

*И.Л.СОЛОВЬЕВ*, канд.техн.наук, НТУ, Киев

## **КРИТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ КОНСОЛЬНЫХ УПРУГИХ ТРУБ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ НАГРУЗОК**

Розглянуто задачу про квазістатичну та динамічну втрату стійкості пружних тонкостінних консольних циліндричних труб, що обертаються, під дією осьових слідкуючих навантажень. Досліджено залежність характеру їх втрати стійкості від співвідношення між параметрами кутової швидкості обертання та величини слідкуючого навантаження.

The problem of quasi-static and dynamic buckling of the elastic thin-wall console cylinder tubes rotating under axial non-conservative loading is considered. The dependence of their buckling character from the ratio between the parameter of angular velocity and value of non-conservative loading is investigated.

**Введение.** Характер критического состояния, возникающего в тонкостенной упругой системе, определяют типы действующих на нее сил. Силы, которые могут быть вычислены из условия сохранения энергии в чисто механическом смысле этого слова, называются консервативными. Их применение в строительной механике и теории упругости связано с основным допущением, что равновесная деформируемая система находится под действием сил, действующих на основную недеформируемую систему. Это допущение, которое используется для обоснования общей теории Кирхгофа о единственности, должно быть отброшено в задачах устойчивости. При этом очень важным является фактор, связанный с сохранением или изменением направления сил при потере устойчивости системы (рис. 1). Среди нагрузок последнего типа можно выделить класс сил, действующих по направлению касательной к осевой линии на свободном конце консольного стержня. Неконсервативные нагрузки такого типа называются следящими (рис. 1,б,в).

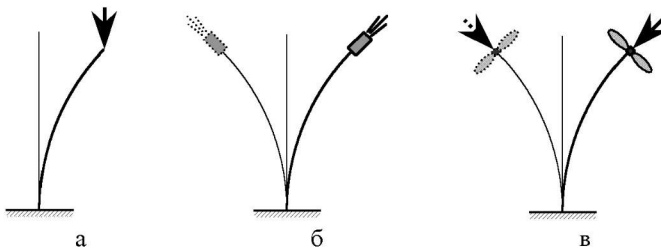


Рисунок 1 – Схема нагружения трубы продольными силами

К специальному классу сил можно отнести также гироскопические силы,

вызванные взаимодействием вращательного и линейного движений упругой системы. Как известно [1] гироскопические силы могут оказывать не только стабилизирующее и дестабилизирующее влияние на вращающуюся упругую конструкцию, но также существенно изменяют и форму ее движения.

**Обзор литературы и цель исследования.** Проблема исследования потери устойчивости равновесия упругих труб занимает одно из центральных мест в механике деформируемого твердого тела. Как правило, эти исследования проводятся с использованием концепции статического выпучивания оболочки на основе линейаризованных разрешающих уравнений. Однако развитие турбо- и авиастроения показало, что в ряде случаев классические подходы, основанные на методах статике, оказываются непригодными для решения подобных задач, поскольку на оболочечные конструкции этих систем действуют неконсервативные внешние силы и гироскопические силы инерции и они теряют устойчивость равновесия путем перехода в режимы колебательных движений. С учетом этой особенности устойчивость равновесия таких систем должна проверяться на основе динамического подхода. В данной работе изучается устойчивость равновесия вращающихся труб под действием следящих осевых нагрузок.

Вопрос анализа динамической потери устойчивости равновесия стержневых конструкций под действием следящих сил рассмотрен в [2], исследование выпучивания упругих валов выполнено в [3-6], изучению устойчивости тонких оболочек при простом и сложном вращениях посвящены работы [7-9]. Учитывая, что вращающиеся оболочки роторов турбин авиационных двигателей испытывают кроме действия сил инерции также осевое сжатие или растяжение следящими силами, можно заключить, что проблема анализа статических и динамических эффектов, сопутствующих этим явлениям, является весьма актуальной. Данная работа посвящена компьютерному моделированию этих явлений.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о динамической устойчивости тонких вращающихся цилиндрических оболочек, подверженных действию осевых сжимающих или растягивающих следящих сил. Примем, что один край оболочки является свободным, другим краем она жестко присоединена к вращающемуся основанию. Ось вращения основания совпадает с осью оболочки. К свободному краю оболочки приложены продольные равномерно распределенные следящие силы, сжимающие или растягивающие ее в осевом направлении. Исследуется возможность бифуркационного перехода квазистатического равновесия вращающейся оболочки в режим ее колебаний.

