

Таблица 4

Таблица калибровки цистерны

h, мм	V*(h), м³	h, мм	V*(h), м³	h, мм	V*(h), м³	h, мм	V*(h), м³
0	0,030	500	5,055	1000	12,042	1500	18,738
50	0,228	550	5,719	1050	12,753	1550	19,311
100	0,580	600	6,395	1100	13,459	1600	19,848
150	1,010	650	7,082	1150	14,160	<b>1646</b>	<b>20,300</b>
200	1,494	700	7,778	1200	14,853	1650	20,334
250	2,018	750	8,450	1250	15,506	1700	20,734
300	2,577	800	9,189	1300	16,210	1741	20,912
350	3,164	850	9,901	1350	16,869	-	-
400	3,775	900	10,614	1400	17,512	-	-
450	4,406	950	11,329	1450	18,137	-	-

Как видно из таблицы, номинальному объему топлива  $20,3 \text{ м}^3$  соответствует его уровень  $h_{\text{ном}} = 1646 \text{ мм}$ . Координата уровня топлива в принятой системе координат составляет  $z = z_0 + h = 3315 \text{ мм}$ . Из табл. 1 следует, что при этом объеме топлива слои, на которые условно делится поперечное сечение полости цистерны (см. рис. 9), заполнены следующим образом: слои 1 и 2 заполнены полностью, слой 3 заполнен частично, слой 4 (последний, верхний) не заполнен. В соответствии с этим при определении положения центра массы топлива в формулах (5) и (6) принимается  $N = 2$ .

Координаты центров масс топлива, находящегося в средней (цилиндрической) и концевой части цистерны при объеме  $20,3 \text{ м}^3$ , приведены в табл. 5. Хотя для цистерны рассматриваемой конфигурации вычисления для определения положения центра массы топлива в продольном направлении не требуются (он находится посередине длины цистерны), в табл. 5 приведены также и координаты  $x$  центров массы топлива в концевой части цистерны, вычисленные по формулам (7) и (8). Приведенные в табл. 5 координаты даны в общей системе координат, начало которой находится на пересечении осей, на которых лежат центры кривизны верхней части обечайки цистерны (ось  $Ox$ ) и переднего днища (ось  $Oz$ , рис. 3). Более удобно для восприятия вертикальную координату отсчитывать от нижней образующей внутренней поверхности обечайки, а продольную – от вершины внутренней поверхности переднего днища (рис. 10). Координаты центра массы топлива в этой системе координат равны  $Z = z_{\text{ц.м.}} - z_0 = 860 \text{ мм}$ ,  $X = R_d - x_{\text{ц.м.}} = 3098 \text{ мм}$ .

Таблица 5

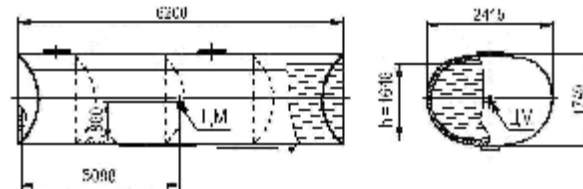
Координаты центров масс топлива в цистерне при номинальном объеме  $20,3 \text{ м}^3$   
(в общей системе координат согласно рис. 3)

Номер	Степень	Средняя (цилиндриче-	Концевая часть цистерны
-------	---------	----------------------	-------------------------

слоя $i$	заполнения	сая) часть цистерны		(переднее днище)		
		Объем, м³	$z$ , мм	Объем, м³	$z$ , мм	$x$ , мм
1	полное	0,228	1705	0,015	1704	1904
2	полное	15,471	2431	0,788	2410	1877
3	частичное	2,701	3177	0,152	3180	1881
4	не заполнен	-	-	-	-	-
Цистерна в целом *	частичное	18,400	2532	0,955	2521	1878
		$V = 20,3 \text{ м}^3$ , $z = 2529 \text{ мм}$ , $x = -998 \text{ мм}$				

\* координаты даны с учетом объема топлива в желобе ( $0,030 \text{ м}^3$ ,  $z = 1642 \text{ мм}$ ,  $x = 2048 \text{ мм}$ )

Рис. 10. Положение центра массы топлива в цистерне топливозаправщика с номинальной вместимостью  $20,3 \text{ м}^3$



Список литературы: 1. Головченко В.И., Клименко П.Д., Понедельченко Е.П. Проектирование автомобильных цистерн большой вместимости. Расчеты геометрических параметров // Конструкторско-технологические исследования в области создания металлургического, подъемно-транспортного оборудования и цистерностроения: Тем. сб. научн. тр. – Краматорск: НИИПТмаш, 1985. – С.107-117. 2. Дьяконов В.П. МATHCAD 8/2000: специальный справочник. – СПб: Питер, 2001. – 592 с. 3. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Часть IV. Кратные и криволинейные интегралы. – Изд. 3-е, стереотип. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1972 – 236 с.

