

чальных параметров и гармонической линеаризации вместе с идеей построения скелетных кривых.

2. Определены критические скорости одно- и двухступенчатого ротора компрессора дизеля 6ТД-2 с различными конструкциями опор.

3. Установлено, что учет нелинейного характера опор приводит к увеличению значений критических скоростей.

4. Результаты исследований являются перспективной основой создания более совершенных конструкций компрессора.

**Список литературы:** 1. Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. – М.: Машиностроение, 1977. – 306 с. 2. Рагульский К.М., Ионошас Рем.Д., Бакиш А.К. Вибрации роторных систем. – Вильнюс: Моклас, 1976. – 242 с. 3. Диментбег Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 248 с. 4. Кемтнер М.Л. Методы динамических податливостей и жесткостей для расчета изгибных колебаний упругих систем со многими степенями свободы. – В кн.: Поперечные колебания и критические скорости. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 364 с. 5. Латта М.И. Гибкие роторы судовых турбин. – Л.: Судостроение, 1969. – 286 с. 6. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с. 7. Ивович В.А. Переходные матрицы в динамике упругих систем. – М.: Машиностроение, 1969. – 200 с. 8. Вульфсон И.И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 284 с. 9. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем. – М.: Наука, 1966. – 317 с. 10. Определение надежности и ресурса динамически нагруженных приводов турбопоршневого двигателя: Отчет о НИР (заключит.) / Харьков. политехн. ин-т им В.И. Ленина; Инв. № ДПМ-Ш-72-34. – Харьков, 1972. – 162 с. 11. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. – Л.: Машиностроение, 1968. – 272 с.

*Поступила в редакцию 15.06.2007*

УДК 539.3

**Б.Ф.ЗАЙЦЕВ**, докт.техн.наук; **Н.Г.ШУЛЬЖЕНКО**, докт.техн.наук;  
**А.В.АСАЕНКО**; ИПМаш НАН Украины, Харьков

## **МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕЩИН С КОНТАКТИРУЮЩИМИ БЕРЕГАМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Запропоновано методику розрахунку напружено-деформованого стану тіл з тріщинами, в якій враховано контактування берегів тріщини в напрямку нормалі. Наведено приклад розрахунку деформацій вала з тріщиною під дією власної ваги при різних куткових положеннях вала.

A technique for calculation of state of stress and strain of cracked bodies taking into account cracks sides contacts in normal direction is proposed. An example of calculation of strains of a cracked shaft under body weight at various shaft angle positions is presented.

**Введение.** Учет контактирования берегов трещин в конструкциях существенно влияет на коэффициенты интенсивности напряжений, применяемые в

оценках прочности, а также на жесткостные характеристики, используемые для установления вибродиагностических признаков наличия трещин. Очевидно, что существенное влияние контактирования берегов на эти характеристики проявляется для развитых трещин.

В большинстве работ для установления вибродиагностических признаков наличия трещины в элементах машин учитывается ее «дыхание» [1–4]. При моделировании контактирования берегов трещин принимаются упрощения по оценке зон контакта [1, 2] либо по определению жесткости элементов с трещиной [3]. В трехмерных моделях при решении этих задач используются, в основном, метод конечных элементов [5, 6]. Конечноэлементная модель для тела с трещиной определяется системой уравнений

$$[K] u = f, \quad (1)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости для тела с трещиной.

Учет контактирования берегов трещин приводит к переменной матрице жесткости  $[K]$ . При решении задачи возникает необходимость обращения матрицы  $[K]$  на каждом шаге уточнения зоны контакта, что является трудоемким процессом.

В данной работе излагается разработанная более экономичная методика учета контактирования берегов трещины в трехмерной постановке на основе использования метода конечных элементов. В качестве примера описывается ее применение для цилиндрического элемента (медленно вращающегося вала) с центральной трещиной.

**Методы и алгоритмы.** Моделирование трещин в элементах конструкции лопасти выполняется способом, прошедшим апробацию при решении практических задач, ориентированным на трехмерный МКЭ с регулярной дискретизацией и полилинейными аппроксимациями перемещений на элементах [7, 8]. Схема введения трещин путем трансформации сетки представлена на рис. 1.

