

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
для самостійної роботи з курсу  
«Теорія інтелекту»  
для студентів  
спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Харків 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**для самостійної роботи з курсу**  
**«Теорія інтелекту»**  
**для студентів**  
**спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»**

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 3 від 22.12.2016 р.

Харків  
НТУ «ХПІ»  
2017

**Методичні** вказівки для самостійної роботи з курсу «Теорія інтелекту» для студентів спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» / Уклад.: Чередніченко О.Ю., Вовк М.А., Орловський Д.Л., Копп А.М. – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – 76 с. – Укр. мовою.

Укладачі: О.Ю. Чередніченко, М.А. Вовк, Д.Л. Орловський, А.М. Копп

Рецензент проф. Шаронова Н.В.

Кафедра програмної інженерії та інформаційних технологій управління

## ЗМІСТ

Вступ .....	4
1 Скінченні алфавітні оператори та скінченні продукти.....	6
2 Формули і тотожності алгебри скінченних предикатів .....	21
3 Досконала диз'юнктивна нормальна форма .....	33
4 Досконала кон'юнктивна нормальна форма.....	44
5 Мінімізація формул алгебри скінченних предикатів .....	57
Список літератури .....	75

## ВСТУП

Цифрова обчислювальна техніка в даний час стала одним з головних важелів подальшого науково-технічного прогресу, основою автоматизації процесів управління економікою, виробничих процесів, проектно-конструкторських і науково-дослідних робіт, важливим джерелом підвищення продуктивності праці і зростання добробуту. Однак величезні потенційні можливості обчислювальних машин фактично використовуються далеко не повною мірою. Для полегшення вирішення цієї проблеми має сенс піти по біонічному шляху і звернутися до вивчення людського інтелекту. Можна вивчати дві сторони людського інтелекту: 1) матеріальну сторону інтелекту – мозок, нервову систему, організм людини; 2) діяльність інтелекту, його функції, що виражаються в поведінці і діях людини.

Наукова область, націлена на розробку описів структури і функцій людського інтелекту, які можна було б використовувати в справі вдосконалення цифрових обчислювальних машин, називається *теорією інтелекту*. При такому визначенні теорії інтелекту її успіхи будуть оцінюватися не стільки тим, як далеко ця теорія просунулася в пізнанні інтелекту людського, але, головним чином, тим, який рівень досконалості інтелекту машинного вона змогла забезпечити. Машинний же інтелект, тобто цифрова обчислювальна машина, може діяти тільки механічно, він здатний відтворювати лише детерміновані, дискретні і скінченні інформаційні процеси. Детерміновані процеси – це процеси з однозначним результатом, в них відсутній фактор випадковості. Дискретні процеси – це процеси, в яких інформація має вигляд окремих порцій або квантів – цифр,

літер, слів, формул і т.д., в них відсутній фактор безперервності. Скінченні процеси – це такі процеси, в яких може брати участь лише скінченне число одиниць інформації, в них відсутній фактор нескінченності. Таким чином, теорія інтелекту є наукою про математичне описання детермінованих, дискретних і скінченних інтелектуальних процесів, відтворених людським розумом, і структур, що забезпечують реалізацію таких процесів, яка орієнтована на вдосконалення цифрової обчислювальної техніки і її практичне використання.

## 1 СКІНЧЕННІ АЛФАВІТНІ ОПЕРАТОРИ ТА СКІНЧЕННІ ПРОДУКТИ

Для того щоб мати можливість розвивати теорію інтелекту, перш за все необхідно мати у своєму розпорядженні формальну мову, на якій можна було б математично описувати цікаві для нас структури і функції людського інтелекту. Як таку мову ми використовуємо *алгебру скінченних предикатів*, опис якої почнемо з введення поняття скінченного алфавітного оператора. До цього поняття природним чином приводить ознайомлення з принципом дії цифрової обчислювальної машини. Будь-яка обчислювальна система чи то машина в цілому або її окремий блок, являє собою пристрій, що здійснює перетворення інформації. Ця система має *вхід*, через який до неї надходить інформація, що підлягає обробці, і *вихід*, через який видається вихідна інформація, сформована обчислювальною системою у відповідь на інформацію, що надійшла в неї. Як вхідна, так і вихідна інформація мають вигляд знакової послідовності, що зветься *словом*. Знаки, з яких складено слово, називаються *літерами*.

Будь-яка обчислювальна система схильна до таких обмежень:

1) алфавіт літер, з яких будуються слова для будь-якої конкретної обчислювальної системи, завжди скінченний;

2) довжина слів, які здатна сприймати і формувати ця система, обмежена деяким скінченим наперед заданим числом літер, що визначаються конструкцією системи, її швидкодією і терміном служби;

3) реакції обчислювальної системи строго детерміновані: повторне подання вхідного слова завжди приводить до формування системою того ж самого вихідного слова.

Принципово важливим є те, що людський інтелект у функціональному відношенні дуже схожий з цифровою обчислювальною машиною і схильний до тих же обмежень, що і будь-яка обчислювальна система. Так само, як і обчислювальна машина, людський інтелект здатний сприймати, перетворювати і формувати інформацію. Інформація, якою

оперує людський інтелект, має вигляд слів, в ролі яких виступають тексти, лунаюча мова, чуттєві образи предметів. Роль входу інформації у людини виконують органи чуття, роль виходу інформації – органи руху й мови. Ці органи мають скінченну чутливість і скінченну роздільну здатність, тому в кожен момент часу людина може сприймати сигнали (літери) тільки зі скінченної множини (алфавіту). Органи почуттів, руху і мови мають скінченну смугу пропускання, тому вони можуть передати до інтелекту і від нього лише скінченне число літер в одиницю часу. Термін людського життя обмежений, тому обмежена довжина слів, які можуть оброблятися інтелектом людини. Досить імовірно, що реакції людини, які формуються його органами руху й мови, цілком визначаються зовнішніми впливами на цю людину, які мали місце протягом його попереднього життя. До числа цих впливів на людину слід відносити не тільки інформацію, що надійшла через органи почуттів, але також і генетичну інформацію, передану його батьками. Важливо відзначити, що генетична інформація дискретна і скінченна.

Розглянемо скінченну множину  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , що зветься *алфавітом*. Елементи  $a_1, a_2, \dots, a_k$  цієї множини називають *літерами* алфавіту  $A$ . Число літер  $k$  в алфавіті може бути довільним. Прикладами алфавітів можуть служити: 1) український алфавіт, що складається з 33 літер а, б, ..., ю, я; 2) множина  $\{0, 1, \dots, 9\}$  всіх десяткових цифр; 3) множина всіх різних символів, використаних в цих методичних вказівках (українські, латинські і грецькі літери різних шрифтів, розділові знаки, інтервал між словами, математичні знаки і т. п.); 4) множина символів, наявних на клавіатурі будь-якої обчислювальної машини.

Будь-яка послідовність  $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m$  літер  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  алфавіту  $A$  називається *словом* в алфавіті  $A$ . Число  $m$  літер в слові називається *довжиною слова*. Довжину слова нічим не обмежують, тому  $m$  може бути будь-яким натуральним числом. Зауважимо, що літери в слові можуть повторюватися, так що на різних місцях в слові можуть зустрічатися однакові літери. Послідовності, що мають в своєму складі лише одну



літеру, і послідовності, які не містять жодної літери, також вважаються словами. В останньому випадку говорять, що слово має *нульову довжину*. Таке слово називається *порожнім* і позначається нами символом  $*$ . Хоча введення порожнього слова, можливо, виглядає неприродним, однак воно необхідне для логічної завершеності поняття слова. Розглянемо приклади слів: 1) українські слова хлопчик, лампа і т. п. можуть розглядатися як слова в українському алфавіті (у щойно визначеному сенсі); 2) десятковим записом будь-якого натурального числа є слово в алфавіті  $\{0, 1, \dots, 9\}$ ; 3) будь-яке речення цієї книги є словом в алфавіті, що складається з усіх різних символів, що зустрічаються в цих методичних вказівках; 4) весь текст даних методичних вказівок можна вважати словом в тому ж алфавіті.

Нехай  $A$  – довільно обраний непорожній алфавіт. Розглянемо множину  $M$  всіх слів, складених з літер алфавіту  $A$ . Оскільки в цій множині зустрічаються слова як завгодно великої довжини, то загальна кількість слів в ньому нескінченно. Формально множина  $M$  може бути представлена як об'єднання всіх декартових ступенів алфавіту  $A$ , таким чином,  $M=A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$ . Будь-яка підмножина  $L$  множини  $M$  всіх слів алфавіту  $A$  називається *мовою* над алфавітом  $A$ . Мова  $L$  може бути як *скінченною*, так і *нескінченною*. Прикладами мов можуть служити: 1) множина всіх українських слів, що являє собою скінченну мову над українським алфавітом; 2) множина десяткових кодів всіх натуральних чисел, що являє собою нескінченну мову над алфавітом десяткових цифр; 3) сукупність всіляких речень, які можна побудувати зі знаків, які фігурують у цих методичних вказівках. Оскільки довжина речень, використовуваних в природній мові, обмежена, то в останньому випадку ми маємо справу зі скінченною мовою.

Нехай  $A$  – довільно обраний непорожній алфавіт, а  $M$  – множина всіх слів цього алфавіту. Будь-яка функція  $FX = Y$ , що відображає слова  $X$  з множини  $M$  в слова  $Y$  множини  $M$ , називається алфавітним оператором, заданим в множині  $M$ . Іншими словами, алфавітним оператором називається всяка однозначна відповідність, яка ставить у відповідність

словам якогось алфавіту слова того ж алфавіту. Сукупність  $L_1$  всіх тих слів, для кожного з яких алфавітний оператор  $F$  ставить у відповідність деяке цілком визначене слово, називається *областю визначення*, або *вхідною мовою* алфавітного оператора  $F$ . Може трапитися, що алфавітний оператор  $F$  деяким словами множини  $M$  не ставить у відповідність ніякого слова, так що вхідна мова не обов'язково збігається з множиною  $M$ . Множина  $L_2$  всіх слів, які є значеннями алфавітного оператора  $F$ , називається його *областю значень*, або *вихідною мовою*.