Для исследования динамической потери устойчивости вращающейся цилиндрической оболочки используется подход, предложенный в [5] при анализе выпучивания консольных стержней под действием следящей силы. Он основан на установлении зависимости частоты собственных колебаний упругой

системы от интенсивности следящей силы. Значения следящих сил, при которых система теряет возможность совершать периодические колебания, считаются критическими. Этот подход используется ниже для моделирования потери устойчивости оболочек.

Примем, что тонкостенная цилиндрическая оболочка связана с жестким носителем, который вращается вместе с системой координат  $Oxuz$  с постоянной по модулю угловой скоростью  $\bar{\omega}$  относительно оси симметрии  $Oz$ . На срединной поверхности оболочки введем ортогональную криволинейную систему координат  $Ox^1x^2x^3$ .

Уравнения динамического равновесия элемента оболочки, которые записаны в криволинейной ортогональной системе координат  $Ox^1x^2x^3$  с базисными векторами  $\bar{e}_\alpha$  на поверхности, имеют вид

$$\nabla_\alpha \bar{T}^\alpha + \bar{p} = 0; \quad \nabla_\alpha \bar{M}^\alpha + (e_\alpha \times \bar{T}^\alpha) \sqrt{a_{11}a_{22}} = 0 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (1)$$

Здесь  $\bar{T}^\alpha$  – вектор внутренних сил в оболочке,  $\bar{M}^\alpha$  – вектор внутренних моментов,  $a_{11}, a_{22}$  – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности,  $\bar{p}$  – вектор интенсивности внешней распределенной нагрузки.

Используя соотношения связи между контравариантными компонентами функций внутренних сил  $T^{ij}$  и моментов  $M^{ij}$  и ковариантными составляющими функций деформации  $\varepsilon_{ij}$  и изменения кривизн  $\mu_{ij}$

$$\begin{aligned} T^{ij} &= Eh \varepsilon_{\alpha\beta} (a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1-\nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / (1-\nu^2); \\ M^{ij} &= Eh^3 \mu_{\alpha\beta} (a^{ij} a^{\alpha\beta} + (1-\nu) a^{i\alpha} a^{j\beta}) / 12(1-\nu^2), \end{aligned} \quad (2)$$

выразив эти функции через ковариантные компоненты  $u_1, u_2, u_3$  вектора перемещений  $\bar{u}$  и угла поворота  $\vartheta_i$  сечений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (\bar{e}_i \cdot \partial \bar{u} / \partial x^j + \bar{e}_j \cdot \partial \bar{u} / \partial x^i + \vartheta_i \cdot \vartheta_j) / 2; \quad \vartheta_i = (\partial \bar{u} / \partial x^i) \bar{e}_3; \\ \mu_{ij} &= (\bar{e}^k / c^{ik} \cdot \partial \bar{\Omega} / \partial x^j + \bar{e}^k / c^{jk} \cdot \partial \bar{\Omega} / \partial x^i) / 2; \\ \bar{\Omega} &= c^{ij} \vartheta_i \bar{e}_j, \quad (i, j, k = 1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

и учтя при раскрытии векторных операций в (1) изменение параметров  $b_i^j$  второй квадратичной формы в процессе деформации оболочки, получим нелинейные уравнения ее динамического равновесия.

Для рассмотренных случаев вектор  $\bar{p}$  является силой инерции сложного движения, который находится по формуле  $\bar{p} = -\gamma \bar{a}$ , где  $\gamma$  – плотность материала оболочки,  $h$  – ее толщина,  $\bar{a}$  – абсолютное ускорение ее элемента.