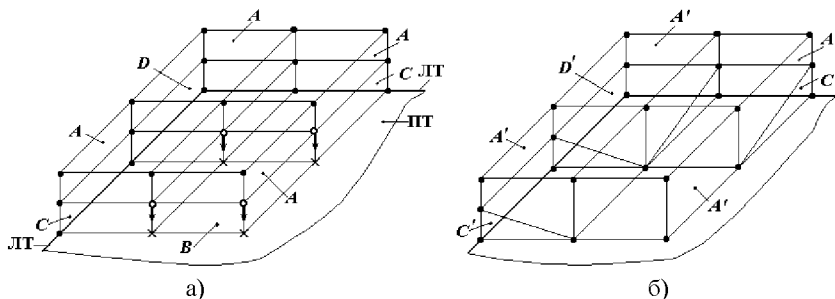


Рисунок 1 – Схема трансформации сетки при введении трещины:  
а – исходная регулярная сетка без трещины; б – полученная нерегулярная сетка с трещиной; о – узлы  $S$ ; х – узлы  $Q$

Вдоль плоскости трещины (ПТ), ограниченной линией трещины (ЛТ), вводятся два ряда элементов типа  $A, B, C, D$  с каждой из сторон ПТ. Узлы  $Q$  исключаются из рассмотрения, а соответствующие переменные не учитываются в матрицах жесткости. Уравнения, отвечающие узлам  $Q$ , имеют отличные от нуля диагональные элементы (остальные равны нулю). Равны нулю элементы и в других уравнениях, относящиеся к переменным узлов  $Q$ . Узлы  $S$  сдвигаются к трещине, образуя слой двойных узлов. В результате трансформации сетки элементы  $B$  фактически исчезают из рассмотрения, элементы  $A$  трансформируются, изменяя положение части узлов, а элементы  $C$  и  $D$  вырождаются в другие типы объемных фигур.

Формирование матриц жесткости или масс элементов  $A$  осуществляется при изменении ряда координат, а элементов  $B$  – при обособлении узлов  $Q$  путем диагонализации матриц относительно указанных узлов. Матрицу жесткости элемента  $B$  можно записать с использованием диадной формы представления тензоров (матриц) в виде  $[K_B] = N \cdot \sum_j i_j i_j$ , где  $i_j$  – вектор, у которого

только  $j$ -я компонента отлична от нуля и равна единице;  $j$  – индекс, указывающий на узлы  $Q$  и компоненты перемещений в этих узлах;  $N$  – большое произвольное число.

Функции формы элементов  $C, D$  получаются из функций формы шестигранника за счет сближения узлов  $S$  и  $Q$  и приравнивания соответствующих переменных в этих узлах. Матрица жесткости элемента  $C$  может быть записана в соответствии с указанными свойствами

$$[K_C] = [A]^T \cdot [K_C] \cdot [A] + N \cdot \sum_j i_j i_j,$$

где  $[K_C]$  – матрица жесткости шестигранника со смещенными узлами;  $[A] = E - \sum_j i_j i_j + \sum_{j,k} i_j i_k$  – матрица преобразования;  $E = \sum_s i_s i_s$  – единичная

матрица;  $k$  – индекс, указывающий на узлы  $S$  и компоненты перемещений в этих узлах (индексы  $j$  и  $k$  согласовываются между собой);

Для элемента  $D'$  формулы преобразования аналогичны  $C'$  с иной матрицей преобразований.

Применение изложенного подхода позволяет рассматривать в конструкции произвольное число отстоящих друг от друга трещин и обеспечивает оперативность изменения информации о трещинах, что существенно при вариантных исследованиях. В более общих случаях ПТ является составной, образуя двугранные углы, а варианты вырождения конечных элементов (КЭ) являются более разнообразными. Создана база данных вырожденных КЭ, позволяющая охватить основные практически важные случаи формы трещин. Метод применяется к уже сформированной или формируемой матрице жесткости конструкции.

Учет контактных явлений между берегами трещины приводит к пере-

менной матрице  $[K]$  и делает задачу нелинейной, решение которой обычно сводится к последовательности линейных задач вида (1). Из-за большой размерности матрицы  $[K]$  в трехмерных задачах объем вычислений становится значительным. В связи с этим обычно используемая прямая процедура определения зон контакта становится малоэффективной.

Избежать обращения переменной матрицы жесткости можно с помощью излагаемой ниже методики, построенной на вычислениях для полностью открытой трещины, то есть для фиксированной матрицы жесткости.

Согласно изложенному выше способу определяется поверхность трещины ПТ с линией трещины ЛТ, на которой расположены двойные узлы (рис. 2).

