

*В.А. КОНОНЕНКО*, канд. техн. наук (г. Харьков)

## **ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА – ГАМИЛЬТОНА, ВЫЧИСЛЯЕМЫХ РЕВЕРСИВНЫМ МЕТОДОМ**

У статті наведені метод і результати порівняння точності двох алгоритмів інтегрування в бортовому обчислювачі параметрів Родріга – Гамільтона. Показано, що інтегрування за допомогою реверсивного алгоритму має похибку, пропорційну  $h^5$ , де  $h$  – такт знімання інформації з датчиків.

The article presents a method and results of comparison of two integration algorithms of Rodrig – Hamilton parameters in an on-board computer. It is shown that a miscalculation of the integration with the help of a reversible algorithm is proportionate to  $h^5$ , where  $h$  is a time step of a pickup of information from sensors.

**Введение.** Системы навигации, которые в настоящее время устанавливаются на многие транспортные средства, должны обеспечивать определение линейных координат текущего положения центра масс изделия на местности и угловой ориентации корпуса в пространстве. Наиболее полно в достижении указанных целей зарекомендовали себя комплексные навигационные системы, в состав которых входят элементы автономных навигационных систем (АНС) и спутниковых навигационных систем [1, 2]. В настоящей работе рассматриваются отдельные вопросы, связанные с разработкой АНС, в частности, определение угловой ориентации корпуса транспортной машины, что является обязательной составляющей навигационной системы.

С целью определения угловой ориентации корпуса машины могут использоваться инерциальные навигационные системы (ИНС) на гиросtabilизированных платформах или трехстепенные гироскопические системы курсокреноуказания [3], измеряющие три угловых составляющие ориентации машины в пространстве. Эти системы, обеспечивая высокую точность измерения углов, имеют высокую стоимость и значительные габаритные размеры.

Интенсивное развитие микропроцессорной техники и неуклонное снижение ее стоимости позволило использовать принципы бесплатформенных инерциальных систем (БИС), в которых угловая ориентация транспортного средства не измеряется дорогостоящими высокочувствительными гироскопическими датчиками углов, а вычисляются в бортовом вычислительном устройстве по выходной информации относительно недорогих и высоконадежных датчиков угловой скорости (ДУС).

Определение угловой ориентации машины по сигналам с ДУС наиболее рационально производить путем численного интегрирования в бортовом вычислителе кинематических уравнений связи вектора угловой скорости вращения объекта  $\overline{\omega}_c$  с производными от параметров ориентации представленными в виде параметров Родрига – Гамильтона [4–6]. Точность интегрирования этих кинематических уравнений в значительной мере определяет точность ориентации объекта. В работе [7] и других предложен ряд методов интегрирования кинематических уравнений параметров Родрига – Гамильтона, произведена оценка точности интегрирования. Точность реверсивного метода интегрирования параметров Родрига – Гамильтона, предлагаемого в работе [6], не оценена.

**Цель работы.** Провести сравнительную оценку точности интегрирования параметров Родрига – Гамильтона реверсивным методом относительно метода интегрирования, точность которого известна.

**Изложение основного материала.** В общем случае угловая ориентация твердого тела относительно инерциальной системы координат, выраженная через параметры Родрига – Гамильтона

$$\Lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T, \quad (1)$$

где T – символ транспонирования, может быть получена [4, 5] путем численного интегрирования в бортовом вычислителе кинематических уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= -\frac{1}{2}(\omega_{cx}\lambda_1 + \omega_{cy}\lambda_2 + \omega_{cz}\lambda_3), \\ \dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{2}(\omega_{cx}\lambda_0 + \omega_{cz}\lambda_2 - \omega_{cy}\lambda_3), \\ \dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2}(\omega_{cy}\lambda_0 + \omega_{cx}\lambda_3 - \omega_{cz}\lambda_1), \\ \dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2}(\omega_{cz}\lambda_0 + \omega_{cy}\lambda_1 - \omega_{cx}\lambda_2) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\overline{\omega}_c = [\omega_{cx}, \omega_{cy}, \omega_{cz}]^T$  – вектор угловой скорости объекта в проекциях на связанные с ним оси координат.