Поступила в редакцию 8.09.09

УДК 531.539.3.62.752(031)

**Е.М. ИВАНОВ**, канд. техн. наук, доц.,

доцент каф. «Инженерная графика» Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет «ХАДИ», г. Харьков

## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С РЕАКТИВНЫМИ МАССАМИ

В роботі показано, що при перемиканні частот силової дії у коливальній системі виникають перехідні процеси. Відмічено вплив амплітудно-частотної характеристики на перехідний процес та показано вплив частоти вхідної дії на перехідний процес у коливальній системі.

In the paper the modified and simplified method of determining the parameters of oscillating systems in terms of the resonance method of identifying the oscillating system parameters, based on measuring resonance frequencies of the oscillating system is proposed.

Колебательная система (КС) с двумя степе-

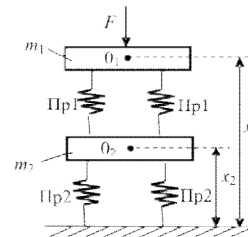


Рис. 1

ниями свободы часто встречается в технических устройствах, например, в электромагнитных вибровозбудителях (ЭМВ) с реактивной массой [4]. Такие вибровозбудители применяются в вибрационных испытательных стендах. В методе качающейся частоты вибрации, который используется при испытании машин и приборов, осуществляется изменение частоты управляющего сигнала ЭМВ. Также при воспроизведении ЭМВ стохастических вибраций амплитуды и частоты управляющих воздействий изменяются случайным образом. В работе [1] был рассмотрен случай изменения частоты управления однократным ЭМВ без реактивной массы (РМ). В этом случае подвижная часть ЭМВ представляет собой КС с одной степенью свободы. В ЭМВ с РМ подвижная часть является КС с двумя степенями свободы.

Механическая схема такой КС изображена на рис. 1, где  $m_1, m_2$  – массы; Пр1, Пр2 – пружины;  $F$  – сила;  $x_1, x_2$  – перемещения  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. Примем, что сила  $F = F_a \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $F_a$  – амплитуда;  $\omega$  – круговая частота ( $\omega = 2\pi f$ , где  $f$  – частота, Гц);  $t$  – время;  $\varphi$  – угол сдвига  $F(t)$  от  $F_a \sin \omega t$  при  $t = 0$ .

Для того, чтобы проанализировать процесс изменения частоты в КС, необходимо вначале проанализировать входное воздействие  $F$ , изображенное на рис. 2. Здесь на интервале  $Dt_1, Dt_2, Dt_3$  показаны силы с разными частотами  $\omega_k, k = 1, 2, 3$ . На каждом  $Dt_k$  скорость

$$v_k = \frac{dF}{dt} = F_m \omega_k \cos \omega_k t, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \text{также}$$

разная, причем из выражения  $v_k$  и рис. 2

видно, что чем выше частота  $\omega_k$ , тем больше  $v_k$ . Математически этот факт доказан в работе [1].

В общем случае процесс изменения частоты в КС будем рассматривать при ненулевых начальных условиях  $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)$ , где под моментом начальных условий подразумевается момент изменения частоты  $\omega$ . Заметим, что при колебаниях масс  $m_1$  и  $m_2$  пружины Пр1 и Пр2 сжимаются и разжимаются. При этом возникает трение частей КС о воздух, что теоретически объясняется тем, что эта КС является диссипативной. Поэтому уравнения данной КС будут следующими [2]

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 &= F + b_1 \frac{dx_2}{dt} + c_1 x_2; \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (b_1 + b_2) \frac{dx_2}{dt} + (c_1 + c_2) x_2 &= b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Перед определением координат  $x_1(t), x_2(t)$  осуществим преобразования на основе операционного метода [3]. Уравнения (1) в операционной форме

имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_1(p)(m_1 p^2 + b_1 p + c_1) &= F(p) + DF_1(p) + (b_1 p + c_1)x_2(p); \\ x_2(p)[m_1 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2] &= (b_1 p + c_1)x_1(p) + DF_2(p) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $x_1(p), x_2(p), F(p), DF_1(p), DF_2(p)$  – изображения Карсона, соответствующие оригиналам  $x_1(t), x_2(t), F(p), DF_1(p), DF_2(p)$  – изображения Карсона, соответствующие начальным условиям  $x_1(0), x_2(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0)$ , имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} DF_1(p) &= m_1 [p^2 x_1(0) + p \dot{x}_1(0)] + b_1 p x_1(0); \\ DF_2(p) &= m_2 [p^2 x_2(0) + p \dot{x}_2(0)] + (b_1 + b_2) p x_2(0) \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где  $x_k(0) = \frac{dx_k(0)}{dt}, k = 1, 2$ .

