-1} \cos(u + iv) = \cos\left(u + \frac{m-1}{2}v\right) \sin \frac{mv}{2} \operatorname{cc} \frac{v}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin(u + iv) = \sin\left(u + \frac{m-1}{2}v\right) \sin \frac{mv}{2} \operatorname{cc} \frac{v}{2}$$

следует

$$\sum_{i=1}^m \cos 2j\varphi_i = \begin{cases} m \cos ms\varphi_1, & j = ms/2, \\ 0, & j \neq ms/2; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{2k} \cos 2j\varphi_i = 2k \cos 2ks\varphi_1, \quad j = ks;$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \cos 2j\varphi_i = (2k-1) \cos(2k-1)2s\varphi_1, \quad j = (2k-1)s;$$

$$\sum_{i=1}^m \sin 2j\varphi_i = \begin{cases} m \sin ms\varphi_1, & j = ms/2, \\ 0, & j \neq ms/2; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^m \cos(2j+1)\varphi_i = \begin{cases} m\delta_m \cos(2s-1)m\varphi_1, & j = [(2s-1)m-1]/2, \\ 0, & j \neq [(2s-1)m-1]/2; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{2k} \cos(2j+1)\varphi_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \cos(2j+1)\varphi_i = (2k-1) \cos(2k-1)(2s-1)\varphi_1, \quad j = [(2k-1)(2s-1)-1]/2;$$

$$\sum_{i=1}^m \cos(2j-1)\varphi_i = \begin{cases} m\delta_m \cos(2s-1)m\varphi_1, & j = [(2s-1)m+1]/2, \\ 0, & j \neq [(2s-1)m+1]/2; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{2k} \cos(2j-1)\varphi_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \cos(2j-1)\varphi_i = (2k-1) \cos(2k-1)(2s-1)\varphi_1, \quad j = [(2k-1)(2s-1)+1]/2;$$

$$\sum_{i=1}^m \sin(2j-1)\varphi_i = \begin{cases} m\delta_m \cos(2s-1)m\varphi_1, & j = [(2s-1)m+1]/2, \\ 0, & j \neq [(2s-1)m+1]/2; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^m \sin(2j-2)\varphi_i = \begin{cases} m \sin ms\varphi_1, & j = (ms+2)/2, \\ 0, & j \neq (ms+2)/2; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^m \cos\varphi_i = 0, \quad m > 0.$$

В этих формулах  $s \in N$  ( $N$  – множество натуральных чисел);  $\delta_m = 1$  для  $m = 2r - 1$ ;  $\delta_m = 0$  для  $m = 2r$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ).

Так как для постоянной скорости вращения  $\varphi_1 = \omega t$ , то с учетом приведенных формул выражение (9) упрощается

$$B_n(t) = \frac{2Pm}{l} \left[ bJ_0(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a) + \sum_{i=1}^{\infty} L_i \cos i\omega t + \right.$$

$$+ \left. \sum_{i=1}^{\infty} M_i \sin i m \omega t + \delta_m \sum_{i=1}^{\infty} N_i \cos(2i-1)m\omega t + \delta_m \sum_{i=1}^{\infty} T_i \sin(2i-1)m\omega t \right], \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_i &= 2bJ_{im}(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a); \\ M_i &= 2J_{im}(\alpha r) \frac{im}{\alpha} (a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a); \\ N_i &= 2J_{(2i-1)m}(\alpha r) \frac{(2m-1)m}{\alpha} (a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a); \\ T_i &= 2bJ_{(2i-1)m}(\alpha r) (a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставив ряды (2), (3) в уравнение (1), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{A}_n + \Omega_n^2 A_n = J^{-1} B_n(t), \quad (12)$$

где  $\Omega_n^2 = \frac{D}{J} \alpha^2$  – квадрат собственных частот колебаний стержня.

Ограничиваясь рассмотрением установившихся вынужденных колебаний, решение  $n$ -го уравнения с учетом разложения (10) ищем в виде

$$A_n = C_{n0} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{ni} \cos i m \omega t + \sum_{i=1}^{\infty} E_{ni} \sin i m \omega t + \sum_{i=1}^{\infty} F_{ni} \cos(2i-1)m\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} H_{ni} \cos(2i-1)m\omega t.$$

Подставив это выражение в уравнение (12), после сравнения коэффициентов при одинаковых гармониках слева и справа с учетом (10), получим для искоемых коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} C_{n0} &= \frac{2Pm}{l} \frac{bJ_0(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a)}{D\alpha^2}; \\ C_{ni} &= \frac{2Pm}{Jl} \frac{L_i}{\Omega_n^2 - (im\omega)^2}; \quad E_{ni} = \frac{2Pm}{Jl} \frac{M_i}{\Omega_n^2 - (im\omega)^2}; \\ F_{ni} &= \frac{2Pm}{Jl} \frac{\delta_m N_i}{\Omega_n^2 - [(2i-1)m\omega]^2}; \quad H_{ni} = \frac{2Pm}{Jl} \frac{\delta_m T_i}{\Omega_n^2 - [(2i-1)m\omega]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Таким образом, в установившемся режиме стержень, получив статическую закрутку, равную

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n0} \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x \right),$$

будет совершать колебания с частотой  $im\omega$  и  $(2i-1)m\omega$ . Угол закручива-

ния пропорционален смещению  $J_0 b$  и произведению  $2Pm$ . Следовательно, он зависит от суммарного внешнего усилия, передаваемого стержню.