Уравнения (2) могут быть представлены в виде

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \Phi(\omega) \cdot \Lambda, \quad (3)$$

где  $\Phi(\omega)$  – кососимметрическая ( $4 \times 4$ ) матрица, которая ставится в соответствие вектору  $\overline{\omega}_c$ :

$$\Phi(\omega) = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{cx} & -\omega_{cy} & -\omega_{cz} \\ \omega_{cx} & 0 & \omega_{cz} & -\omega_{cy} \\ \omega_{cy} & -\omega_{cz} & 0 & \omega_{cx} \\ \omega_{cz} & \omega_{cy} & -\omega_{cx} & 0 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Принимаем, что с ДУС поступают сигналы в дискретные промежутки времени  $h$  в форме приращения вектора угла кажущегося поворота. Представим совокупность сигналов измерителей угловой скорости на  $(n+1)$  такте съема в виде вектора

$$\overline{\Theta}(n+1) = \left[ \theta_x(n+1), \theta_y(n+1), \theta_z(n+1) \right] = \int_{nh}^{(n+1)h} \overline{\omega}_c dt.$$

В работе [7] предлагается интегрировать уравнения (2) с шагом  $H = 2sh, s = 1, 2, \dots$ , приняв начало очередного шага интегрирования за начальный момент  $t_0$  и считая  $\Lambda(t_0) = \Lambda_0$  известным при  $t_0 \leq t \leq t_0 + h$ , в виде

$$\Lambda(t) = F(t, t_0) \Lambda_0, \quad (5)$$

где ( $4 \times 4$ )-матрица  $F(t, t_0)$  – матрициант уравнения (3):

$$\dot{F}(t, t_0) = \frac{1}{2} \Phi(\omega) F(t, t_0), \quad F(t, t_0) = E_4. \quad (6)$$

Матрициант уравнения (3) представляется в виде

$$\begin{aligned} F(t, t_0) &= f_0(t) E_4 + \Phi(\vec{f}(t)), \quad \vec{f} = [f_1, f_2, f_3]^T; \\ f_0(t_0) &= 1, \quad \vec{f}(t_0) = 0; \quad f_0^2 + \vec{f} \cdot \vec{f} = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Автор в работе [7] принимает, что вектор  $\bar{\omega}_c$  на отрезке  $[t_0, t_0 + H]$  допускает аппроксимацию отрезком степенного ряда любой нужной длины, и аппроксимирует вектор  $\bar{f}$  степенным рядом четного порядка  $K$ .

Пусть  $s = 1$ , а порядок степенного ряда  $K = 4$ , тогда алгоритм вычисления вектора  $\bar{f}$  и величины  $f_0$  запишется в виде:

$$\begin{aligned}
 f_1(t_0 + H) &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \|\bar{f}_1\|^2 \right) \cdot (\theta_{x,0} + \theta_{x,1}) + \frac{1}{3} (\theta_{y,0} \cdot \theta_{z,1} - \theta_{y,1} \cdot \theta_{z,0}) \\
 f_2(t_0 + H) &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \|\bar{f}_1\|^2 \right) \cdot (\theta_{y,0} + \theta_{y,1}) + \frac{1}{3} (\theta_{x,0} \cdot \theta_{z,1} - \theta_{x,1} \cdot \theta_{z,0}) \\
 f_3(t_0 + H) &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \|\bar{f}_1\|^2 \right) \cdot (\theta_{z,0} + \theta_{z,1}) + \frac{1}{3} (\theta_{x,0} \cdot \theta_{y,1} - \theta_{x,1} \cdot \theta_{y,0}) \\
 f_0(t_0 + H) &= 1 - \frac{1}{2} \|\bar{f}_1\|^2 - \frac{1}{8} \|\bar{f}_1\|^4,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\|\bar{f}_1\|^2 = (\theta_{x,0} + \theta_{x,1})^2 + (\theta_{y,0} + \theta_{y,1})^2 + (\theta_{z,0} + \theta_{z,1})^2;$$

$$\bar{\Theta}_0 = [\theta_{x,0}, \theta_{y,0}, \theta_{z,1}] = \int_{t^*-h}^{t^*} \bar{\omega}_c dt; \quad \bar{\Theta}_1 = [\theta_{x,1}, \theta_{y,1}, \theta_{z,1}] = \int_{t^*}^{t^*+h} \bar{\omega}_c dt.$$

Определение векторов  $\bar{\Theta}_0$  и  $\bar{\Theta}_1$  иллюстрируется на рисунке 1.