При моделировании эффектов потери устойчивости оболочки используются геометрически нелинейные соотношения теории оболочек и последовательно рассматриваются два ее состояния [10]. Сначала выделяется состояние простого вращения оболочки с угловой скоростью  $\omega$  и подсчитываются функ-

ции, которые определяют поля ее напряжений и деформаций, возникающие от вращения и действия осевой силы. Потом нелинейные уравнения движения линеаризуются в окрестности этого состояния, и с их помощью исследуется устойчивость оболочки.

В общем случае контравариантные компоненты векторов ускорений подсчитываются по формулам [11]

$$\begin{aligned}
 a_e^1 &= -\omega^2 r \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} - \omega^2 u_1 \sin^2 \varphi / a_{11} + \omega^2 u_3 \sin \varphi \cos \varphi / \sqrt{a_{11}} ; \\
 a_e^2 &= -\omega^2 u_2 / a_{22} ; \\
 a_e^3 &= \omega^2 r \cos \varphi + \omega^2 (u_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11}} - u_3 \cos \varphi) \cos \varphi ; \\
 a_c^1 &= -2\omega \ddot{u}_2 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}} ; \\
 a_c^2 &= 2\omega \dot{u}_1 \sin \varphi / \sqrt{a_{11} a_{22}} - 2\omega \ddot{u}_3 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}} ; \\
 a_c^3 &= 2\omega \dot{u}_2 \cos \varphi / \sqrt{a_{22}} ; \\
 a_r^1 &= \ddot{u}_1 / a_{11} ; \quad a_r^2 = \ddot{u}_2 / a_{22} ; \quad a_r^3 = \ddot{u}_3 .
 \end{aligned} \tag{4}$$

Особенность этих соотношений заключается в том, что они включают кориолисовы ускорения, с которыми связаны гироскопические силы инерции.

В данной работе изучаются критические состояния простого вращения оболочки, которые реализованы по наименее энергоемкой форме деформирования. Будем аппроксимировать искомые функции первыми гармониками  $\sin(ct + x^2)$ ,  $\cos(ct + x^2)$  по фазовой координатой  $ct + x^2$ , где  $c$  – частота свободных колебаний [8, 9]. Тогда с учетом этого упрощения из (1) – (4) можно получить уравнение свободных колебаний

$$\begin{aligned}
 dT^{(11)} / dx^1 - T^{(12)} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2)T^{(11)} + \Gamma_{22}^1 T^{(22)} - b_1^1 T^{(13)} - \\
 - \omega^2 \Delta \vartheta_{(1)} r / a_{11} - c^2 u_{(1)} / a_{11} = 0 ; \\
 dT^{(12)} / dx^1 + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(12)} - b_2^2 T^{(23)} - \\
 - \mathcal{M}[-\omega^2 \vartheta_{(2)} r / a_{22} - 2\omega c u_{(3)} / \sqrt{a_{22}} - c^2 u_{(2)} / a_{22} - \omega^2 u_{(2)} / a_{22}] = 0 ; \\
 dT^{(13)} / dx^1 - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(13)} + b_{11} \Delta T^{(11)} - \mu_{(11)} T_0^{(11)} + b_{(22)} T^{(22)} - \\
 - \mu_{(22)} T_0^{(22)} - \mathcal{M}[-2\omega c u_{(2)} / \sqrt{a_{22}} - \omega^2 u_{(3)} - c^2 u_{(3)}] = 0 .
 \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что свободные колебания, которые описываются этой системой, имеют вид гармонической волны, бегущей в окружном направлении с угловой скоростью  $c$ . Причем, если при  $\omega = 0$  каждая из частот  $c$  является двукратной и волны оказываются стоячими, то при  $\omega \neq 0$  кратные частоты расщепляются на две и их моды начинают прецессировать в разных направлениях. Отрицательной частоте  $c$  отвечает прецессия в направлении вращения оболочки (прямая регулярная прецессия); положительной частоте  $c$  – прецессия в обратном направлении (обратная регулярная прецессия).