Слова вхідної мови називаються *вхідними словами* алфавітного оператора, слова вихідної мови – його *вихідними словами*. Алфавітний оператор, вхідна мова якого збігається з множиною  $M$ , називається *всюди визначеним*; якщо ж вхідна мова є лише частиною множини  $M$ , то алфавітний оператор називається *частковим*. Прикладом *всюди визначеного* алфавітного оператора може служити оператор, визначений на множині десяткових кодів всіх натуральних чисел, який десятковому коду кожного натурального числа ставить у відповідність десятковий код квадрата цього числа. Прикладом *часткового* алфавітного оператора може служити оператор, заданий на тій же множині, який десятковому коду натурального числа ставить у відповідність десятковий код квадратного кореня цього числа, але тільки за умови, що цей корінь є натуральним числом.

Описане вище поняття алфавітного оператора непогано підходить для того, щоб служити засобом математичного опису *діяльності інтелекту*, тобто об'єктивно спостережуваних реакцій інтелекту на зовнішні впливи. Інформація, що сприймається інтелектом, відповідає вхідним словам деякого алфавіту; інформація формується інтелектом, відповідає вихідним словам. Закономірності перетворення інформації інтелектом, тобто *функції інтелекту*, відповідають тим чи іншим алфавітним операторам, що перетворюють вхідні слова у вихідні. Задача математичного опису функцій інтелекту полягає в тому, щоб вказати відповідні цим функціям алфавітні оператори.

І все ж поняття алфавітного оператора має один суттєвий недолік: його задають на нескінченній множині слів, що містить слова як завгодно великої довжини. Ця обставина приводить до потенційної присутності нескінченності в понятті алфавітного оператора, що створює певні незручності при математичному описі функцій інтелекту і практичному їх застосуванні. Цих незручностей можна уникнути, замінивши поняття алфавітного оператора близьким йому поняттям *скінченного алфавітного оператора*. Відмінність скінченного алфавітного оператора від щойно описаного алфавітного оператора полягає лише в тому, що він задається не на нескінченній множині  $A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \dots$  слів різної довжини, а на скінченній множині  $A^m$  слів однакової довжини  $m$ , складених з літер алфавіту  $A$ .

Поняття скінченного алфавітного оператора є дуже зручним для того, щоб служити засобом математичного опису функцій інтелекту. Обмеження, накладене на довжину слів, не може бути перешкодою для його використання в теорії інтелекту, оскільки, як зазначено вище, інтелект людини піддається такому ж обмеженню. Як число  $m$  повинно бути вибрано число, не менше за максимальну довжину слів, з якими може оперувати досліджуваний інтелект. Хоча виникає ускладнення, викликане тим, що інтелект зазвичай оперує словами різної довжини, в той час як в понятті скінченного алфавітного оператора фігурують слова тільки однакової довжини.

Однак це ускладнення легко долається за рахунок введення в алфавіт  $A$  додаткової літери  $\#$ , званої *знаком пробілу* або просто *пробілом*. Слово, що має довжину, меншу, ніж  $m$ , при його математичному описі замінюється словом довжини  $m$ , ліва частина якого збігається з вихідним словом, а права частина являє собою послідовність пробілів (з тим же успіхом можна було б зробити і навпаки, помінявши місцями ліву і праву частини). При читанні формального запису слова знаки пробілу, що стоять в слові правіше всіх інших літер, не повинні братися до уваги. Слово, складене з одних пробілів, тлумачитиметься як пусте слово. Наприклад,

якщо вибрано  $m = 6$ , то слово «лист» буде формально представлено у вигляді слова «лист###». Положення тут таке ж, як при машинному записі числових кодів: довжина всіх кодів прийнята однаковою, проте нулі, що стоять в лівій частині коду, при його читанні до уваги не беруться. Якби ми визначили поняття скінченного алфавітного оператора таким чином, щоб в його вхідну і вихідну мови увійшли і слова меншої довжини, ніж  $m$ , то це істотно ускладнило б математичну мову для запису таких операторів.

Множина  $M$ , на якій поставлено скінченний алфавітний оператор, містить  $c = k^m$  слів, тобто рівно стільки, скільки є всіх різних  $m$ -розрядних  $k$ -кових числових кодів. Всього існує  $c^c$  різних скінченних алфавітних операторів, заданих на множині  $M$ . Для кожної досліджуваної функції інтелекту, в принципі, можна вибрати число  $k$  літер, алфавіт  $A$  і граничну довжину слів  $m$ , таких, що в множині всіляких скінченних алфавітних операторів, заданих на  $A^m$ , завжди знайдеться такий скінченний алфавітний оператор, який може бути прийнятий як адекватний математичний опис цієї функції інтелекту. Задача полягає в тому, щоб, виходячи з фактичних властивостей досліджуваної функції інтелекту, зуміти виділити цей оператор і записати його у вигляді формули на деякій математичній мові. Реалізуючи отриману формулу засобами цифрової обчислювальної техніки, можна буде вивчену функцію інтелекту потім штучно відтворити.

Для того щоб мати можливість математично описувати функції інтелекту, нам необхідна формальна мова, на якій можна було б вести такий опис. Формальна мова повинна обиратися з таким розрахунком, щоб на ній можна було в зручній формі записати будь-який скінченний алфавітний оператор. Таку мову дає нам описувана нижче алгебра скінченних предикатів. Введемо поняття скінченного предиката. Нехай  $A$  – скінченний алфавіт, що складається з  $k$  літер  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ,  $\Sigma$  – множина, що складається з двох елементів, які позначаються символами  $0, 1$  і називаються відповідно *неправдою* та *істиною*. Змінну, задану на множині  $A$ , будемо називати *літерною*, змінну, задану на множині  $\Sigma$ , – *логічною*. *Скінченим  $n$ -місцевим предикатом* над алфавітом  $A$  називається будь-яка

функція  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = t$  від  $n$  літерних аргументів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , заданих на множині  $A$ , що набуває логічні значення  $t$ . Іноді будемо називати скінченний предикат  $f$   $k$ -ковим, підкреслюючи тим самим, що його алфавіт  $A$  складається з  $k$  літер.

Будь-який скінченний предикат  $f$  можна, в принципі, задати за допомогою таблиці його значень. У цій таблиці кожному набору значень аргументів  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ставиться у відповідність значення  $t$  предиката  $f$ . У вигляді прикладу таблицею 1 заданий двомісний предикат  $t = f(x_1, x_2)$ , визначений над алфавітом  $A = \{a, м, п\}$ . По таблиці знаходимо, що, наприклад, на наборі  $(x_1, x_2)$  значень аргументів  $x_1, x_2$ , який дорівнює  $(a, м)$ , предикат  $f$  набуває значення 0, на наборі  $(п, м)$  – значення 1. Аналогічно знаходимо значення предиката і для інших наборів. Розставивши в останньому рядку таблиці логічні значення будь-яким іншим способом, отримаємо інший двомісний предикат над тим же алфавітом.

Таблиця 1

$x_1$	а	а	а	м	м	м	п	п	п
$x_2$	а	м	п	а	м	п	а	м	п
$t$	0	0	1	1	1	0	0	1	1

Для спрощення подальшого викладу зараз нам буде корисно ознайомитися з деякими відомостями про  $n$ -розрядні  $k$ -кові числові коди. При побудові  $k$ -кових кодів використовують  $k$  знаків  $0, 1, \dots, k-1$ , званих  $k$ -ковими цифрами. Число  $k$  називається основою  $k$ -кової системи числення. Цифри в  $k$ -ковому коді розташовуються в певному порядку, значення кожної цифри визначається її положенням у коді. Так, наприклад, в десятковій системі числення в запису 179 цифра 1 позначає число  $10^0$  або  $1 \cdot 10^2$ , цифра 7 – число 7 або  $7 \cdot 10^1$ , цифра 9 – число 9 або  $9 \cdot 10^0$ . Сума цих чисел дає значення коду:

$$179 = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

У загальному вигляді десятковий код  $a_1a_2\dots a_i\dots a_{n-1}a_n$ , де  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_{n-1}, a_n$  – десяткові цифри;  $n$  – число розрядів в коді;  $i$  – номер розряду коду, означає число:

$$a_1a_2\dots a_i\dots a_{n-1}a_n = a_110^{n-1} + a_210^{n-2} + \dots + a_i10^{n-i} + \dots + a_{n-1}10^1 + a_n10^0.$$

Як дізнатися, яке число являє собою той чи інший  $k$ -ковий код? Для цього достатньо його перевести у звичний нам десятковий код. Цей переклад можна здійснити, скориставшись визначенням  $k$ -кового коду. Нехай  $b_1b_2\dots b_i\dots b_{n-1}b_n$  –  $k$ -ковий код, де  $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_{n-1}, b_n$  – якісь довільно вибрані  $k$ -кові цифри. За визначенням цей код являє собою таке число:

$$b_1b_2\dots b_i\dots b_{n-1}b_n = b_1k^{n-1} + b_2k^{n-2} + \dots + b_ik^{n-i} + \dots + b_{n-1}k^1 + b_nk^0.$$

Як приклад переведемо двійковий код 10110011 в десятковий:

$$10110011_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 179_{10}.$$

При одночасному розгляді кодів з різними основами, щоб уникнути плутанини, справа знизу для коду будемо вказувати його основу.