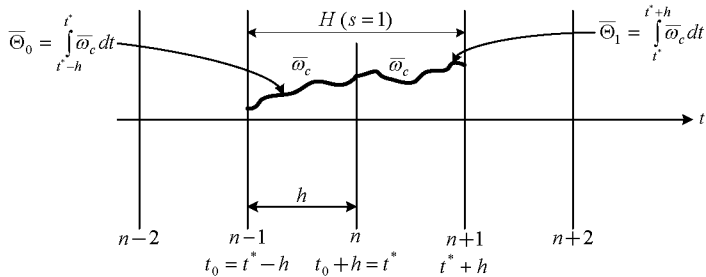


Рисунок 1 – Определение приращения вектора угла кажущегося поворота за шаг  $H = 2h$

Пусть кватернион  $\bar{P}$ , вычисленный в соответствии с разложением в степенной ряд четвертой степени вектора  $\bar{f}$  и функции  $\bar{f}_0$ , имеет компоненты

$$P = [p_0, \bar{P}] = [p_0, p_1, p_2, p_3],$$

которые вычисляются по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} p_0(t_0 + H) &= p_0(t_0) \cdot f_0(t_0 + H) - \bar{p}(t_0) \cdot \bar{f}(t_0 + H); \\ \bar{p}(t_0 + H) &= p_0(t_0) \cdot \bar{f}(t_0 + H) + f_0(t_0 + H) \cdot \bar{p}(t_0) + \bar{p}(t_0) \times \bar{f}(t_0 + H). \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно [7], алгоритм (8), (9) вычисления параметров кватерниона угловой ориентации  $P$  имеет ошибку, пропорциональную величине  $h^5$ . Назовем этот алгоритм как алгоритм разложения матрицианта.

Рассмотрим реверсивный алгоритм интегрирования кинематических уравнений (2).

Обозначим полученный в результате интегрирования этим методом кватернион как

$$M = [\mu_0, \mu_1] = [\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3]. \quad (10)$$

Реверсивный метод интегрирования – метод Гаусса – Зейделя – заключается в следующем. Поскольку бортовой вычислитель должен решать уравнения (2) последовательно, то в правую часть уравнения для вычисления величины  $\mu_j[t_0 + h]$  ( $j = 1, 2, 3$ ) подставляются уже вычисленные на этом шаге значения  $\mu_{j-1}[t_0 + h], \dots, \mu_0[t_0 + h]$ . Далее, предлагается использовать реверсивный метод, когда, допустим, на нечетном шаге работы системы порядок вычисления  $\mu_j[t_0 + h]$  был  $\mu_1[t_0 + h], \dots, \mu_3[t_0 + h], \mu_0[t_0 + h]$ , то на четном шаге порядок вычисления меняется на обратный от  $\mu_3[t_0 + h]$  к  $\mu_0[t_0 + h]$ .

Кроме того, предлагается корректировать величину нормы кватерниона (10), которая нарушается в процессе численного решения разностных уравнений.