При  $x_k(0) = \dot{x}_k(0) = 0 \quad DF_k(p) = 0$ , и решение уравнений (2) упрощается. Однако в нашем исследовании вариант  $DF_k(t) \rightarrow DF_k(p) = 0$  может быть только тогда, когда начало изменения частоты  $\omega$  в силе  $F(t)$  специально регулируется системой управления. Если этого нет, то  $DF_k(p) \neq 0, k = 1, 2$ , что значительно усложняет решение (2). В нашем случае будем осуществлять решение (2) при  $DF_k(p) \neq 0, k = 1, 2$ .

Введем следующие обозначения:

$$w_1 = w_1(p) = \frac{1}{m_1 p^2 + b_1 p + c_1}; \quad w_2 = w_2(p) = b_1 p + c_1;$$

$$w_3 = w_3(p) = \frac{1}{m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2}.$$

Величины  $w_1, w_2, w_3$  являются частными передаточными функциями в КС с двумя степенями свободы. Из (2) с учетом принятых обозначений получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{(F + \Delta F_1 + \Delta F_2 w_2 w_3) w_1}{1 - w_1 w_2^2 w_3}, \quad x_2 = \frac{[(F + \Delta F_1) w_1 w_2 + \Delta F_2] w_3}{1 - w_1 w_2^2 w_3} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Вставим в (4) значения  $w_1, w_2, w_3$ . Тогда получим:

$$x_1(p) = \frac{[F(p) + DF_1(p)] [m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2] + DF_2(p) (b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1) [m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2] - (b_1 p + c_1)^2}; \quad (5)$$

$$x_2(p) = \frac{[F(p) + DF_1(p)] (b_1 p + c_1) + DF_2(p) (m_1 p^2 + b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1) [m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2] - (b_1 p + c_1)^2}. \quad (6)$$

Выражения (5), (6) можно упростить, если учесть следующий физический факт. Жесткость пружин Пр2 значительно больше жесткости пружин

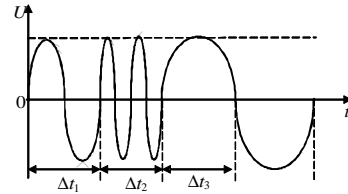


Рис. 2

Пр1, то есть  $c_2 \gg c_1$ . Кроме того, диссипация в КС возникает в результате трения частей КС о воздух, а это значит, что диссипация  $b_1$  мала ( $b_1$  значительно меньше единицы), но  $b_2$  может быть значительно больше  $b_1$ , если параллельно пружинам Пр2 стоит демпфер. Исходя из этого в знаменателях (5), (6) вычитаемым  $(b_1 p + c_1)^2$  можно пренебречь. Тогда

$$x_1(p) = \frac{F(p) + DF_1(p)}{m_1 p^2 + b_1 p + c_1} + \frac{DF_2(p)(b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1)[m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2]}, \quad (7)$$

$$x_2(p) = \frac{[F(p) + DF_1(p)](b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1)[m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2]} + \frac{DF_2(p)}{m_2 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2}. \quad (8)$$

Из (3) видно, что  $DF_1(p)$  и  $DF_2(p)$  включают в себя по три составляющих. А это значит, что в (7) и (8) с учетом (3) будет по семь составляющих дробей и находить надо четырнадцать оригиналов от изображений (7), (8). При этом необходимо учитывать то обстоятельство, что сила  $F(t) = F_a \sin(\omega_k t + \varphi_1)$  изменяется на силу  $F(t) = F_a \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ , то есть происходит изменение частоты  $\omega$  и угла  $\varphi$ . В этом случае необходимо учитывать такие характеристики КС как амплитудно-частотные (АЧХ) как для  $x_1(t)$ , так и для  $x_2(t)$ . Координаты  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  из  $x_{11}(t) = x_{1a1} \sin(\omega_k t + \Psi_{11})$ ,  $x_{21}(t) = x_{2a1} \sin(\omega_k t + \Psi_{21})$  изменяются на  $x_{12}(t) = x_{1a2} \sin(\omega_2 t + \Psi_{12})$ ,  $x_{22}(t) = x_{2a2} \sin(\omega_2 t + \Psi_{22})$ . Здесь амплитуды  $x_{1a}$  и  $x_{2a}$  изменяются в соответствии с АЧХ КС1 (колебательная система массы  $m_1$ ) и КС2 (колебательная система массы  $m_2$ ). Для этих КС1 и КС2 амплитуды  $x_{1a}$  и  $x_{2a}$  изменяются в соответствии с формулами (принимая, что начальные условия  $x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2 = 0$ )

$$x_{1a} = \frac{F_a}{\sqrt{(c_1 - m_1 \omega^2)^2 + (\omega b_1)^2}}, \quad (9)$$

$$x_{2a} = \frac{F_a}{a^2 + \omega^2 d^2} \sqrt{(a c_1 - b_1 \omega^2 d)^2 + \omega^2 (a b_1 + d c_1)^2}, \quad (10)$$