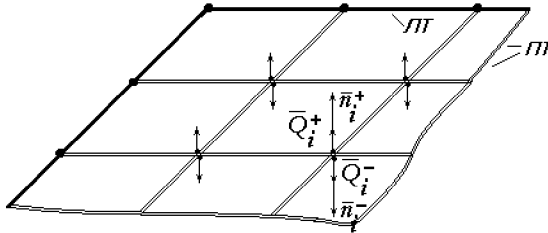


Рисунок 2 – Формирование нагружения (диполей) на берегах трещины

Кроме заданной системы внешних сил, определяемых вектором узловых сил  $\bar{P}$ , вводится система единичных диполей, то есть пар единичных противоположно направленных сил  $\bar{Q}\{\bar{Q}^+, \bar{Q}^-\}$ , приложенных в двойных узлах и направленных по нормали к ПТ. Для  $i$ -го двойного узла  $\bar{Q}_i^+$  приложена к узлу, лежащему на поверхности трещины с нормалью  $\bar{n}_i^+$ , а  $\bar{Q}_i^-$  – к узлу поверхности трещины с нормалью  $\bar{n}_i^-$  ( $Q_i^+ = Q_i^- = 1$ );  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – число двойных узлов.

Условия контактирования устанавливаются по скачкам смещений берегов трещины в двойных узлах, для чего вычисляются

– скачок смещений от внешних сил  $\delta_i(\bar{P})$

$$\delta_i(\bar{P}) = u_{mi}^+(\bar{P}) - u_{mi}^-(\bar{P}) = \beta_i,$$

где  $u_{mi}^+(\bar{P}), u_{mi}^-(\bar{P})$  – перемещение в  $i$ -м двойном узле по нормали к ПТ;

– скачок смещений от диполей  $\delta_i(\bar{Q}_k)$

$$\delta_i(\bar{Q}_k) = u_{mi}^+(\bar{Q}_k) - u_{mi}^-(\bar{Q}_k) = \alpha_{ik},$$

где  $u_{mi}^+(\bar{Q}_k), u_{mi}^-(\bar{Q}_k)$  – перемещение в  $i$ -м двойном узле по нормали к ПТ от диполя  $\bar{Q}_k$  в  $k$ -м двойном узле.

Применение методики требует предварительного вычисления  $\alpha_{ik}$ , что эквивалентно решению одной линейной задачи с несколькими правыми частями.

Поверхность трещины состоит из зоны контакта берегов и зоны их раскрытия, при этом в зоне контакта развиваются контактные силы, представляемые через отличные от нуля диполи  $Q_i, \bar{Q}_i$ , где  $\bar{Q}_i$  – «амплитуда»  $i$ -го диполя, а в зоне раскрытия на свободных поверхностях силы (диполи) отсутствуют. Указанные физические условия записываются через полный скачок смещений  $\delta_i(\bar{P}, \bar{Q})$  в двойных узлах в следующем виде

$$\delta_i = \begin{cases} 0 - \text{зона контакта } (Q_i > 0), \\ \beta_i + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \cdot Q_k > 0 - \text{зона раскрытия } (Q_i = 0). \end{cases} \quad (2)$$

В случае полного контакта по всей ПТ можно составить систему уравнений, отражающую совместность перемещений точек берегов трещины

$$[A] \cdot Q = B, \quad (3)$$

где  $[A]$  – квадратная симметричная положительно определенная матрица, составленная из  $\alpha_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n$ );  $Q$  – вектор «амплитуд» диполей;  $B$  – вектор, составленный из  $\beta_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Система уравнений (3) может быть использована и для общего случая, когда часть компонент вектора  $Q$  заведомо равна нулю в области раскрытия.

Решение контактной задачи для тела с трещиной (трещинами) будет достигнуто, если будет определена зона контакта (группа двойных узлов), где  $Q_i > 0$ , и зона раскрытия трещины, где  $Q_i = 0$ , то есть одновременно будут удовлетворены условия (2). Очевидно, что процесс решения контактной задачи должен быть итерационным. Для оценки сходимости процесса вводится для удобства вектор признаков  $\bar{p}$ , причем компоненты его  $p_i = 0$  в зоне раскрытия и  $p_i = 1$  в зоне контакта. Сходимость процесса поиска зоны контакта достигается, если вектор  $\bar{p}$  на смежных итерациях не меняется. Схема итерационного решения задачи определения зоны контакта берегов трещины (вектор  $\bar{p}$ ), а также нагружения берегов (вектор  $Q$ ) представлена на рис. 3.