Окончательно реверсивный алгоритм расчета параметров ориентации машины имеет следующий вид:

- нечетный шаг работы системы:

$$\begin{aligned}
\mu_1(t_0 + h) &= \mu_1(t_0) + \frac{1}{2}h \left[ \omega_{cx}(t_0 + h) \cdot \mu_0(t_0) + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{cz}(t_0 + h) \cdot \mu_2(t_0) - \omega_{cy}(t_0 + h) \cdot \mu_3(t_0) \right] \\
\mu_2(t_0 + h) &= \mu_2(t_0) + \frac{1}{2}h \left[ \omega_{cx}(t_0 + h) \cdot \mu_3(t_0) + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{cy}(t_0 + h) \cdot \mu_0(t_0) - \omega_{cz}(t_0 + h) \cdot \mu_1(t_0 + h) \right] \\
\mu_3(t_0 + h) &= \mu_3(t_0) + \frac{1}{2}h \left[ \omega_{cy}(t_0 + h) \cdot \mu_1(t_0 + h) + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{cz}(t_0 + h) \cdot \mu_0(t_0) - \omega_{cx}(t_0 + h) \cdot \mu_2(t_0 + h) \right] \\
\mu_0(t_0 + h) &= \sqrt{1 - \mu_1^2(t_0 + h) - \mu_2^2(t_0 + h) - \mu_3^2(t_0 + h)};
\end{aligned} \tag{11}$$

- четный шаг работы системы:

$$\begin{aligned}
\mu_3(t_0 + h) &= \mu_3(t_0) + \frac{1}{2}h \left[ \omega_{cy}(t_0 + h) \cdot \mu_1(t_0) + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{cz}(t_0 + h) \cdot \mu_0(t_0) - \omega_{cx}(t_0 + h) \cdot \mu_2(t_0) \right] \\
\mu_2(t_0 + h) &= \mu_2(t_0) + \frac{1}{2}h \left[ \omega_{cx}(t_0 + h) \cdot \mu_3(t_0 + h) + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{cy}(t_0 + h) \cdot \mu_0(t_0) - \omega_{cz}(t_0 + h) \cdot \mu_1(t_0) \right] \\
\mu_1(t_0 + h) &= \mu_1(t_0) + \frac{1}{2}h \left[ \omega_{cx}(t_0 + h) \cdot \mu_0(t_0) + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{cz}(t_0 + h) \cdot \mu_2(t_0 + h) - \omega_{cy}(t_0 + h) \cdot \mu_3(t_0 + h) \right] \\
\mu_0(t_0 + h) &= \sqrt{1 - \mu_1^2(t_0 + h) - \mu_2^2(t_0 + h) - \mu_3^2(t_0 + h)};
\end{aligned}$$

Сравнительную оценку точности работы алгоритмов (8), (9) и (10) проведем следующим образом. Пусть такт съема информации с ДУС равен  $h = 0,005$  с, проекции вектора угловой скорости  $\overline{\omega}_c$  колебаний корпуса при движении по неровностям трассы зададим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\omega_{cx}(t) &= A_x + B_x t + C_x \sin(2\pi F_x t + \varphi_x); \\
\omega_{cy}(t) &= A_y + B_y t + C_y \sin(2\pi F_y t + \varphi_y); \\
\omega_{cz}(t) &= A_z + B_z t + C_z \sin(2\pi F_z t + \varphi_z),
\end{aligned} \tag{12}$$

где  $\omega_{cx}(t)$ ,  $\omega_{cy}(t)$ ,  $\omega_{cz}(t)$  – проекции вектора угловой скорости соответственно на продольную, поперечную и вертикальную оси связанной с корпусом машины системы координат.

Определим «идеальную» угловую ориентацию машины, интегрируя кинематические уравнения (2) методом Рунге-Кутты с шагом  $h_{\text{и}} = 0,001$  с, используя зависимости для проекций вектора  $\bar{\omega}_c$  (12). Синхронно с этим вычислительным процессом определяем параметры кватернионов  $P$  и  $M$  с помощью алгоритмов (8), (9) и (10). Начальные условия для интегрирования принимаются равными

$$\Lambda(t_{\text{н}}) = P(t_{\text{н}}) = M(t_{\text{н}}) = [1, 0, 0, 0]^T.$$

Точность работы алгоритмов, построенных на основании разложения в ряд матрицанта и реверсивного алгоритма, определяется формулой разности между вычисленными кватернионами  $P(t)$ ,  $M(t)$  и «идеальным» кватернионом  $\Lambda(t)$ .