где  $a = \alpha \beta - \omega^2 b_1 (b_1 + b_2)$ ;  $\alpha = c_1 - m_1 \omega^2$ ;  $d = \omega [\alpha (b_1 + b_2) + b_1 \beta]$ ;  $\beta = c_1 + c_2 - m_2 \omega^2$ .

Из (9), (10) видим, что при постоянной амплитуде силы  $F_a = \text{const}$  и  $b_1 = b_2 = 0$

$$x_{1a \max} = \frac{F_a}{c_1 - m_1 \omega_{p1}^2}, x_{2a \max} = \frac{F_a c_1}{(c_1 - m_1 \omega_{p1}^2)(c_1 + c_2 - m_2 \omega_{p2}^2)}, \quad (11)$$

где  $\omega_{p1}, \omega_{p2}$  – резонансные частоты в данной КС. Эти частоты определим из (11). Они имеют аналитический вид

$$\omega_{p1} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1} - \frac{F_a}{m_1 x_{1a \max}}}, \quad (12)$$

$$\omega_{p2} = \left\langle \frac{c_1 m_2 (c_1 + c_2) m_1 \pm}{2 m_1 m_2} \pm \frac{1}{2 m_1 m_2} \left\{ [c_1 m_2 (c_1 + c_2) m_1]^2 - 4 m_1 m_2 \left[ c_1 (c_1 + c_2) - \frac{F_a c_1}{x_{2a \max}} \right] \right\}^{1/2} \right\rangle^{1/2}. \quad (13)$$

Если принять  $x_{1a \max} = x_{2a \max} = \infty$ , то из (12), (13) получаем

$$\omega_{p1} = \sqrt{c_1 / m_1}; \quad (14)$$

$$\omega_{p2} = \left\langle \frac{1}{2} \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} + \frac{c_2}{m_2} \right) \pm \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{c_1}{m_1} + \frac{c_1}{m_2} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 (c_1 + c_2)}{m_1 m_2} \right\}^{1/2} \right\rangle^{1/2}. \quad (15)$$

Из (14) видно, что  $\omega_{p1} = \omega_{10}$ , где  $\omega_{10}$  – собственная частота колебаний КС с одной степенью свободы с массой  $m_1$  и коэффициентом жесткости  $c_1$ .

На основании (15) в рассматриваемой КС имеется две резонансных частоты  $\omega_{p2}$ , то есть таких частот, при которых  $x_{2a \max} = \infty$ . Физически этот факт связан с КС с  $m_1$  и  $c_1$ . При  $x_{1a \max} = \infty$  надо полагать, что при  $b_1 = b_2 = 0$   $x_{2a \max} = \infty$ . Поэтому при частоте  $\omega_{p1}$  в КС с  $m_2$  и  $c_2$  имеется частота  $\omega_{p21}$ . Кроме того, в этой КС с  $m_2$  и  $c_2$  имеется  $\omega_{p22} < \omega_{p21}$ .

Так как до момента изменения частоты с  $\omega_k$  на  $\omega_l$  в КС происходили колебания

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= x_{1ak} \sin(\omega_k t + \varphi_k - \varphi_{1k}); \\ x_2(t) &= x_{2ak} \sin(\omega_k t + \varphi_k - \varphi_{2k}); \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_{1ak} \omega_k \cos(\omega_k t + \varphi_k - \varphi_{1k}), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_{2ak} \omega_k \cos(\omega_k t + \varphi_k - \varphi_{2k}) \end{aligned} \right\},$$

где  $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}$  – величины фазочастотных характеристик КС с  $m_1$  и  $c_1$  и КС с  $m_2$  и  $c_2$  на частоте  $\omega_k$ , то в момент ( $t = 0$ ) изменения частоты с  $\omega_k$  на  $\omega_l$

$$\begin{cases} x_{1k}(0) = x_{1ak} \sin(\varphi - \varphi_{1k}); \\ x_{2k}(0) = x_{2ak} \sin(\varphi - \varphi_{1k} - \varphi_{2k}); \\ \mathfrak{X}_{1k}(0) = x_{1ak} \omega_k \cos(\varphi - \varphi_{1k}); \\ \mathfrak{X}_{2k}(0) = x_{2ak} \omega_k \cos(\varphi - \varphi_{1k} - \varphi_{2k}), \end{cases} \quad (16)$$

то есть  $x_{1k}(0)$ ,  $x_{2k}(0)$ ,  $\mathfrak{X}_{1k}(0)$ ,  $\mathfrak{X}_{2k}(0)$  являются постоянными составляющими, и они входят в  $DF_1(p)$ ,  $DF_2(p)$ . В дальнейшем будем учитывать следующие обозначения:  $\varphi - \varphi_{1k} = Y_1$ ,  $\varphi - \varphi_{1k} - \varphi_{2k} = Y_2$ .