При решении задачи на  $i$ -м шаге, для которого известен вектор  $\bar{p}$  и, соответственно, зона раскрытия, система (3) модифицируется согласно схеме и при этом обеспечивается отсутствие нагрузок в зоне раскрытия. Исключение известных компонент  $Q_i = 0$ , соответствующих  $p_i = 0$ , не производится, размерность и свойства матрицы  $[A]$  сохраняются. Для решения системы (3) применяется эффективный метод квадратных корней. После этого формируется новый вектор  $\bar{p}$ , причем координаты его изменяются в зависимости от знака усилий в зоне контакта (физически реализуемым является только сжатие) и знака полного скачка нормальных смещений в зоне раскрытия.

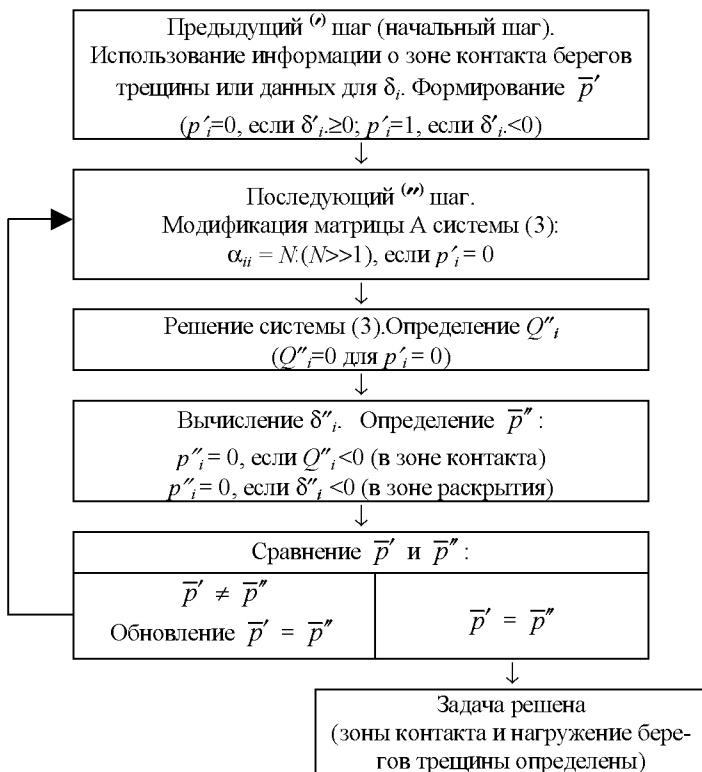


Рисунок 3 – Схема итерационного решения задачи определения зоны контакта и нагружения берегов трещины

**Пример расчета.** Эффективность методики оценивалась на примере решения задачи расчета трехмерного НДС вала с центральной трещиной под действием собственного веса при его медленном вращении (квазистатическая постановка). Схема вала представлена на рис. 4, а, трещина занимает половину сечения вала; радиус вала 24 см, длина 144 см, а конечноэлементная дискретизация по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  составила  $8 \times 8 \times 64$ .

Результаты расчетов областей контакта берегов трещины для различных угловых положений вала (угла  $\varphi$ ) представлены на рис. 4, б, причем можно отметить физичность картины изменения зоны контакта.

Характеристикой нелинейного изменения жесткости вала при различных его положениях могут служить перемещения геометрического центра вала. Изменение перемещений центра вала при его повороте приведены на рис. 5. Из результатов следует, что кроме основного вертикального смещения  $u_x$ , возникают смещения  $u_y$ ,  $u_z$ , то есть перемещения становятся связанными, а приближенное соотношение их максимальных величин – 25:5:1.

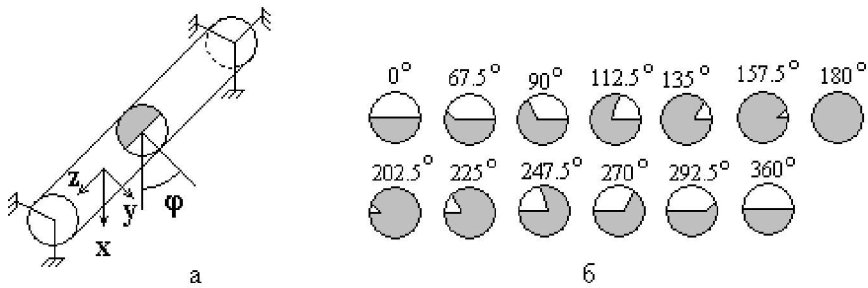


Рисунок 4 – Схема вала с трещиной (а) и зоны контакта берегов трещины для различных положений вала (б)