Пусть кватернионы разности поворотов равны

$$\begin{aligned} \Delta P &= [\Delta p_0, \Delta \bar{p}]^T = [\Delta p_0, \Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_3]^T; \\ \Delta M &= [\Delta \mu_0, \Delta \bar{\mu}]^T = [\Delta \mu_0, \Delta \mu_1, \Delta \mu_2, \Delta \mu_3]^T. \end{aligned}$$

Кватернионы  $\Delta P$  и  $\Delta M$  определяются формулами кватернионного произведения [8]:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \tilde{\Lambda} \circ P = \Delta p_0 + \Delta \bar{p}; \\ \Delta M &= \tilde{\Lambda} \circ M = \Delta \mu_0 + \Delta \bar{\mu}, \end{aligned} \tag{13}$$

где  $\tilde{\Lambda}$  – кватернион, сопряженный с кватернионом  $\Lambda$ ,  $\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \bar{\lambda}$ ; « $\circ$ » – знак кватернионного произведения.

Элементы кватернионов  $\Delta P$  и  $\Delta M$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Delta p_0 &= \lambda_0 p_0 + (\bar{\lambda}, \bar{p}); \\ \Delta \bar{p} &= \lambda_0 \bar{p} - p_0 \bar{\lambda} - (\bar{\lambda} \times \bar{p}); \\ \Delta \mu_0 &= \lambda_0 \mu_0 + (\bar{\lambda}, \bar{\mu}); \\ \Delta \bar{\mu} &= \lambda_0 \bar{\mu} - \mu_0 \bar{\lambda} - (\bar{\lambda} \times \bar{\mu}), \end{aligned} \tag{14}$$

где  $\bar{p}$ ,  $\bar{\mu}$  – векторные части кватернионов  $P$  и  $M$ .

В случае отсутствия ошибок интегрирования кватернионы разности поворотов имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta P &= [1, 0, 0, 0]^T; \\ \Delta M &= [1, 0, 0, 0]^T,\end{aligned}$$

следовательно, элементы этих кватернионов характеризуют ошибки интегрирования по алгоритмам (8), (9) и (10).

На рисунке 2 представлены графики изменения ошибок численного интегрирования, проведенного по алгоритмам разложения матрицанта и реверсивным алгоритмом, когда проекции вектора угловой скорости поворота корпуса  $\bar{\omega}_c$ , заданные соотношениями (12), рассчитываются при  $C_x = C_y = 0,174$  рад;  $C_z = 0$ ;  $A_x = A_y = A_z = 0$ ;  $B_x = B_y = B_z = 0$ ;  $F_x = 0,8$  Гц;  $F_y = 1$  Гц;  $F_z = 0$ ;  $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ .

Получаемые при этих значениях проекции вектора  $\bar{\omega}_c$  близки к угловым колебаниям корпуса машины при ее прямолинейном движении по неровностям местности.

Проведенные расчеты показали, что точности интегрирования двумя рассматриваемыми в работе методами близки между собой.

Можно показать [6], что при малых величинах ошибок зависимость между углами Эйлера – Крылова и элементами кватернионов разностей поворотов имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta\psi_p &\approx 2\Delta p_0\Delta p_3; & \Delta\psi_\mu &\approx 2\Delta\mu_0\Delta\mu_3; \\ \Delta\vartheta_p &\approx 2\Delta p_0\Delta p_2; & \Delta\vartheta_\mu &\approx 2\Delta\mu_0\Delta\mu_2; \\ \Delta\gamma_p &\approx 2\Delta p_0\Delta p_1; & \Delta\gamma_\mu &\approx 2\Delta\mu_0\Delta\mu_1,\end{aligned}$$

где  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta\gamma$  – ошибки интегрирования углов курса, дифферента и крена.

Для приведенного на рисунке 2 примера расчета в результате статистической обработки данных получены результаты, представленные в таблице 1.