Эти постоянные составляющие относятся к частоте  $\omega_k$ . Поэтому их значения должны быть равными значениям в амплитудно-частотных характеристиках (АЧХ) (9), (10) на частоте  $\omega_k$ . При переключении частот с  $\omega_k$  на  $\omega_l$  значения амплитуд колебаний  $m_1$  и  $m_2$  становятся равными значениям в АЧХ (9), (10), но уже на частоте  $\omega_l$ . В этом случае во всей КС происходят переходные процессы.

Для расчета этих переходных процессов необходимо найти оригиналы  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , соответствующие изображениям Карсона (7), (8). Предстоящие решения в нахождении  $x_1(t) \xrightarrow{\leftarrow} x_1(p)$ ,  $x_2(t) \xrightarrow{\leftarrow} x_2(p)$ , а также  $\mathfrak{X}_1(t)$ ,  $\mathfrak{X}_2(t)$  имеют громоздкую математическую интерпретацию. Для сокращения данного текста без ущерба для читателя эту громоздкость осуществим в черновиках, а здесь приведем конечные результаты. Оригиналы  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  находим с помощью метода разложения (7), (8) на сумму дробей и по таблицам [3].

При переключении КС с  $\omega_k$  на  $\omega_l$  считаем, что величина входного воздействия изменяется с величины  $F_{ak} \sin(\omega_k t + \varphi_k)$  на величину  $F_{al} \sin(\omega_l t + \varphi_l)$ , а это означает, что

$$F(p) \xrightarrow{\leftarrow} F_{al} \sin(\omega_l t + \varphi_l) - F_{ak} \sin(\omega_k t + \varphi_k). \quad (17)$$

Оригинал  $x_{11}(t) \xrightarrow{\leftarrow} \frac{F(p)}{m_1 p^2 + b_1 p + c_1}$  равен

$$\begin{aligned} x_{11}(t) = & \frac{F_{al}}{m_1} \left[ \frac{A_{1l}}{\omega_l} \sin \omega_l t + \frac{B_{1l}}{\omega_l^2} (1 - \cos \omega_l t) \right] - \frac{F_{ak}}{m_1} \left[ \frac{A_{1k}}{\omega_k} \sin \omega_k t + \frac{B_{1k}}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) \right] + \\ & + \frac{1}{m_1 \omega_{10}} (F_{al} c_{1l} - F_{ak} c_{1k}) e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \sin \omega_{10} t + \\ & + \frac{1}{c_1} (F_{al} D_{al} - F_{ak} D_{1k}) \left[ 1 - e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \left( \cos \omega_{10} t + \frac{b_1}{2m_1 \omega_{10}} \sin \omega_{10} t \right) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{где } A_{1s} = -c_{1s}, \quad D_{1s} = -\frac{B_{1s} c_1}{m_1 \omega_s^2}, \quad c_{1s} = \frac{m_1}{b_1} \left[ B_{1s} \left( 1 - \frac{c_1}{m_1 \omega_s^2} \right) - \sin \varphi_s \right],$$

$$B_{1s} = \frac{\omega_s \cos \varphi_s + \frac{m_1}{b_1} \left( \omega_s^2 - \frac{c_1}{m_1} \right) \sin \varphi_s}{\frac{b_1}{m_1} + \frac{m_1}{b_1} \left( 1 - \frac{c_1}{m_1 \omega_s^2} \right) \left( \omega_s^2 - \frac{c_1}{m_1} \right)}, \quad s = l, k, \quad \omega_{10} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1} - \frac{b_1^2}{4m_1^2}}.$$

Далее определим оригинал  $x_{12}(t) \xrightarrow{\leftarrow} \frac{DF_1(p)}{m_1 p^2 + b_1 p + c_1}$ . Для этого в это выражение вставим верхнее соотношение из (3) и значения  $x_{1k}(0)$ ,  $\mathfrak{X}_{1k}(0)$ , представленные в (16). Тогда получим

$$\begin{aligned} x_{12}(t) = & x_{1ak} e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \left\{ \sin Y_{1k} \left( \cos \omega_{10} t - \frac{b_1}{2m_1 \omega_{10}} \sin \omega_{10} t \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\omega_{10}} \sin \omega_{10} t \left[ \omega_k \cos \Psi_{1k} + \frac{b_1}{m_1} \sin \Psi_{1k} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Оригинал

$$x_{13}(p) = \frac{DF_2(p)(b_1 p + c_1)}{m_1 \left( p^2 + \frac{b_1}{m_1} p + \frac{c_1}{m_1} \right) m_2 \left( p^2 + \frac{b_1 + b_2}{m_2} p + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right)}.$$