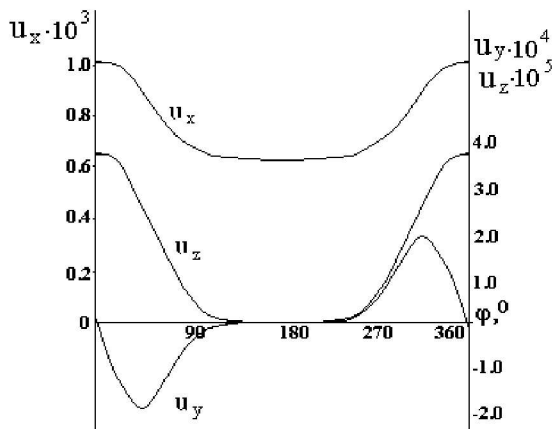


Рисунок 5 – Перемещения (см) в середине вала

Полученные результаты могут использоваться для оценки точности и определения параметров применяемых стержневых моделей роторов турбомашин с трещинами.

**Выводы.** Предложена методика расчета НДС тел с трещинами нормального отрыва с контактирующими берегами. При этом используется трехмерный МКЭ и методика введения разрезов, основанная на трансформации конечноэлементной сетки с введением двойных узлов и преобразованиях матриц жесткости конечных элементов, а также итерационный алгоритм определения зон контакта берегов трещины.

Для вычислений с использованием постоянной матрицей жесткости дополнительно введена система нагрузок в виде диполей – пар противоположно направленных сил в двойных узлах для тела с полностью открытой трещиной. Определение зоны контакта сведено к последовательности решений системы

уравнений небольшого порядка, равному числу двойных узлов. Эффективность методики может быть существенной при решении последовательности контактных задач, характерных для динамических расчетов.

Применение методики показано при решении задачи о деформировании вала с трещиной под действием веса при его медленном вращении.

**Список литературы:** 1. *Грабовски Б.* Вибрационные свойства ротора турбины с поперечной трещиной // Конструирование и технология машиностроения. – 1980. – № 1. – С. 98-104. 2. *Шульженко Н.Г.* Влияние излома упругой оси ротора с поперечной трещиной на его вибрационные характеристики / *Н.Г.Шульженко, Г.Б.Овчарова* // Проблемы прочности. – 1997. – № 4. – С. 82-89. 3. *Bachschmid N.* Cracks in rotating shafts: experimental behaviour, modelling and identification // SURVEILLAN 5 CETIM, Senlis (2004). 4. *Матвеев В.В.* К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях / *В.В.Матвеев, А.П.Бовсуновский* // Проблемы прочности. – 2000. – № 3. – С. 5-23. 5. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. *С.Атлури*. – М.: Мир, 1990. – 392 с. 6. *Сиратори М.* Вычислительная механика разрушения / *М.Сиратори, Т.Миеси, Х.Маусита*. – М.: Мир, 1986. – 334 с. 7. Асаенок А.В. Трехмерное моделирование деформаций и вопросы прочности объемных элементов поворотлопастных гидротурбин / *А.В. Асаенок, Б.Ф. Зайцев* // Вестник науки и техники. – Харьков: Харьк. дом науки и техники, 1997. – Вып. 1. – С. 10-18. 8. *Асаенок А.В.* Методика введения разрезов в схеме метода конечных элементов в задачах статики и собственных колебаний трехмерных конструкций / *А.В.Асаенок, Б.Ф.Зайцев, Н.Г.Шульженко* // Проблемы машиностроения. – 2003. – 6, № 3. – С. 58-63.

*Поступила в редколлегию 19.07.2007*

УДК 539.3

***Р.Е.КОЧУРОВ; К.В.АВРАМОВ***, докт. техн. наук; ***И.Д.БРЕСЛАВСКИЙ***,  
НТУ «ХПИ»

## **К ПРОЩЕЛКИВАНИЮ ПОЛОГИХ АРОК**

У роботі проведено чисельне моделювання динамічної поведінки положистої арки в процесі прощиглення. Для моделювання використовувався метод сіток та процедура чисельного інтегрування.

The snap-through motions of shallow arch are simulated in this paper. Net method and direct numerical integrations are used to study snap-through motions.

**1. Состояние и актуальность темы.** Пологие арки используются в строительстве, машиностроении, аэрокосмической технике как составные части более сложных конструкций. Арки часто используются в электромеханических системах. Пологие арки могут использоваться как элемент, изолирующий от вибраций, и как гаситель колебаний [1, 2, 3].

Много усилий было предпринято для исследования статики и динамики