Розглянемо тепер спосіб зворотного перекладу десяткового коду числа в  $k$ -ковий. Нехай задано деяке число  $N$  в десятковому коді, яке ми хочемо перевести в  $k$ -ковий код. Припустимо, що  $b_1b_2\dots b_n \in k$ -ковим кодом числа  $N$ . Тоді:

$$N = b_1k^{n-1} + b_2k^{n-2} + \dots + b_{n-1}k^1 + b_nk^0.$$

Розділимо число  $N$  на  $k$ :

$$\frac{N}{k} = b_1k^{n-2} + b_2k^{n-3} + \dots + b_{n-2}k^0 + \frac{b_n}{k}.$$

Ціла частина частки  $N_1$  цього ділення дорівнює:

$$N_1 = b_1k^{n-2} + b_2k^{n-3} + \dots + b_{n-2}k^1 + b_{n-1}k^0.$$

У залишку отримуємо  $b_n$ . Отже, в результаті ділення числа  $N$  на  $k$  в залишку отримуємо останній розряд  $k$ -кового коду цього числа. Виконаємо друге ділення, розділивши число  $N_1$  на  $k$ . У цілій частині частки отримуємо число

$$N_2 = b_1k^{n-3} + b_2k^{n-4} + \dots + b_{n-3}k^1 + b_{n-2}k^0,$$

а в залишку –  $b_{n-1}$ , тобто передостанній розряд  $k$ -кового коду числа  $N$ . При третьому діленні в залишку отримуємо  $b_{n-2}$  і т. д. При  $n$ -ному діленні в

залишку отримуємо  $b_1$ , тобто перший розряд  $k$ -кового коду, а в цілій частині частки – нуль.

У підсумку приходимо до наступного правила перекладу десяткового коду в  $k$ -ковий. Для переведення десяткового коду в  $k$ -ковий код слід розділити його на  $k$ , отриману цілу частину частки знову розділити на  $k$  і т. д. Ділення продовжувати доти, поки в цілій частині частки вийде нуль. Зчитуючи залишки цих поділів у зворотному порядку, отримуємо  $k$ -ковий код числа. Як приклад переведемо число 169 у двійковий код. Виконуємо послідовні ділення заданого числа на 2, в дужках записуємо остатки від ділення:  $169:2 = 84$  (1),  $84:2 = 42$  (0),  $42:2 = 21$  (0),  $21:2 = 10$  (1),  $10:2 = 5$  (0),  $5:2 = 2$  (1),  $2:2 = 1$  (0),  $1:2 = 0$  (1). Зчитуючи залишки, отримаємо двійковий код числа:  $169_{10} = 10101001_2$ .

Введемо число  $L(n, k)$  всіх різних  $n$ -розрядних  $k$ -кових кодів. Воно виражається формулою  $L(n, k) = k^n$ . Для прикладу підрахуємо кількість всіх трьохрозрядних вісімкових кодів:  $L(3, 8) = 8^3 = 512$ . Набори значень аргументів  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -місних  $k$ -кових предикатів зручно інтерпретувати як  $n$ -розрядні  $k$ -кові числові коди. При цьому літери  $a_1, a_2, \dots, a_k$  алфавіту  $A$  інтерпретуємо як  $k$ -кові цифри відповідно  $0, 1, \dots, k - 1$ . У таблиці значень предиката набори значень аргументів будемо розташовувати в порядку зростання чисел, що представляються ними. Саме в такому порядку розташовані, наприклад, дворозрядні трійчасті коди в таблиці 1. В цьому випадку літери «а», «м», «п» інтерпретуємо відповідно як трійчасті цифри 0, 1, 2. Введемо число  $M(n, k)$  всіх різних наборів значень аргументів  $n$ -місцевого  $k$ -кового предиката. Очевидно,  $M(n, k) = L(n, k) = k^n$ . Кількість стовпців в таблиці значень предиката, в яких розташовуються набори значень аргументів, визначається величиною  $M(n, k)$ . Наприклад, кількість стовпців таблиці 1 дорівнює  $M(2, 3) = 3^2 = 9$ . Кожному набору значень скінченного предиката дамо свій номер, як таке приймемо число, відповідне до цього набору при його інтерпретації у вигляді числового коду.

Пронумеруємо усі  $k$ -кові  $n$ -місні предикати. З цією метою будемо інтерпретувати послідовність значень предиката, розташовану в нижній частині його таблиці, як  $kn$ -розрядний двійковий код. При цьому символ 0 інтерпретуємо як цифру нуль, а символ 1 – як цифру один. Число, відповідне цьому коду, приймемо як номер скінченного предиката. Наприклад, предикату, поданому в таблиці 1, присвоюємо номер 001110011, що відповідає числу 115 у десятковому записі. Нехай  $N(n, k)$  – число всіх різних  $n$ -місних  $k$ -кових предикатів. Очевидно, воно збігається з числом всіх  $kn$ -розрядних двійкових кодів, тому  $N(n, k) = L(k^n, 2) = 2^{(kn)}$ . У вигляді прикладу визначимо кількість усіх різних двомісних трійчастих предикатів:  $N(2, 3) = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$ .

Кожному скінченному алфавітному оператору можна поставити у відповідність деякий свій скінченний предикат. Зробити це можна в такий спосіб. Нехай

$$F(x_1x_2\dots x_m) = y_1y_2\dots y_m$$

– довільно обраний скінченний алфавітний оператор, що перетворює вхідні слова  $x_1x_2\dots x_m$  довжини  $m$  в вихідні слова  $y_1y_2\dots y_m$  тієї ж довжини, що складаються з літер алфавіту  $A$ . Побудуємо  $2m$ -місний скінченний предикат  $f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m)$  над алфавітом  $A$ , керуючись таким правилом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } F(x_1x_2\dots x_m) = y_1y_2\dots y_m, \\ 0, & \text{якщо } F(x_1x_2\dots x_m) \neq y_1y_2\dots y_m. \end{cases} \quad (1)$$

Запишемо рівняння:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m) = 1. \quad (2)$$

Це рівняння пов'язує змінні  $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m$  деяким відношенням. Підставляючи в (2) літери  $x_1, x_2, \dots, x_m$  вхідного слова  $x_1x_2\dots x_m$  алфавітного оператора  $F$ , отримаємо в результаті розв'язання цього рівняння літери  $y_1, y_2, \dots, y_m$  вихідного слова  $y_1y_2\dots y_m$ . Таким чином, предикат  $f$ , побудований зазначеним способом, містить в собі всю інформацію про цікавлячий нас алфавітний оператор  $F$ . З його допомогою



можна визначити вихідне слово алфавітного оператора, яке представляють цим предикатом, для будь-якого вхідного слова.

Важливо відзначити, що точно таким же способом можна задати за допомогою скінченних предикатів не тільки всюди визначені, але також і будь-які часткові скінченні алфавітні оператори. Якщо для вхідного слова  $x_1x_2\dots x_m$  алфавітний оператор  $F$  не ставить у відповідність ніякого вихідного слова, це означає, що рівняння (2) для заданого набору значень аргументів  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  не має жодного розв'язання щодо набору змінних  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ , тобто що розв'язання цього рівняння не існує. Важливо, що за допомогою одного скінченного предиката можна задати ціле сімейство скінченних алфавітних операторів. Це досягається введенням в предикат додаткової змінної  $z$ , значеннями якої слугують номери алфавітних операторів, що задаються. Нехай, наприклад, нам потрібно представити у вигляді скінченного предиката сімейство, що складається з трьох алфавітних операторів:

$$F_1(x_1x_2\dots x_m) = y_1y_2\dots y_m,$$

$$F_2(x_1x_2\dots x_m) = y_1y_2\dots y_m,$$

$$F_3(x_1x_2\dots x_m) = y_1y_2\dots y_m.$$

Будуємо  $2m + 1$ -місний предикат  $f(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m, z)$ , вважаючи, що при  $z = 1$  він відповідає алфавітному оператору  $F_1$ , при  $z = 2$  – оператору  $F_2$ , при  $z = 3$  – оператору  $F_3$ .

За допомогою скінченних предикатів можна представити не тільки цікаві для нас скінченні алфавітні оператори з однозначними значеннями, а й так звані багатозначні оператори. *Багатозначним скінченим алфавітним* оператором називається така відповідність  $F$ , яка пов'язує кожне вхідне слово з  $A^m$  з деяким сімейством вихідних слів з тієї ж множини. Якщо вхідному слову  $x_1x_2\dots x_m$  алфавітний оператор  $F$  ставить у відповідність декілька вихідних слів, значить, рівняння (2) для заданого набору значень аргументів  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  має декілька розв'язань щодо набору змінних  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

Багатозначний оператор можна розглядати як узагальнення поняття однозначного скінченного алфавітного оператора. *Однозначний скінченний алфавітний оператор* – це такий багатозначний скінченний оператор, який кожному вхідному слову ставить у відповідність деяку множину вихідних слів, що складається не більше ніж з одного слова. Якщо кожному вхідному слову ставиться у відповідність множина, що складається не менше ніж з одного слова, то такий скінченний алфавітний оператор називається всюди визначеним, якщо ж деяким з вхідних слів ставиться у відповідність порожня множина слів, то – частковим.

Спочатку, можливо, дещо бентежить те, що скінченні предикати дають нам більше, ніж ми від них очікували. Справді, ввівши скінченні предикати, ми хотіли отримати засіб представлення тільки для однозначних скінченних алфавітних операторів, фактично ж отримали у вигляді «безкоштовного додатку» можливість представлення і багатозначних операторів. Добре це чи погано? Якби виявилось, що багатозначні алфавітні оператори не приносять користі для теорії інтелекту, то це, звичайно, було б погано, оскільки в теорії інтелекту з'явилися б математичні структури, що не інтерпретуються. На щастя, однак, виявляється, що багатозначні алфавітні оператори (а це покаже подальший виклад) дуже зручні для математичного опису висловлювань або суджень інтелекту – важливих об'єктів теорії інтелекту. Однозначним ж алфавітним операторам відводиться роль засобу математичного опису діяльності інтелекту.