**Методика исследования.** Частные решения системы обыкновенных однородных линейных дифференциальных уравнений восьмого порядка относительно функций  $u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}, \vartheta_{(1)}, \varepsilon_{(11)}, \varepsilon_{(12)}, \mu_{(11)}, T^{(13)}$  с независимой переменной  $x^1$  дифференциальных уравнений (5) строятся методом начальных параметров.

В общем виде система уравнений (5) может быть представлена в форме

$$d\vec{y}/dx = A_1(x)\vec{y}. \quad (6)$$

Здесь  $\vec{y} = \vec{y}(x)$  – искомая вектор-функция размера  $8 \times 1$

$$\vec{y} = (u_{(1)}, u_{(3)}, \vartheta_{(1)}, \varepsilon_{(11)}, \mu_{(11)}, T^{(13)}, u_{(2)}, \varepsilon_{(12)})^T, \quad (7)$$

$x \equiv x^1$  – независимая переменная, изменяющаяся в пределах  $0 \leq x \leq L$ ,  $A_1(x)$  – матрица коэффициентов восьмого порядка, обусловленная уравнениями теории оболочек и соотношениями, которые задают коэффициенты первой и второй квадратичных форм.

Решение системы (6) должно удовлетворять краевым условиям

$$B\vec{y}(0) = 0, \quad D\vec{y}(l) = 0, \quad (8)$$

где постоянные матрицы  $B$  и  $D$  имеют размеры  $4 \times 8$ .

Вектор-функция  $\vec{y}(x)$  строится в форме общего решения  $Y(x)\vec{C}$  однородного уравнения, где  $Y(x)$  – фундаментальная матрица решений. Вектор  $\vec{C}$  находится из условий (8).

Задача о статической устойчивости вращающейся оболочки решается на основе уравнений (6) путем определения бифуркационных значений  $\omega$  ( $c = 0$ ), при которых эта система имеет нетривиальные решения. Они отвечают вырождению определителя матрицы системы алгебраических уравнений, вытекающей из условий (8), и являются критическими.

**Результаты исследований.** С помощью разработанной методики выполнен анализ статической потери устойчивости цилиндрических оболочек при простом вращении.

Были рассмотрены оболочки радиуса  $R = 0,05$  м, длины  $l = 2$  м, 1 м и 0,5 м. Толщина оболочки составляла  $h = 10^{-3}$  м, модуль упругости материала  $E = 2,1 \times 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Сравнительно большое отношение длины оболочки к ее диаметру позволило исследовать ее устойчивость с помощью двух математических моделей – теории балок и теории оболочек, которая описана выше. Сначала рассматривалась статическая устойчивость вращающихся оболочек, предварительно напряженных продольно распределенными следящими силами, которые сжимают или растягивают ее в осевом направлении. Критические значения угловых скоростей вращения оболочки при разных значениях этих сил приведен-

ные в таблице.

Приведенные данные позволяют сделать вывод о том, что найденные для оболочек критические значения угловой скорости оказались несколько меньше соответствующих значений, подсчитанных по теории балок ( $l = 1, l = 0,5$ ), и немного больше соответствующих значений для случая  $l = 2$ .

Критические значения угловых скоростей вращения оболочек  
при разных значениях следящих сил

Тип теории	$l, \text{ м}$	$N = 0,$ $H$	$N = -10^4,$ $H$	$N = 10^4,$ $H$	$N = -10^5,$ $H$	$N = 10^5,$ $H$
Теория оболочек	$l = 2$	$162,17 \text{ с}^{-1}$	$164,79 \text{ с}^{-1}$	$159,62 \text{ с}^{-1}$	$192,32 \text{ с}^{-1}$	$139,71 \text{ с}^{-1}$
	$l = 1$	$639,01 \text{ с}^{-1}$	$641,48 \text{ с}^{-1}$	$636,56 \text{ с}^{-1}$	$664,63 \text{ с}^{-1}$	$615,36 \text{ с}^{-1}$
	$l = 0,5$	$2462,51 \text{ с}^{-1}$	$2464,59 \text{ с}^{-1}$	$2460,93 \text{ с}^{-1}$	$2481,41 \text{ с}^{-1}$	$2444,80 \text{ с}^{-1}$
Теория балок	$l = 2$	$161,26 \text{ с}^{-1}$	$164,01 \text{ с}^{-1}$	$158,58 \text{ с}^{-1}$	$192,34 \text{ с}^{-1}$	$137,14 \text{ с}^{-1}$
	$l = 1$	$645,04 \text{ с}^{-1}$	$647,77 \text{ с}^{-1}$	$642,34 \text{ с}^{-1}$	$673,07 \text{ с}^{-1}$	$618,72 \text{ с}^{-1}$
	$l = 0,5$	$2580,18 \text{ с}^{-1}$	$2582,90 \text{ с}^{-1}$	$2577,47 \text{ с}^{-1}$	$2607,54 \text{ с}^{-1}$	$2553,24 \text{ с}^{-1}$