$DF_2(p)$  раскроем с помощью нижнего соотношения из (3) и значений  $x_{2k}(0)$ ,  $\mathfrak{X}_{2k}(0)$ , представленных в (16). В результате получим, что

$$\begin{aligned} x_{13}(t) = & \frac{A_{2k}}{m_1} \frac{1}{\omega_{10}} e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \sin \omega_{10} t + \frac{B_{2k}}{c_1} \left[ 1 - e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} \left( \cos \omega_{10} t + \frac{b_1}{2m_1 \omega_{10}} \sin \omega_{10} t \right) \right] + \\ & + \frac{C_{2k}}{m_2} \frac{1}{\omega_{20}} e^{-\frac{(b_1 + b_2)t}{2m_2}} \sin \omega_{20} t + \frac{D_{2k}}{c_1 + c_2} \left[ 1 - e^{-\frac{(b_1 + b_2)t}{2m_2}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1 + b_2}{2m_2 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где } A_{3k} = b_1 x_{2ak} \sin Y_{2k} - \frac{m_1}{m_2} C_{2k}; \quad D_{2k} = -B_{2k} \left( 1 + \frac{c_2}{c_1} \right);$$

$$B_{2k} = \frac{c_1(c_1 + c_2)}{(b_1 c_2 - b_2 c_1) m_2} (b_1 m_2 x_{2ak} \sin Y_{2k} - C_{2k} m_1) + C_{2k} c_1;$$

$$C_{2k} = x_{2ak} b_1 \left\{ \left[ b_1 + b_2 + \frac{c_1(c_1 + c_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \right] \sin Y_{2k} - (m_2 \omega_k + b_1 + b_2) \cos Y_{2k} \right\}_1 \times \\ \times \left[ \frac{(b_1 + b_2) m_1}{m_2} - b_1 + \frac{(c_1 + c_2) c_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} m_1 - c_1 - \frac{m_1^2 (c_1 + c_2)}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)} \frac{1}{m_2} (c_1 + c_2) \right]^{-1}.$$

Таким образом

$$x_1(t) = \sum_{s=1}^3 x_{1s}. \quad (21)$$

Далее определим  $x_2(t) \xrightarrow{\leftarrow} x_2(p) = (8)$ . Здесь  $F(p) \xrightarrow{\leftarrow} F(t) = (17)$ ,  $DF_1(p)$  и  $DF_2(p)$  определяются из (3).

На основании (8) видим, что

$$x_2(t) = \sum_{s=1}^3 x_{2s}(t), \quad (22)$$

и будем находить отдельные  $x_{2s}(t), s = 1, 3$ . В результате вычислений получим

$$x_{21}(t) \xrightarrow{\leftarrow} \frac{[F_l(p) - F_k(p)] (b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1) [m_1 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2]} \xrightarrow{\leftarrow} \\ \xrightarrow{\leftarrow} \frac{F_{al}}{m_1 m_2} \left\{ \frac{A_{2l}}{\omega_l} \sin \omega_l t + \frac{B_{2l}}{\omega_l^2} (1 - \cos \omega_l t) + \frac{C_{2l}}{\omega_l} e^{-\frac{b_l t}{2m_1}} \sin \omega_{20} t + \right. \\ \left. + D_{2l} \frac{m_1}{c_1} \left[ 1 - e^{-\frac{b_l t}{2m_1}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1}{2m_1 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) + E_{2l} \frac{1}{\omega_l} e^{-\frac{(b_1 + b_2)t}{2m_2}} \sin \omega_{20} t \right] + \right. \\ \left. + G_{2l} \frac{m_2}{c_1 + c_2} \left[ 1 - e^{-\frac{(b_1 + b_2)t}{2m_2}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1 + b_2}{2m_2 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{F_{ak}}{m_1 m_2} \left\{ \frac{A_{2k}}{\omega_k} \sin \omega_k t + \frac{B_{2k}}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) + \frac{C_{2k}}{\omega_{20}} e^{-\frac{b_l t}{2m_1}} \sin \omega_{20} t + \right. \right. \\ \left. \left. + D_{2k} \frac{m_1}{c_1} \left[ 1 - e^{-\frac{b_l t}{2m_1}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1}{2m_1 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) + E_{2k} \frac{1}{\omega_l} e^{-\frac{(b_1 + b_2)t}{2m_2}} \sin \omega_{20} t \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + G_{2k} \frac{m_2}{c_1 + c_2} \left[ 1 - e^{-\frac{(b_1 + b_2)t}{2m_2}} \left( \cos \omega_{20} t + \frac{b_1 + b_2}{2m_2 \omega_{20}} \sin \omega_{20} t \right) \right] \right\} \right\}, \quad (23)$$