**2. Анализ характера резонансных режимов.** Проанализируем теперь амплитуды возбуждения колебаний (11). В силу того, что максимальные значения функций Бесселя  $J_\nu(z)$  убывают с ростом  $\nu$ , увеличение количества сил при сохранении величины нагрузки  $mP$ , уменьшает амплитуды возбуждения. Таким образом, увеличение количества сил без изменения статического угла закрутки стержня приводит к снижению уровня возможных вибраций.

Из выражений (13) следуют условия резонансов в рассматриваемой системе:

для четного количества сил ( $m = 2k$ )

$$\Omega_n^2 - (2ik\omega)^2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\Omega_n}{2ik}, \quad i, k = 1, 2, 3, \dots; \quad (14)$$

для нечетного количества сил ( $m = 2k - 1$ )

$$\left. \begin{aligned} \Omega_n^2 - [2i(2k-1)\omega]^2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\Omega_n}{2i(2k-1)}; \\ \Omega_n^2 - [(2i-1)(2k-1)\omega]^2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\Omega_n}{(2i-1)(2k-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Отсюда следует, что при заданной скорости вращения  $\omega_1$  системы, состоящей из  $m$  сил, резонанс невозможен на собственных частотах стержня, удовлетворяющих условиям:  $\Omega_n < \Omega_k$  при четном числе сил, где  $\Omega_k = 2k\omega_1$ ;  $\Omega_n < \Omega_k$  при нечетном числе сил, где  $\Omega_k = (2k-1)\omega_1$ .

При стремлении  $i$  и  $m$  к бесконечности имеется возможность наступления резонансов даже при  $\omega \rightarrow 0$ . Однако при этом возрастают индексы функции Бесселя  $i$ , как отмечено выше, убывают амплитуды полигармонического возбуждения. Следует ожидать, что они окажутся недостаточными, чтобы вызывать заметные колебания в системах, где существует значительное рассеяние энергии.

О том, как с ростом количества сил убывают амплитуды полигармонического возбуждения, позволяет судить табл. 2, в которой приведены данные расчета двух амплитуд полигармонического возбуждения для случая жесткого закрепления концов балки при следующих параметрах:  $a = 1$  м;  $l = 3a$ ;  $b = 0,2a$ ;  $r = 0,05a$ .

Из таблицы видно, что вращение большого числа регулярно расположенных на окружности сил не является опасным с точки зрения возбуждения крутильных колебаний. Амплитуды колебаний могут достигать заметных величин только при нарушении регулярности расположения нагрузки, например, когда одна из сил по величине окажется больше других, что возможно в упорном шарикоподшипнике при нарушении перпендикулярности оси вращения торцевой опорной поверхности. В этом случае получим дополнительное возбуждение типа одной вращающейся силы, которому соответствуют большие значения коэффициентов  $L_1$  и  $T_1$ .

Таблица 2

$n$	$m$	$L_1$	$T_1$
1	1	$0,1187 \cdot 10^{-3}$	$0,0523 \cdot 10^{-1}$
	3	$0,1549 \cdot 10^{-12}$	$0,0598 \cdot 10^{-5}$
	5	$0,1444 \cdot 10^{-22}$	$0,2050 \cdot 10^{-10}$
	7	$0,2823 \cdot 10^{-33}$	$0,3345 \cdot 10^{-15}$
2	1	$0,4744 \cdot 10^{-3}$	$-0,1046 \cdot 10^{-1}$
	3	$0,0991 \cdot 10^{-10}$	$-0,4782 \cdot 10^{-5}$
	5	$0,1478 \cdot 10^{-19}$	$-0,0656 \cdot 10^{-8}$
	7	$0,4625 \cdot 10^{-29}$	$0,4281 \cdot 10^{-13}$

Остановимся в заключении на одном свойстве рассматриваемой системы. Поскольку собственные частоты заделанной по торцам балки связаны соотношением  $\Omega_n = n\Omega_1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), из условий резонанса для группы, состоящей из  $m$  сил, получим

$$\omega = \frac{\Omega_n}{sm} = \frac{\Omega_1}{m},$$

так как  $s = 1, 2, 3, \dots$ .

Таким образом, если группу сил вращать со скоростью  $\Omega_1/m$ , в системе наступает одновременно резонанс на всех собственных частотах колебаний. Явление полирезонанса присуще так же балке с другими граничными условиями.

### Выводы.

1. Построено дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня под действием вращающейся системы регулярно расположенных на окружности сил, моделирующих действие упорного шарикоподшипника.
2. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для формирования его решения.
3. Найдено решение указанных уравнений для установившихся колебаний стержня.
4. Установлено, что увеличение количества сил при сохранении суммарной нагрузки приводит к снижению уровня вибраций.
5. Получены условия возникновения и отсутствия резонансов для четного и нечетного количества сил.
6. Показано, что нарушение регулярности расположения сил может быть причиной возрастания динамических нагрузок.
7. Сформулированы условия возникновения в стержне явления полирезонанса.

**Список литературы:** 1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с. 2. Фиштов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с. 3. Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с. 4. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с. 5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с. 6. Двайт Г.В. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973. – 228 с.

Поступила в редколлегию 15.09.2006.