Динамическая потеря устойчивости упругой системы при действии следящих сил сопровождается ее переходом в режим колебаний с увеличивающейся амплитудой. В этом случае частоты ее собственных колебаний становятся комплексными. Мнимые части этих значений соответствуют частоте колебательной потере устойчивости, а действительные части – скорости увеличения амплитуды. Поэтому в критических состояниях частоты собственных колебаний перестают быть чисто мнимыми. В этом случае на графике зависимости частот от осевой силы  $T$  кривые первой и второй частот соединяются. Этот факт является критерием наступления динамической неустойчивости системы [5].

С помощью изложенного подхода с применением моделей трубчатых балок и цилиндрических оболочек выполнен анализ динамического поведения тонкостенных вращающихся консольных труб при разных значениях угловой скорости  $\omega$ .

На рис. 2,а показаны подсчитанные по теории оболочек зависимости первой и второй собственных частот  $c_1, c_2$  от значения следящей силы  $T$  при разных значениях угловой скорости  $\omega$ . Сплошные линии соответствуют случаю  $\omega = 0$ . При этом  $c_1^+ = -c_1^-$ ,  $c_2^+ = -c_2^-$  и кривые оказались симметричными относительно прямой  $c = 0$ . Это свидетельствует о том, что собственные частоты невращающейся оболочки кратны. Поскольку эти кривые не пересекают ось абсцисс, квазистатическая потеря устойчивости в исследуемом диапазоне изменения  $T$  не наступает. Однако в связи с тем, что далее кривые первой и второй частот сливаются, можно сделать вывод, что в точке их соединения (при  $T_{кр} = -3,96 \cdot 10^5 \text{ Н}$ ) наступает динамическая потеря устойчивости.

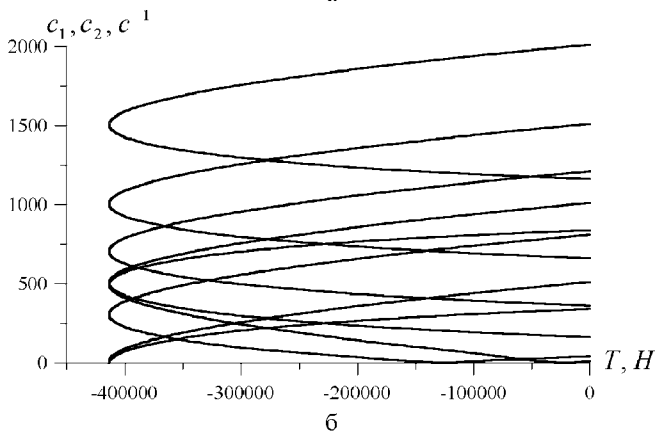
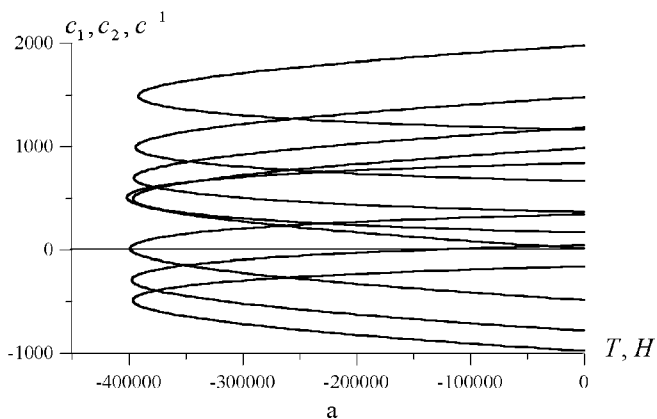