Читач, мабуть, помітив, що при переході від скінченних алфавітних операторів до відповідних їм скінченних предикатів ми одночасно перейшли від змінних  $X$  і  $Y$ , значеннями яких були слова, до змінних  $x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m$ , що пробігають літерні значення. Перехід до літерних змінних дуже важливий, він дає нам в руки зручну математичну мову для опису функцій інтелекту. Важливо зрозуміти, що літерні змінні було б неможливо використовувати, якщо б ми свого часу не перейшли до скінченних алфавітних операторів, а продовжували базуватися на понятті

алфавітного оператора, заданого на нескінченній множині слів довільної довжини.

При спробі представлення алфавітних операторів за допомогою предикатів з літерними змінними нам довелося б зіткнутися з необхідністю введення нескінченного числа літерних змінних. Якщо б ми, вже після введення скінченної множини слів, зберегли в даній множині слова різної довжини, то це також завадило б прийти до літерних змінних, через те, що треба було б ввести предикати від незбагнено змінного числа змінних. Скінченні предикати з літерними змінними – це та винагорода, яку ми отримуємо в обмін на відмову від традиційного поняття алфавітного оператора, що базується на абстракції потенційної нескінченності.

Розглянемо приклад представлення скінченного алфавітного оператора за допомогою скінченного предиката. Нехай нам дано оператор  $F X = Y$ , що перетворює дволітерні слова  $X = x_1 x_2$  українського алфавіту в однолітерні слова  $Y = y_1$  того ж алфавіту. Вид перетворення вказано в таблиці 2. Цьому алфавітному оператору ставимо у відповідність предикат  $f(x_1, x_2, y_1) = t$ , описаний у таблиці 3. У таблиці 2 вказані в повному обсязі не всі стовпці, а тільки ті з них, у яких в останньому рядку стоїть значення 1. Вважаємо, що у всіх відсутніх стовпцях предикат набуває значення 0.

Таблиця 2

$X$	до	ре	ми	фа	ля	си
$Y$	а	о	у	и	е	я

Таблиця 3

$x_1$	д	р	м	ф	л	с
$x_2$	о	е	и	а	я	и
$y_1$	а	о	у	и	е	я
$t$	1	1	1	1	1	1

Оскільки в українському алфавіті 33 літери, то загальне число стовпців таблиці мало б становити  $33^3 \approx 30$  тисяч. У зв'язку з настільки різким збільшенням розміру таблиці у читача може скластися враження, що представлення операторів у вигляді скінченних предикатів не дає ніяких переваг і навіть ускладнює справу, проте це не так. Справа в тому, що скінченні предикати, на відміну від скінченних алфавітних операторів, які довелося б описувати засобами багатозначної логіки, допускають дуже зручний аналітичний запис, подібний до формул алгебри логіки. До розробки цього аналітичного запису ми зараз і приступаємо.

### Вправи

1. Наведіть приклади скінченних і нескінченних алфавітів.
2. Наведіть приклади слів.
3. Наведіть приклади скінченних і нескінченних мов.
4. Наведіть приклади всюди визначених, часткових і багатозначних алфавітних операторів.
5. Наведіть приклади вживання знака пробілу.
6. Виразіть таблицею який-небудь тримісний предикат.
7. Знайдіть десяткове значення якого-небудь 8-розрядного 8-кового коду.
8. Переведіть яке-небудь трирозрядне десяткове число в двійковий код.
9. Визначте число усіх 6-розрядних трійчастих кодів.
10. Визначте число стовпців в таблиці значень якого-небудь предиката.
11. Визначте номер якогось скінченного предиката.
12. Визначте число всіх 5-кових 8-місних предикатів.
13. Уявіть у вигляді предиката який-небудь всюди визначений скінченний алфавітний оператор.
14. Уявіть у вигляді предиката який-небудь частковий скінченний алфавітний оператор.

15. Уявіть у вигляді предиката сімейство, що складається з трьох яких-небудь скінченних алфавітних операторів.

16. Уявіть у вигляді предиката який-небудь багатозначний скінченний алфавітний оператор.

### **Контрольні запитання**

1. Яку роль має відіграти теорія інтелекту в справі комп'ютеризації та інформатизації людського суспільства?

2. Які знання про людський інтелект могли б сприяти вдосконаленню штучного інтелекту?

3. Які проблеми стоять перед теорією інтелекту?

4. Чи достатньо знань, які до теперішнього часу накопичила лінгвістика, для створення комп'ютерної програми повноцінного машинного перекладу текстів з англійської мови на українську?

5. Чи достатній апарат класичної математики для формального опису будь-яких механізмів людського інтелекту?

6. Яку роль відіграють в теорії інтелекту детерміновані, дискретні і скінченні об'єкти?

7. Що таке алфавітний оператор?

8. Що таке скінченний алфавітний оператор?

9. Що таке скінченні предикати, як вони пов'язані зі скінченними алфавітними операторами?

10. Як пов'язані числові коди зі скінченними предикатами?

11. Що таке багатозначний алфавітний оператор і як його висловити за допомогою предиката?

12. Яка роль скінченних предикатів в теорії інтелекту?

## 2 ФОРМУЛИ І ТОТОЖНОСТІ АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

Для того щоб отримати можливість записувати скінченні предикати у вигляді формул, ми введемо спеціальну алгебраїчну систему, яка називається *алгеброю скінченних предикатів*. Точніше, буде введена не одна алгебра, а ціле сімейство таких алгебр. Тип *алгебри скінченних предикатів* характеризується *алфавітом літер*  $A$ , що складається з  $k$  символів  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , і *алфавітом змінних*  $B$ , що складається з  $n$  символів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Засобами алгебри скінченних предикатів з алфавітом літер  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  і алфавітом змінних  $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  може бути записаний будь-який  $n$ -місцевий  $k$ -ковий предикат  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданий над алфавітом  $A$ . Ми будемо вважати, що літери і змінні алфавітів  $A$  і  $B$  пронумеровані.

Введемо поняття *формули алгебри скінченних предикатів* з алфавітом літер  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  і алфавітом змінних  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Формули будемо будувати з таких символів: літер  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , знаків диз'юнкції  $\vee$  і кон'юнкції  $\wedge$ , відкриваючих і закриваючих дужок  $(, )$ , логічних констант  $0$  і  $1$ , які називаються відповідно *неправдою* та *істиною*. Поняття формули алгебри скінченних предикатів визначимо індуктивно за допомогою такої системи з чотирьох правил:

- 1) символи  $0$  і  $1$  називаємо формулами;
- 2) всі вирази виду  $a_i(x_j)$ , де індекс  $i$  знаходиться в межах від  $1$  до  $k$ , а індекс  $j$  – в межах від  $1$  до  $n$ , називаємо формулами;
- 3) якщо вирази  $A$  і  $B$  є формулами, то вираз  $(A \vee B)$  називаємо формулою;
- 4) якщо вирази  $A$  і  $B$  – формули, то вираз  $(A \wedge B)$  – теж формула.

Кожну формулу будемо розглядати як позначення деякого предиката  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданого над алфавітом  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Закон відповідності між формулами і позначуваними ними предикатами визначаємо індуктивно такими правилами: 1) формула  $0$  позначає *тотожно помилковий*

*предикат*, тобто предикат, що дорівнює 0 для всіх наборів значень аргументів; 2) формула 1 позначає *тотожно істинний предикат*, тобто предикат, що дорівнює 1 для всіх наборів значень аргументів; 3) формула  $a_i(x_j)$  позначає предикат, що дорівнює 1 для всіх тих наборів значень аргументів, у яких  $x_j=a_i$ , і 0 – для всіх інших наборів. Нехай формула  $A$  позначає предикат  $f$ , а формула  $B$  – предикат  $g$ ; тоді: 4) формула  $(A \vee B)$  позначає предикат, що дорівнює 0 для всіх тих наборів значень аргументів, при яких  $f=0$  і  $g=0$ , і 1 – для інших наборів; 5) формула  $(A \wedge B)$  позначає предикат, що дорівнює 1 для всіх тих наборів значень аргументів, при яких  $f=1$  і  $g=1$ , і 0 – для інших наборів.

Предикат  $(A \vee B)$  називається *диз'юнкцією* або *логічної сумою*, а предикат  $(A \wedge B)$  – *кон'юнкцією*, або *логічним добутком* предикатів  $A$  і  $B$ . Функція, яка ставить у відповідність будь-яким предикатам  $A$  і  $B$  предикат  $(A \vee B)$ , називається *операцією диз'юнкції*, або, операцією *логічного складання предикатів*. Аналогічно функцію, що ставить у відповідність довільним предикатам  $A$  і  $B$  предикат  $(A \wedge B)$ , назовемо *операцією кон'юнкції*, або, операцією *логічного множення предикатів*. Операції диз'юнкції і кон'юнкції будемо називати *елементарними операціями алгебри скінченних предикатів*. Нехай  $x, y$  – логічні змінні. Функція  $x \vee y$  зі значеннями  $0 \vee 0 = 0, 0 \vee 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 1 \vee 1 = 1$  називається *функцією диз'юнкції*, а функція  $x \wedge y$  зі значеннями  $0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 0, 1 \wedge 0 = 0, 1 \wedge 1 = 1$  – *функцією кон'юнкції*. У ряді випадків формули алгебри скінченних предикатів зручно розглядати як значення відповідних предикатів, тобто як логічні константи. При такій інтерпретації записи виду  $(A \vee B)$  і  $(A \wedge B)$  можна розглядати як функції диз'юнкції і кон'юнкції, а вирази  $A$  і  $B$ , що входять до їх складу – як логічні змінні.