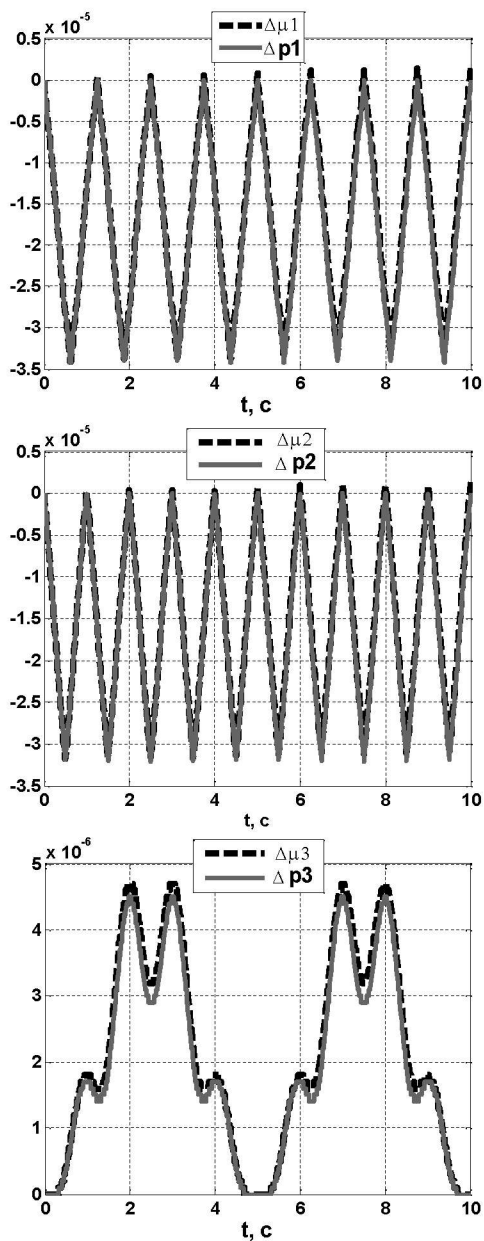


Рис. 2. Изменение во времени ошибок интегрирования параметров кватернионов  $\Delta P$  и  $\Delta M$

Таблица 1 – Результаты статистической обработки параметров кватернионов разностей поворотов

	Среднее арифметическое ошибки,		Средняя квадратичная ошибка,	
	град		град	
	$\Delta P$	$\Delta M$	$\Delta P$	$\Delta M$
$\Delta \psi$	0,00023	0,00024	0,00016	0,00017
$\Delta \vartheta$	-0,00176	-0,00183	0,00109	0,00109
$\Delta \gamma$	-0,00198	-0,00189	0,00116	0,00116

**Выводы.** Реверсивный алгоритм интегрирования параметров Родрига – Гамильтона близок по точности к алгоритмам разложения функций матрицианта кинематических уравнений (2) в степенной ряд по четным степеням до четвертой степени включительно. В этом случае ошибка интегрирования пропорциональна  $h^5$ , где  $h$  – такт съема информации с датчиков угловых скоростей. Реверсивный алгоритм вычисления параметров Родрига – Гамильтона при той же точности интегрирования, что и алгоритм разложения функций матрицианта, более простой и требует меньшей оперативной памяти, поэтому он является предпочтительным для задач создания бесплатформенных инерциальных систем.

**Список литературы:** 1. Борисов С. Средства навигации и топопривязки // Зарубежное военное обозрение. – 1984. – № 4. – С. 20-31. 2. Гофман-Валенгоф В., Лихтенеггер Г., Колінз Д. Глобальная система визначення місто положення (GPS): Теорія і практика: пер. з нім. – Київ: Наукова думка, 1996. – 350 с. 3. www.ppk.perm.su. 4. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 824 с. 5. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. 6. Повышение устойчивости и управляемости колесных машин в тормозных режимах: Монография / Е.Е. Александров, В.П. Волков, Д.О. Волонцевич, В.А. Кононенко и др.; Под. ред. Д.О. Волонцевича. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 320 с. 7. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной навигации. – Киев: Наукова думка, 1995. – 279 с. 8. Успенский В.Б. Теоретические основы гиросилового управления ориентацией космического летательного аппарата: Монография. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 328 с.

Поступила в редакцию 16.11.07.