Рисунок 2 – Зависимости первой и второй собственных частот  $c_1, c_2$  от значения следящей силы  $T$  при разных значениях  $\omega$  —  $\omega = 0 \text{ с}^{-1}$ ; —  $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$ ; —  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$ ; · · ·  $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ .

С увеличением угловой скорости вращения  $\omega$  зависимости  $c_i(T)$  теряют симметрию относительно оси абсцисс, поскольку кратные частоты расщепляются. Для этого случая кривые, расположенные ниже прямой  $c = 0$ , соответствуют прямой прецессии, кривые, проходящие выше этой оси – обратной прецессии. Пунктирные линии соответствуют  $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$ , штрихпунктирные –  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$ , точками обозначены кривые, соответствующие случаю  $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ . При  $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$  кривая пересекает ось абсцисс при значении  $T = -119000 \text{ Н}$ . Это состояние соответствует квазистатической потере устойчивости трубы. С увеличением угловой скорости  $\omega$  растет и значение критической силы  $T'$ , при которой наступает квазистатическая потеря устойчивости. Так, при  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$  динамическая и квазистатическая потери устойчивости

наступают практически при одинаковом значении следящей продольной силы  $T_{кр} = -3,99 \cdot 10^5 H$ .

На рис. 2, б показаны зависимости первой и второй собственных частот  $c_1, c_2$  от значения следящей силы  $T$ , подсчитанные по теории балок при значениях угловой скорости  $\omega$ , указанных выше. Расчеты показали, что найденные по теории балок величины следящей силы  $T_{кр} = -4,13 \cdot 10^5 H$ , при которых наступает динамическая потеря устойчивости, не зависят от значений  $\omega$ . В тоже время эти значения следящей силы  $T$ , подсчитанные на основе теории цилиндрических оболочек, отличаются, хотя и незначительно, друг от друга (рис. 2, а).

Аналогичные исследования были выполнены для валов с другими длинами  $L$ . Как показали расчеты, с увеличением  $L$  разница между значениями  $T_{кр}$ , найденных по теориям балок и оболочек, становится менее заметной, с уменьшением  $L$  реализуется обратный эффект.

**Выводы.** Полученные результаты свидетельствуют, что если на тонкостенный вращающийся вал действует продольная сжимающая следящая сила, то в зависимости от соотношения между величинами угловой скорости вращения и продольной нагрузки может быть реализовано как квазистатическая, так и динамическая потери устойчивости. Для сравнительно длинных трубчатых стержней значения критических нагрузок незначительно зависят от выбора модели стержней или теории тонких оболочек, с уменьшением длины расхождение между этими расчетными величинами становится более заметным.

**Список литературы:** 1. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 319 с. 2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с. 3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с. 4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с. 5. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с. 6. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с. 7. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Lugovyy P.Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation. // J. Sound and Vibrat. – 2001. – V. 246., № 3. – P. 491-504. 8. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Critical states of thin ellipsoidal shells in simple and compound rotations. // J. Sound and Vibrat. – 2004. – Vol. 270. – P. 323-339. 9. Gulyayev V.I., Solovjov I.L., Belova M.A. Interconnection of critical states of parabolic shells in simple and compound rotations with values of their natural precession vibration frequencies. // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 3565-3583. 10. Sivadas K.R. Vibration analysis of prestressed rotating thick circular conical shell // J. Sound and Vibrat. – 1995. – V. 186. №1. – P. 99–109. 11. Соловьев И.Л. О вращении жестких и упругих цилиндрических оболочек, упруго связанных с основанием // Прикладная механика. – 2006. – Т.42, № 7. – С. 107–115.

Поступила в редколлегию 06.04.2007.