где коэффициенты  $A_{2s}, B_{2s}, C_{2s}, D_{2s}, E_{2s}, G_{2s}, s = l, k$  определяются из системы уравнений

$$A_{2s} + C_{2s} + E_{2s} = 0; \\ A_{2s} \left( \frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right) + B_{2s} + C_{2s} \frac{b_1 + b_2}{m_2} + D_{2s} + E_{2s} \frac{b_1}{m_1} + G_{2s} = 0; \\ A_{2s} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{b_1(b_1 + b_2)}{m_1 m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right) + B_{2s} \left( \frac{b_1 + b_2}{m_2} + \frac{b_1}{m_1} \right) + C_{2s} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \omega_s^2 \right) + \\ + D_{2s} \frac{b_1 + b_2}{m_2} + E_{2s} \left( \frac{c_1}{m_1} + \omega_s^2 \right) + G_{2s} \frac{b_1}{m_1} = b_1 \sin \varphi_s; \\ A_{2s} \left[ \frac{b_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} + \frac{c_1(b_1 + b_2)}{m_1 m_2} \right] + B_{2s} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \frac{b_1(b_1 + b_2)}{m_1 m_2} + \frac{c_1}{m_1} \right) + C_{2s} \omega_s^2 \frac{b_1 + b_2}{m_2} + \\ + D_{2s} \left( \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \omega_s^2 \right) + E_{2s} \omega_s^2 \frac{b_1}{m_1} + G_{2s} \left( \frac{c_1}{m_1} + \omega_s^2 \right) = b_1 \omega_s \cos \varphi_s + c_1 \sin \varphi_s; \\ A_{2s} \frac{b_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} + B_{2s} \left[ \frac{b_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} + \frac{c_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} \right] + C_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1 + c_2}{m_2} + \\ + D_{2s} \omega_s^2 \frac{b_1 + b_2}{m_2} + E_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1}{m_1} + G_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1}{m_1} = c_1 \omega_s \cos \varphi_s; \\ B_{2s} \frac{c_1(c_1 + c_2)}{m_1 m_2} + D_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1 + c_2}{m_2} + G_{2s} \omega_s^2 \frac{c_1}{m_1} = 0, \quad s = l, k.$$

Далее определим

$$x_{22}(t) \xrightarrow{\leftarrow} \frac{DF_1(p) (b_1 p + c_1)}{(m_1 p^2 + b_1 p + c_1) [m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2]},$$

где  $DF_1(p) = m_1 [p^2 x_{1ak} \sin Y_{1k} + x_{1ak} \omega_k p \cos Y_{1k}] + b_1 x_{1ak} p \sin Y_{1k}$ .

По таблицам [2] находим  $x_{22}(t)$ . Заметим (см. (7) и (8)), что  $x_{22}(t)$  описывается выражением, подобным (19). Только в  $x_{22}(t)$  в коэффициентах  $A_{2k}, D_{2k}, C_{2k}, D_{2k}$  вместо  $x_{2ak}$  стоят  $x_{1ak}$  и вместо  $\omega_{10}$  стоят  $\omega_{20}$ .

$$x_{23}(t) \xrightarrow{\leftarrow} \frac{DF_2(p)}{m_2 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2} \xrightarrow{\leftarrow},$$

$$\leftarrow x_{2ak} \left\langle \left\{ e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} (\sin \omega_{20} t) \frac{1}{\omega_k} [m_2 \omega_{20} \cos Y_{2k} + (b_1 + b_2) \sin Y_{2k}] - \right. \right. \quad (24)$$

$$\left. \left. - \frac{b_1 + b_2}{2\omega_{20}} \sin Y_{2k} \right\} + m_2 e^{-\frac{(b_1+b_2)t}{2m_2}} (\sin Y_{20} t) \cos \omega_{20} t \right\rangle.$$

Итак, получены все составляющие выражения перемещений  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  КС после момента переключения частоты входного силового воздействия  $F(t)$ , то есть  $x_1(t) = (18) + (19) + (20)$ ;  $x_2(t) = (22) = (23) + x_{22}(t) + (24)$ .