Кожну формулу вигляду  $a_i(x_j)$  зручно розглядати як одномісний предикат, що залежить тільки від змінної  $x_j$  і визначається таким чином:

$$a_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщ } x_j = a_i, \\ 0, & \text{якщ } x_j \neq a_i. \end{cases} \quad (3)$$

Предикат  $a_i(x_j)$  нібито «узнає» одну єдину літеру  $a_i$  серед усіх можливих літер алфавіту  $A$ , тому назвемо його предикатом узнавання літери  $a_i$  або просто *узнавання літери  $a_i$* , що залежить від змінної  $x_j$ . Всього є  $kn$  різних узнавань літер. Діючи на різні узнавання літер операціями диз'юнкції і кон'юнкції, багаторазово і в різному порядку, ми отримуємо різні предикати. Узнавання літер будемо вважати *елементарними предикатами алгебри скінченних предикатів*. Сукупність елементарних операцій і елементарних предикатів утворює *базис алгебри скінченних предикатів*.

Розглянемо приклад формули алгебри скінченних предикатів. нехай  $k = 3, n = 4, a_1 = a, a_2 = m, a_3 = p, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t$ . Вираз

$$((a(y) \wedge a(t)) \wedge ((m(x) \wedge m(z)) \vee (p(x) \wedge p(z)))) \quad (3a)$$

є формулою алгебри скінченних предикатів. Дійсно, згідно з другим правилом, вирази  $a(y), a(t), m(x), m(z), p(x), p(z)$  – формули. За допомогою четвертого правила з наявних вже формул будемо такі формули:  $(a(y) \wedge a(t)), (m(x) \wedge m(z)), (p(x) \wedge p(z))$ . З двох останніх формул за третім правилом утворюємо формулу  $((m(x) \wedge m(z)) \vee (p(x) \wedge p(z)))$ . Нарешті, застосовуючи четверте правило до формул  $(a \wedge (a(y) \wedge a(t))), ((m(x) \wedge m(z)) \vee (p(x) \wedge p(z)))$ , отримуємо формулу (3a).

Недоліком введених формул є те, що вони виглядають невиправдано громіздкими. Це добре видно на наведеному прикладі. Цей недолік ми компенсуємо тим, що будемо користуватися *скороченим записом формул*. При переході від повного запису формули до скороченою будемо опускати зовнішні дужки, тобто формули  $(A \vee B)$  і  $(A \wedge B)$  ми будемо писати в вигляді  $A \vee B$  і  $A \wedge B$ . Далі, узнавання літер  $a_i(x_j)$  будемо записувати в більш короткій і зручній формі  $x_j^{a_i}$ , називаючи літеру  $a_i$  в цьому записі *показником узнавання літери*. Нарешті, знак кон'юнкції в скорочених записах формул будемо замінювати крапкою або ж зовсім опускати  $A \wedge B = A \cdot B = AB$ .

Крім того, в записах формул будемо опускати всі ті дужки, наявність яких не є обов'язковою для правильного розуміння змісту формули. Якщо дужки, що регулюють порядок виконання дій в скороченому записі



формули не вказані, то, за прийнятою нами угодою про старшинство операцій, спочатку будемо виконувати операції кон'юнкції і лише потім – операції диз'юнкції, наприклад, запис  $A \vee B \wedge C$  слід розуміти як формулу  $A \vee (B \wedge C)$ . Цією угодою операція кон'юнкції приймається *старшою* по відношенню до операції диз'юнкції. При відсутності дужок у формулі домовимося першою з однотипних операцій виконувати ту, знак якої стоїть у формулі лівіше, наприклад,  $A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C$ ,  $A \wedge B \wedge C = (A \wedge B) \wedge C$ . Прийняті нами правила скорочення запису формул такі, що при необхідності завжди можна від скороченого запису формули перейти до самої формули. Застосовуючи, наприклад, тільки що розглянуті способи скороченого запису, формулу (3а) можна представити в більш компактному і зручному для читання вигляді:

$$y^a t^a (x^m z^m \vee x^p z^p). \quad (3б)$$

Від формули завжди можна перейти до таблиці предиката, що нею позначається. Для цього потрібно за формулою обчислити значення предиката для усіх можливих наборів значень аргументів. Обчислимо, наприклад, значення предиката  $f(x, y, z, t)$ , представленого формулою (3б), для наборів значень аргументів  $(m, a, m, a)$  і  $(m, a, p, a)$ :

$$f(m, a, m, a) = a^a a^a (m^m m^m \vee m^p m^p) = 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 0) = 1 \cdot (1 \vee 0) = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$f(m, a, p, a) = a^a a^a (m^m p^m \vee m^p p^p) = 1 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 0 \vee 0 \cdot 1) = 1 \cdot (0 \vee 0) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Аналогічні обчислення для усіх можливих наборів, що складаються з чотирьох літер, складених з літер  $a, m, p$  (їх всього  $3^4 = 81$ ), показують, що предикат  $f$  «узнає» два слова «мама» і «тато»: він ставить їм у відповідність значення 1, тобто істину. Іншим словами предикат  $f$  ставить у відповідність значення 0, тобто неправда.

Виникає питання, чи є *повною* введена нами алгебра скінченних предикатів, тобто чи знайдеться для кожного скінченного предиката формула, що його позначає? Виявляється, що алгебра скінченних предикатів є *повною*. Дійсно, тотожно помилковий предикат може бути записаний у вигляді формули 0. Предикат, що набуває значення 1 тільки на одному наборі значень аргументів  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , можна представити

формулою. Предикат, що набуває значення 1 на довільних наборах  $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1n}), (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{2n}), \dots, (\sigma_{m1}, \sigma_{m2}, \dots, \sigma_{mn})$ , може бути представлений формулою

$$x_1^{\sigma_{11}} x_2^{\sigma_{12}} \dots x_n^{\sigma_{1n}} \vee x_1^{\sigma_{21}} x_2^{\sigma_{22}} \dots x_n^{\sigma_{2n}} \vee \dots \vee x_1^{\sigma_{m1}} x_2^{\sigma_{m2}} \dots x_n^{\sigma_{mn}}.$$

Таким чином, будь-який скінченний предикат може бути записаний мовою алгебри скінченних предикатів.

Алгебра скінченних предикатів не тільки повна, але навіть в деякому сенсі *надлишкова*. Так, ми бачимо, що введена в ній першим правилом формула (1) нам не знадобилася для запису довільних предикатів. Позначений формулою (1) тотожно істинний предикат може бути виражений за допомогою інших засобів алгебри скінченних предикатів, наприклад, у формі диз'юнкції усіх можливих кон'юнкцій вигляду  $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$ . У разі, коли  $k \geq 2$ , тобто коли алфавіт  $A$  містить принаймні дві літери  $a_1$  і  $a_2$ , можна обійтися і без формули 0. Позначений цією формулою тотожно помилковий предикат може бути записаний, наприклад, у вигляді формули  $x_1^{a_1} x_1^{a_2}$ .

Виключимо з цього визначення формули алгебри скінченних предикатів перше правило, що вводить формули 0 і 1; крім того, припустимо, що  $k \geq 2$ , і розглянемо питання, чи можна в цих умовах забезпечити високий ступінь спрощення визначення формули при збереженні повноти алгебри. Виявляється, що при прийнятих припущеннях алгебра скінченних предикатів *нескоротна* в тому сенсі, що будь-які подальші скорочення в останніх правилах утворення її формул ведуть до неповноти даної алгебри. Дійсно, виключимо з числа формул один з виразів:  $a_i(x_j)$ , що вводится другим правилом. Тоді ми не зможемо утворити формулу для позначення предиката, що обертається в 1 на всіх тих наборах значень аргументів, у яких  $x_j = a_i$ , і в 0 – на всіх інших наборах. Якщо ж ми виключимо третє правило, тоді стане неможливим представлення у вигляді формули тотожно істинного предиката. Виключаючи четверте правило, ми не зможемо представити у вигляді формули тотожно хибний предикат.

Таким чином, формули 0 і 1 необов'язкові для алгебри скінченних предикатів. Їх введення не має права продовжувати виразні можливості цієї алгебри, оскільки і без цих формул алгебра скінченних предикатів повна. Символи 0 і 1 включені в число формул лише тому, що вони забезпечують додаткові зручності при користуванні алгеброю скінченних предикатів. Зауважимо, що формула 0 для повноти алгебр, у яких  $k = 1$ , необхідна. Алгебри цього типу вимагають особливого розгляду. Алфавіт  $A$  таких алгебр складається з однієї літери  $a_1$ . Предикати, які охоплюються цими алгебрами, набувають значення лише на одному наборі значень аргументів  $(a_1, a_1, \dots, a_1)$ , в якому літера  $a_1$  зустрічається  $n$  раз. Алгеброю охоплюється лише два предиката: 0 і 1. Можна показати, що алгебри предикатів цього типу зводяться до алгебри булевих функцій.

Приступимо до вивчення властивостей алгебри скінченних предикатів. Спочатку розглянемо її основні тотожності. Назвемо *тотожними* формули, які відображають один і той же предикат. Факт тотожності формул будемо позначати знаком  $\equiv$ . Для рівності значень предикатів будемо використовувати знак  $=$ . Нехай  $A, B, C$  – довільні формули алгебри скінченних предикатів. Справедливі такі тотожності:

1) *закони комутативності*

$$A \vee B \equiv B \vee A, \quad (4)$$

$$AB \equiv BA; \quad (5)$$

2) *закони асоціативності*

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), \quad (6)$$

$$(AB)C \equiv A(BC); \quad (7)$$

3) *закони дистрибутивності*

$$(A \vee B)C \equiv AC \vee BC, \quad (8)$$

$$AB \vee C \equiv (A \vee C)(B \vee C); \quad (9)$$

4) *закони ідемпотентності*

$$A \vee A \equiv A, \quad (10)$$

$$AA \equiv A; \quad (11)$$

5) *закони елімінації (поглинання)*

$$A \vee AB \equiv A, \quad (12)$$

$$A(A \vee B) \equiv A. \quad (13)$$

Назви для наведених тотожностей запозичені з алгебри булевих функцій, де розглядаються закони, які збігаються з ними за формою. Однак в алгебрі булевих функцій формули позначають не скінченні предикати, а булеві функції. Справедливість тотожностей легко перевіряється перебором усіх можливих значень предикатів  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Наприклад, доведемо перший закон комутативності:  $0 \vee 0 \equiv 0 \vee 0$ ,  $0 \vee 1 \equiv 1 \vee 0$ ,  $1 \vee 0 \equiv 0 \vee 1$ ,  $1 \vee 1 \equiv 1 \vee 1$ . Справедливий, крім того, ряд тотожностей, в яких беруть участь логічні константи:

$$A \vee 1 \equiv 1, \quad (14)$$

$$A \cdot 0 \equiv 0, \quad (15)$$

$$A \cdot 1 \equiv A, \quad (16)$$

$$A \vee 0 \equiv A. \quad (17)$$

Нехай  $x$  – довільна літерна змінна. Має місце така тотожність:

$$x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_k} \equiv 1. \quad (18)$$

Дійсно, яку б літеру алфавіту  $A$  ми не підставили замість  $x$  в ліву частину рівності (18), завжди один з диз'юнктивних членів, а разом з ним і вся диз'юнкція, обертається в 1. Тотожність (18) назвемо законом істинності. Нехай  $a$  і  $b$  – довільні, але відрізняються один від одного ( $a \neq b$ ) літери алфавіту  $A$ . Мають місце такі тотожності:

$$x^a x^b \equiv 0. \quad (19)$$

Справді, яку б літеру ми ні підставили замість  $x$  в ліву частину рівності (19), завжди хоча б один з кон'юнктивних членів обернеться в 0, а разом з ним обернеться в 0 і вся ліва частина рівності (19). Тотожність (19) назвемо *законом хибності*. Закон істинності в певному сенсі можна розглядати як аналог закону виключеного третього алгебри булевих функцій, а закон хибності – як аналог її закону протиріччя.

З абстрактної точки зору введена нами алгебра скінченних предикатів є дистрибутивною решіткою з нулем і одиницею. А саме, це є множина всіх  $n$ -місних  $k$ -кових предикатів із заданими на ньому бінарними

операціями диз'юнкції і кон'юнкції, для яких виконуються аксіоми (4) – (17) дистрибутивної решітки з нулем і одиницею. Роль нуля в алгебрі скінченних предикатів виконує тотожно хибний предикат 0, роль одиниці – тотожно істинний предикат 1. Важливо зауважити, що в алгебрі скінченних предикатів виконуються понад цього ще й тотожності (18) і (19). Як буде показано нижче, наявність цих тотожностей дозволяє ввести в алгебрі скінченних предикатів третю, унарну операцію – заперечення – і розглядати цю алгебру як булеву алгебру. Через наявність тотожностей (18) і (19) алгебра скінченних предикатів виявляється багатшою властивостями, ніж булева алгебра, взята в чистому вигляді.

Цікаво з'ясувати питання: чи повна система тотожностей, введених нами в алгебрі скінченних предикатів. Іншими словами, чи можна за допомогою цих тотожностей довести тотожність будь-яких двох формул алгебри скінченних предикатів, що позначають один і той же предикат? Трохи пізніше буде доведено, що система тотожностей (4) – (19) в зазначеному сенсі повна. Ця система тотожностей розбиває всі множини формул алгебри скінченних предикатів на класи еквівалентності таким чином, що кожному з цих класів може бути взаємно однозначно зіставлений свій скінченний предикат.

Не всі з перелічених тотожностей, однак, необхідні для досягнення повноти. Тому кількість тотожностей в системі можна скоротити. Наприклад, справедливність тотожностей (14) і (15) може бути доведена на основі інших тотожностей:

$$A \vee 1 \equiv 1 \vee A \equiv 1 \vee A \cdot 1 \equiv 1 \vee 1 \cdot A \equiv 1; A \cdot 0 \equiv 0 \cdot A \equiv 0 \cdot (0 \vee A) \equiv 0.$$

Із сукупності інших тотожностей виводиться другий закон дистрибутивності (9):

$$\begin{aligned} AB \vee C &\equiv AB \vee C \vee CB \equiv AB \vee C \vee CA \vee CB \equiv AB \vee CC \vee CA \vee CB \equiv BA \vee CA \vee \\ &\vee BC \vee CC \equiv (B \vee C) \wedge A \vee (B \vee C)C \equiv A(B \vee C) \vee C(B \vee C) \equiv (A \vee C)(B \vee C). \end{aligned}$$

Було б цікаво відзначити якусь нескоротну повну систему тотожностей алгебри скінченних предикатів, зручну в ролі системи аксіом для цієї алгебри.

Алгебру скінченних предикатів можна визначити абстрактно як якусь алгебраїчну систему. Розглянемо множину  $M$ , в якій містяться, як найменш, два елементи:  $0$  і  $1$ , і  $k \cdot n$  елементів  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n$ ). Нехай на множині  $M$  задано дві операції:  $\circ$  і  $\Delta$ , що задовольняють такі аксіоми:

$$a \circ b \equiv b \circ a, a \Delta b \equiv b \Delta a, \quad (20)$$

$$(a \circ b) \circ c \equiv a \circ (b \circ c), (a \Delta b) \Delta c \equiv a \Delta (b \Delta c), \quad (21)$$

$$(a \circ b) \Delta c \equiv (a \Delta c) \circ (b \Delta c), (a \Delta b) \circ c \equiv (a \circ c) \Delta (b \circ c), \quad (22)$$

$$a \circ a \equiv a, a \Delta a \equiv a, \quad (23)$$

$$a \circ (a \Delta b) \equiv a, a \Delta (a \circ b) \equiv a, \quad (24)$$

$$a \circ 1 \equiv 1, a \Delta 0 \equiv 0, a \Delta 1 \equiv a, a \circ 0 \equiv a, \quad (25)$$

$$a_{1j} \circ a_{2j} \circ \dots \circ a_{kj} \equiv 1, (1 \leq j \leq n), \quad (26)$$

$$a_{i_1j} \Delta a_{i_2j} \equiv 0, (i_1 \neq i_2, 1 \leq i_1, i_2 \leq k, 1 \leq j \leq n). \quad (27)$$

Тотожності (20) – (27) назвемо *аксіомами абстрактної алгебри скінченних предикатів*. Будь-яка конкретна алгебраїчна система, яка задовольняє перелічені вимоги, ізоморфна описаній раніше алгебрі скінченних предикатів. Щоб перейти від абстрактного визначення алгебри скінченних предикатів до колишнього її конкретного визначення, слід множину  $M$  проінтерпретувати як множину усіх можливих  $k$ -кових  $n$ -місних предикатів, елементи  $0$  і  $1$  – як тотожно помилковий і тотожно істинний предикати, елементи  $a_{ij}$  – як предикати, операції  $\circ$  і  $\Delta$  – як диз'юнкцію і кон'юнкцію предикатів

Зауважимо, що наведене вище визначення абстрактної алгебри скінченних предикатів допускає ще одну, двоїсту першій, інтерпретацію. А саме, множину  $M$ , як і раніше, інтерпретуємо як множину всіляких  $k$ -кових  $n$ -місних предикатів, елементи  $0$  і  $1$  – як тотожно істинний і тотожно хибний предикати, елементи  $a_{ij}$  – як предикати вигляду:

$$P_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_j = a_i, \\ 1, & \text{якщо } x_j \neq a_i. \end{cases} \quad (28)$$

Операції  $\circ$  і  $\Delta$  інтерпретуємо як кон'юнкцію і диз'юнкцію предикатів. Цікаво відзначити, що в межах кожної з цих двох інтерпретацій абстрактної алгебри скінченних предикатів при  $k > 1$

подвійності не спостерігається (така подвійність має місце в алгебрі булевих функцій і в алгебрі скінченних предикатів при  $k = 1$ ). Хоча при заміні знака  $\circ$  на  $\Delta$  і знака  $0$  на  $1$ , і навпаки, набір тотожностей (20) – (25) залишається тим же самим, проте тотожності (26) і (27) не переходять одна в одну.

Може скластися враження, що алгебра скінченних предикатів є узагальненням алгебри булевих функцій. Так, ми бачимо, що обидві алгебри належать до класу булевих алгебр. Крім того, в окремому випадку, коли  $k = 2$  і  $A = \{0,1\}$ , тотожності (18) і (19) перетворюються відповідно до закону виключеного третього  $x \vee \bar{x} = 1$  і закону протиріччя  $x \bar{x} = 0$  алгебри булевих функцій. Тут позначено  $x^1 = x$ ,  $x^0 = \bar{x}$ . Усі тотожності (4) – (19) алгебри скінченних предикатів у цьому випадку за формою збігаються з тотожностями алгебри булевих функцій. І все ж неправильно було б стверджувати, що алгебра булевих функцій – це окремий випадок алгебри скінченних предикатів.

Справа в тому, що зміст, вкладений в операцію заперечення  $\bar{x}$  в алгебрі булевих функцій і в предикат узнавання нуля  $x^0$  в алгебрі скінченних предикатів при  $k = 2$ ,  $A = \{0, 1\}$ , різний. У той час як в алгебрі булевих функцій операцією заперечення можна діяти на будь-яку булеву функцію, в алгебрі скінченних предикатів при  $k = 2$ ,  $A = \{0, 1\}$  положення інше: узнаванням нуля дозволяється діяти лише на літерні аргументи  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , на предикати ж діяти узнаванням нуля забороняється. В алгебрі скінченних предикатів вирази виду  $A^0$ , де  $A$  – довільна формула, не є формулами. А в алгебрі булевих функцій висловлювання на кшталт  $A$  – це формули.