Если здесь использовать обозначения (25) из [1], то тогда подобно выражению (28) из [1]

$$x_1(t) = A_1 + B_1 e^{-\frac{b_1 t}{2m_1}} (\cos \omega_{10} t + \alpha_1 \sin \omega_{10} t) + C_1 e^{-\frac{b t}{2m_1}} (\cos \omega_1 t + \beta_1 \sin \omega_1 t) -$$

$$- D_1 e^{-\frac{b}{2m_1}} (\cos \omega_k t + \beta_1 \sin \omega_k t) + E_1 \sin(\omega_1 t + Y_{1k}). \quad (25)$$

$$x_2(t) = A_2 + B_2 e^{-\frac{b_1+b_2 t}{2m_2}} (\cos \omega_{20} t + \alpha_2 \sin \omega_{20} t) + C_2 e^{-\frac{b_1+b_2 t}{2m_2}} (\cos \omega_1 t + \beta_2 \sin \omega_1 t) -$$

$$- D_2 e^{-\frac{b_1+b_2 t}{2m_2}} (\cos \omega_k t + \beta_2 \sin \omega_k t) + E_2 \sin(\omega_1 t + Y_{2k}). \quad (26)$$

В выражениях (25), (26) величины  $A_s, D_s, C_s, D_s, E_s, \alpha_s, \beta_s, s = 1, 2$  являются обобщающими и не зависят от времени  $t$ . Из этих соотношений видно, что при переключении частот силового воздействия  $F(t)$  в КС возникают переходные процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , обусловленные наличием начальных ненулевых значений  $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0), \dot{x}_2(0)$  в момент переключения частот. Кроме того, как было отмечено, на переходной процесс в КС существенно влияет АЧХ этой КС при переключении одной частоты на значительно большую, особенно с дорезонансной на резонансную и далее зарезонансную области.

**Выводы.** Следует отметить следующую особенность в данном исследовании. Определение переходных процессов координат  $x_{1k}(t), x_{2k}(t)$  связано с методом качающей частоты, то есть, когда частота входного воздействия  $F(t)$  скачками изменяется от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ , далее до  $\omega_3$  и т.д. до  $\omega_n$ . Причем, когда КС переключается с  $\omega_k$  на  $\omega_l$ , переходной процесс КС на частоте  $\omega_k$  еще не окончился. Если же время паузы между переключением такое, что переходные процессы  $x_{1k}(t), x_{2k}(t)$  оканчиваются, то тогда расчет их на частоте  $\omega_k$  осуществлять не надо. При плавном изменении частот, когда время пауз между  $\omega_k$  и  $\omega_l$  равно нулю, надо учитывать только амплитуды колебаний, ориентируясь на АЧХ колебательной системы.

**Список литературы:** 1. Божко А.Е. О процессах при изменении частот колебаний в электромагнитных вибровозбудителях // Доповіді НАНУ, 2006. – № 4. – С. 82-91. 2. Божко А.Е., Голуб Н.М. Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с. 3. Гинзбург С.Г. Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – М.: Сов. радио, 1959. – 404 с. 4. Теория электромагнитных вибровозбудителей / Под ред. А.Е. Божко // Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2009. – 436 с.

Поступила в редколлегию 8.07.09

УДК 621.833.6

**С.Н. КАВЕЦКИЙ**, асп. каф. ТММиСАПР НТУ “ХПИ”,  
**Т.В. ГЕРЕШ**, асс. каф. «Теоретическая механика и машиноведение»,  
Харьковский аэрокосмический университет им. Жуковского “ХАИ”

### СИНТЕЗ ПЛАНЕТАРНОГО МЕХАНИЗМА $2A - \bar{A}I$ С УЧЕТОМ УГЛОВ ЗАЦЕПЛЕНИЯ С РАДИАЛЬНЫМ ДАЛЬНИМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ САТЕЛИТОВ

У статті показана можливість синтезу планетарних механізмів з двозв'язаними колесами на прикладі планетарного механізму  $2A - \bar{A}I$ . Одержані генеральні рівняння для визначення чисел зубців зубчастих коліс планетарного механізму  $2A - \bar{A}I$ . Визначені умови для вибору параметрів синтезу та нерівності, які визначають границі допустимих передаточних відношень.

In the paper the possibility of planetary mechanisms synthesis with double-chained wheels on the example of planetary mechanism  $2A - \bar{A}I$  is shown. General equations are got for determination of numbers of indents of toothed wheels of planetary mechanism  $2A - \bar{A}I$ . Conditions for the choice of synthesis parameters and inequalities for boundaries of possible transmission relations are determined.

**Введение.** Синтез планетарных механизмов с разными углами зацепления пар зубчатых колес, входящих в его состав, дает возможность значительно расширить пределы передаточных отношений и получить дополнительные комбинации чисел зубьев при прочих равных условиях. Для планетарных механизмов с двузв'язными колесами порядок проведения синтеза усложняется,