Таким чином, алгебра булевих функцій не є окремим випадком алгебри скінченних предикатів. У цій обставині криється пояснення того факту, що, як було зазначено вище, алгебра скінченних предикатів (без  $0$  та  $1$  і при  $k \geq 2$ ) нескоротна. В алгебрі ж булевих функцій набір її базисних (елементарних) операцій (заперечення, диз'юнкція і кон'юнкція) можна скоротити без втрати даною алгеброю властивості повноти (наприклад,

можна виключити операцію диз'юнкції), чого не могло б статися, якби алгебра булевих функцій була окремим випадком алгебри скінченних предикатів. Алгебра скінченних предикатів при  $k = 2$  і  $A = \{0, 1\}$ , як алгебраїчна система, наскільки нам відомо, в літературі спеціально не розглядалася. Однак вона неявно присутня у багатьох посібниках з алгебри булевих функцій. Так, наприклад, в літературі можна зустріти термін «формули з тісними запереченнями», що позначає формули алгебри булевих функцій, у яких заперечення можуть стояти тільки безпосередньо над незалежними змінними. До такого роду формул алгебри булевих функцій належать, зокрема, диз'юнктивні і кон'юнктивні нормальні форми, а також дужкові форми. Ці форми реалізують у вигляді двоступеневих або багатоступеневих комбінаційних схем, на входи яких надходять виконавчі сигнали разом з їх запереченнями.

### **Вправи**

1. Наведіть приклади формул алгебри скінченних предикатів.
2. Уявіть якусь формулу алгебри скінченних предикатів в скороченому записі.
3. Перейдіть до повного запису будь-якої формули алгебри скінченних предикатів, відштовхуючись від її скороченого запису.
4. За формулою обчисліть значення якого-небудь скінченного предиката для деякого набору значень його аргументів.
5. Складіть таблицю якогось скінченного предиката за його формулою.
6. Уявіть у формульному вигляді скінченний предикат, заданий таблицею.
7. Доведіть який-небудь із законів алгебри скінченних предикатів.

### **Контрольні запитання**

1. Як утворюються формули алгебри скінченних предикатів?
2. Що таке предикат узнавання літери?



3. Скільки всіх різних предикатів узнання літери  $\epsilon$  в алгебрі скінченних предикатів заданого типу?
4. Якими прийомами досягається перехід до скороченого запису формули алгебри скінченних предикатів?
5. Як перейти від скороченого запису формули алгебри скінченних предикатів до повної?
6. Як перейти від формульного представлення скінченного предиката до табличного?
7. Як перейти від табличного представлення скінченного предиката до формульного?
8. Що таке повнота алгебри скінченних предикатів?
9. Що таке нескоротність алгебри скінченних предикатів?
10. Які властивості операцій кон'юнкції і диз'юнкції Ви знаєте?
11. Які закони алгебри скінченних предикатів Ви знаєте?
12. Як абстрактно визначити алгебру скінченних предикатів?
13. Що таке повна система тотожностей алгебри предикатів?
14. Чи має місце подвійність в алгебрі скінченних предикатів, чим вона відрізняється від подвійності в алгебрі логіки?
15. Чи можна розглядати алгебру булевих функцій як різновид алгебри скінченних предикатів?
16. Що таке формули з тісними запереченнями?

### 3 ДОСКОНАЛА ДИЗ'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА

Наявність тотожностей в алгебрі скінченних предикатів свідчить про те, що один і той же скінченний предикат можна записати у вигляді різних формул. Отже, формул алгебри скінченних предикатів більше, ніж позначених ними предикатів. Виникає запитання: з множини всіх формул виділити клас формул, які називаються нормальними формами, щоб в ньому кожному предикату відповідала тільки одна формула алгебри скінченних предикатів. Виділимо два таких класи формул: клас *досконалих диз'юнктивних нормальних форм (ДДНФ)* і клас *досконалих кон'юнктивних нормальних форм (ДКНФ)*.

Спочатку введемо поняття досконалої диз'юнктивної нормальної форми. *Елементарною кон'юнкцією* назвемо будь-яку кон'юнкцію узнавання різних літерних змінних, взятих з довільними фіксованими показниками. Найбільше число множників в елементарній кон'юнкції дорівнює  $n$ , найменше – нулю. Як елементарну кон'юнкцію, що не має в своєму складі жодного узнавання літери, приймемо формулу 1. Прикладами елементарних кон'юнкцій в алгебрі скінченних предикатів з алфавітом літер  $A = \{a, b, c\}$  і алфавітом змінних  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$  можуть служити формули  $x_1^a x_2^b$ ,  $x_2^c x_3^b$ ,  $x_1^b x_2^c x_3^c$ . Елементарні кон'юнкції, що відрізняються між собою тільки порядком кон'юнктивних членів, будемо вважати однаковими, наприклад,  $x_1^b x_2^c x_3^c$  и  $x_2^c x_1^b x_3^c$ . Будь-яку диз'юнкцію довільного числа різних елементарних кон'юнкцій назвемо *диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)*. Як ДНФ, що не містить жодного диз'юнктивного члена приймемо формулу 0. Прикладом ДНФ в тій же алгебрі може служити формула  $x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_2^c x_3^c$ .

Будь-яка елементарна кон'юнкція, в якій зустрічаються всі змінні алгебри скінченних предикатів, називається *конституентною одиницею*. Домовимося всі узнавання в конституенті одиниці розташовувати в порядку зростання номерів змінних. Приклади конституенти одиниці (в тій

же алгебрі):  $x_1^a x_2^a x_3^b$ ,  $x_1^b x_2^c x_3^b$ . У загальному вигляді конститuenta одиниці запишеться в такий спосіб:

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} \equiv \bigwedge_{i=1}^n x_i^{\sigma_i}.$$

Тут  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  – деякі фіксовані літери алфавіту  $A$ , знак  $\bigwedge_{i=1}^n$  позначає операцію логічного множення  $n$  членів,  $i$  – індекс, що змінюється в межах від 1 до  $n$ , за яким ведеться множення.

Дамо кожній конститuentі одиниці  $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$  свій номер. Для цього складемо  $n$ -розрядний  $k$ -ковий код  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  з показників її узнавнь, розглядаючи літери  $a_1, a_2, \dots, a_k$  алфавіту  $A$  як  $k$ -ічні цифри  $0, 1, \dots, k-1$ . Число, що відповідає коду  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ , будемо вважати номером даної конститuentи одиниці. Наприклад, номером конститuentи одиниці  $x_1^b x_2^a x_3^c$  служить число 11 (в десятковому записі), відповідне трійковому коду 102. Усього є  $k^n$  різних конститuent одиниці.

Будь-яка диз'юнкція довільного числа  $n$  різних конститuent одиниці називається *досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)*. Ми будемо ототожнювати між собою всі ДДНФ, що відрізняються тільки порядком розташування конститuentи одиниці. Конститuentи одиниці домовимося розташовувати в порядку зростання їх номерів. Приклад ДДНФ (в тій же алгебрі):  $x_1^a x_2^a x_3^c \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^c x_2^c x_3^b$ . Загальний вигляд ДДНФ такий:

$$\begin{aligned} & x_1^{\sigma_{11}} x_2^{\sigma_{12}} \dots x_n^{\sigma_{1n}} \vee x_1^{\sigma_{21}} x_2^{\sigma_{22}} \dots x_n^{\sigma_{2n}} \vee \dots \vee x_1^{\sigma_{m1}} x_2^{\sigma_{m2}} \dots x_n^{\sigma_{mn}} \equiv \\ & \equiv \bigvee_{i=1}^m x_1^{\sigma_{i1}} x_2^{\sigma_{i2}} \dots x_n^{\sigma_{in}} \equiv \bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^n x_j^{\sigma_{ij}}. \end{aligned}$$

Тут  $\sigma_{ij}$  – деякі фіксовані літери алфавіту  $A$ ; знак  $\bigvee_{i=1}^m$  позначає операцію логічного підсумовування  $m$  членів;  $m$  – число конститuentи одиниці в ДДНФ;  $i, j$  – індекси, що змінюються в межах відповідно від 1 до  $m$  і від 1 до  $n$ , за якими ведуться логічне підсумовування і логічне множення.

Дамо кожній ДДНФ свій номер. Для цього кожній ДДНФ поставимо у відповідність деякий двійковий код довжини  $k^n$ . Довжина коду збігається з числом усіх різних конститuent одиниці. Якщо в розглянутій ДДНФ

конституента одиниці з номером  $i$  відсутня, то в  $i$ -тому розряді її двійкового коду записуємо 0, якщо присутня, то записуємо 1. Нумерацію розрядів двійкового коду в даному випадку починаємо з нуля і ведемо зліва направо. Число, яке відповідає отриманому таким способом двійковому коду, будемо вважати номером ДДНФ. Як ДДНФ з номером 0 приймаємо формулу 0. Наприклад, номером ДДНФ  $x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^c$  в алгебрі з алфавітами  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2\}$  буде число  $136_{10}$ , відповідне двійковому коду 010001000. Всього є  $2^{kn}$  різних ДДНФ, тобто рівно стільки, скільки існує всіх різних скінченних предикатів. Разом з тим, кожній формулі відповідає єдиний скінченний предикат, кожному ж скінченному предикату відповідає деяка своя ДДНФ. Отже, між скінченними предикатами і досконалими диз'юнктивними нормальними формами існує взаємно однозначна відповідність.

Важливо з'ясувати питання: чи можна за допомогою наведених вище тотожностей перетворити довільну формулу алгебри скінченних предикатів на ДДНФ. Якщо так, то звідси випливає, що система цих тотожностей повна. Дійсно, порівнюючи між собою ДДНФ двох формул, завжди можна, через єдність подання будь-якого скінченного предиката у вигляді ДДНФ, вирішити питання про тотожність цих формул. Якщо ДДНФ збігаються, то вихідні формули тотожні, якщо не збігаються, то вони відповідають різним предикатам. Таке перетворення існує. Отже, система тотожностей (4) – (19) алгебри скінченних предикатів повна.

Нижче наводиться опис алгоритму перетворення довільної формули у ДДНФ. Алгоритм супроводжується прикладом:  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ , Ви бажаєте перевести до ДДНФ формулу

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee (x_1^a \vee x_2^a)(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a).$$

1. Користуючись тотожностями (5), (7) і (8), розкриваємо у формулі всі дужки:

$$\begin{aligned} f &\equiv x_1^a(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee x_2^b(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee x_1^a(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a) \vee x_2^a(x_2^b x_3^b \vee \\ &\vee x_2^a x_3^a) \equiv (x_1^a \vee x_1^b x_3^a)x_1^a \vee (x_1^a \vee x_1^b x_3^a)x_2^b \vee (x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a)x_1^a \vee \\ &\vee (x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a)x_2^a \equiv x_1^a x_1^a \vee x_1^b x_3^a x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_3^a x_2^b \vee x_2^b x_3^b x_1^a \vee \\ &\vee x_2^a x_3^a x_2^a \end{aligned}$$

$$\vee x_2^a x_3^a x_1^a \vee x_2^b x_3^b x_2^a \vee x_2^a x_3^a x_2^a.$$

У результаті отримуємо деяку диз'юнкцію кон'юнкцій узнавань предмета.

2. Користуючись тотожностями (4) – (7), (10), (11), (15), (17) і (19), виконуємо спрощення у формулі:

$$\begin{aligned} f &\equiv x_1^a \vee 0 \cdot x_3^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee 0 \cdot x_3^b \vee x_2^a x_3^a \equiv \\ &\equiv x_1^a \vee 0 \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee 0 \vee x_2^a x_3^a \equiv x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee \\ &\vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^a. \end{aligned}$$

У результаті отримуємо деяку диз'юнктивну нормальну формулу предиката.

3. Користуючись тотожностями (16) і (18), в усі кон'юнкції вводимо відсутні змінні:

$$\begin{aligned} f &\equiv x_1^a (x_2^a \vee x_2^b) (x_3^a \vee x_3^b) \vee x_1^a x_2^b (x_3^a \vee x_3^b) \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee \\ &\vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee (x_1^a \vee x_1^b) x_2^a x_3^a. \end{aligned}$$

4. Користуючись тотожностями (4) – (8) і (10), знову розкриваємо дужки і виконуємо спрощення:

$$\begin{aligned} f &\equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee \\ &\vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^a x_3^a \equiv \\ &\equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a. \end{aligned}$$

У результаті отримуємо шукану ДДНФ.

Від досконалої диз'юнктивної нормальної форми неважко перейти до таблиці позначеного нею скінченного предиката. Для цього потрібно виділити в таблиці всі набори значень аргументів, що збігаються з наборами показників узнавань літер конститuentи одиниці, що фігурують у ДДНФ. Проти виділених наборів треба вписати значення предиката 1, проти інших наборів – значення 0.

Розглянемо приклад. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2\}$ . Предикат заданий досконалою диз'юнктивною нормальною формою  $t \equiv x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a$ . Цьому предикату відповідає таблиця 4.

Таблиця 4

$x_1$	$a$	$a$	$a$	$b$	$b$	$b$	$c$	$c$	$c$
$x_2$	$a$	$b$	$c$	$a$	$b$	$c$	$a$	$b$	$c$
$t$	0	1	1	1	0	0	0	0	0

Для зворотного переходу від таблиці значень скінченного предиката до його ДДНФ виділяємо в таблиці всі ті набори значень аргументів, на яких цей предикат обертається в 1. Далі для кожного такого набору виписуємо відповідну йому конституенту одиниці, приймаючи в ній показники узнавань літер відповідно до цього набору. Нарешті, всі отримані таким способом конституенти одиниці з'єднуємо знаками диз'юнкції. Розглянемо приклад. Предикат, заданий таблицею 5.

Таблиця 5

$x_1$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$x_2$	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$t$	1	0	0	0	1	0	0	1	0

ДДНФ цього предиката має вигляд:

$$x_1^0 x_2^0 \vee x_1^1 x_2^1 \vee x_1^2 x_2^1 \equiv t.$$

Зауважимо, що таблицю значень предиката можна легко побудувати також і за його довільною диз'юнктивною нормальною формою. Для цього потрібно виділити в таблиці ті набори значень аргументів, до складу яких входять набори показників узнавань елементарних кон'юнкцій ДНФ. Проти виділених наборів проставляємо значення 1, проти інших наборів – значення 0.

Розглянемо приклад. Нехай  $A = \{\alpha, \beta\}$ ,  $B = \{x, y, z\}$ . Предикат заданий такою ДНФ:

$$t \equiv x^\alpha y^\beta \vee x^\beta z^\alpha.$$

Йому відповідає таблиця 6.

Таблиця 6

$x$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	$\beta$	$\beta$	$\beta$
$y$	$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	$\beta$	$\alpha$	$\alpha$	$\beta$	$\beta$
$z$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
$t$	0	0	1	1	1	0	1	0

У ряді випадків буває корисно, відправляючись від завдання скінченного предиката у вигляді довільної формули алгебри скінченних предикатів, отримати яку-небудь по можливості *економну ДНФ*. З цією метою можна скористатися першими двома кроками описаного вище алгоритму приведення до ДДНФ. Отриману ДНФ слід спробувати спростити, застосовуючи перший закон поглинання (12) і перший закон ідемпотентності (10). Підкреслимо, що за цим методом ми знаходимо формулу, не обов'язково найпростішу серед всіляких ДНФ. Однак вона, як правило, виявляється не набагато складнішою за найпростішу ДНФ. На відшукання такої економної формули витрачається набагато менше зусиль. Для прикладу зробимо спрощення ДНФ, отриманої на другому кроці в прикладі щойно згаданого алгоритму перетворення до ДДНФ:

$$x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^a = x_1^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_2^a x_3^a.$$

В алгебрі скінченних предикатів має місце важливе твердження, яке назовемо *теоремою про розкладання предиката*. Можна сформулювати два варіанти цієї теореми: *теорему про диз'юнктивне розкладання* і *теорему про кон'юнктивне розкладання*. Сформулюємо і доведемо теорему про диз'юнктивне розкладання. Теорему про кон'юнктивне розкладання розглянемо трохи пізніше. Формулюється теорема про диз'юнктивне розкладання таким чином.

*Будь-який скінченний предикат  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  може бути поданий у вигляді*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_l^{\sigma_l} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l, x_{l+1}, \dots, x_n). \quad (29)$$

Подання предиката  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у вигляді правої частини тотожності (29) назвемо його *диз'юнктивним розкладанням* за змінними  $x_1, x_2, \dots, x_l$ . Літерні змінні  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$  відіграють роль індексів при утворенні багаторазової диз'юнкції. Запис  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)$  під знаком диз'юнкції означає, що логічна сума береться по усім можливим наборам індексів  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ . Таким чином, в правій частині тотожності (29) присутні  $k^l$  диз'юнктивних членів

Доведемо теорему про диз'юнктивне розкладання. Доказ будемо вести індукцією по  $k, l$  і  $n$ .

1. При  $k = l = n = 1$  рівність (29) набуває вигляду

$$f(x_1) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1).$$

Це є тотожністю. Дійсно, змінна  $x_1$  набуває єдино можливого значення  $a_1$ , тому  $f(x_1) \equiv f(a_1)$  і

$$\bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1) \equiv x_1^{a_1} f(a_1) \equiv 1 \cdot f(a_1).$$

Таким чином, при  $k = l = n = 1$  теорема про розкладання справедлива.

2. Нехай  $l = n = 1$ . Припустимо, що при  $k = t$  рівність (29) є тотожністю і виведемо звідси, що при  $k = t + 1$  рівність (29) теж буде тотожністю. За індуктивним припущенням маємо тотожність

$$f(x_1) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1) \equiv x_1^{a_1} f(a_1) \vee x_1^{a_2} f(a_2) \vee \dots \vee x_1^{a_t} f(a_t), \quad (29a)$$

яка є окремим випадком тотожності (29) при  $l = n = 1$  і  $k = t$ . Для кожного предиката  $f(x_1)$ , заданого на множині  $A_t = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ , побудуємо два предикати:  $f'(x_1)$  і  $f''(x_1)$ , визначених на множині  $A_{t+1} = \{a_1, a_2, \dots, a_t, a_{t+1}\}$ , за таких умов:

$$f'(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x_1 = a_{t+1}, \\ f(x_1), & \text{якщо } x_1 \neq a_{t+1}, \end{cases}$$

$$f''(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 = a_{t+1}, \\ f(x_1), & \text{якщо } x_1 \neq a_{t+1}. \end{cases}$$

Доведемо, що для зазначених предикатів справедлива тотожність (29), тобто:

$$f'(x_1) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f'(\sigma_1) \equiv x_1^{a_1} f'(a_1) \vee x_1^{a_2} f'(a_2) \vee \dots \vee x_1^{a_t} f'(a_t) \vee x_1^{a_{t+1}} f'(a_{t+1}),$$



$$f''(x_1) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f''(\sigma_1) \equiv x_1^{a_1} f''(a_1) \bigvee \bigvee_{x_1^{a_2}} f''(a_2) \bigvee \dots \bigvee_{x_1^{a_t}} f''(a_t) \bigvee_{x_1^{a_{t+1}}} f''(a_{t+1}). \quad (29б)$$

Дійсно, якщо  $x_1 \neq a_{t+1}$  то  $f'(x_1) \equiv f''(x_1) \equiv f(x_1)$  і  $x_1^{a_{t+1}} \equiv 0$ . У цьому випадку, відповідно до (29а), рівності (29б) обертаються в тотожності. Якщо ж  $x_1 = a_{t+1}$ , то  $f'(x_1) \equiv 0$ ,  $f''(x_1) \equiv 1$ ,  $x_1^{a_1} \equiv x_1^{a_2} \equiv \dots \equiv x_1^{a_t} \equiv 0$ ,  $x_1^{a_{t+1}} \equiv 1$ ,  $f(a_{t+1}) \equiv 0$ ,  $f''(a_{t+1}) \equiv 1$ , тому рівності (29б) також обертаються в тотожності типу  $0 \equiv 0$  або  $1 \equiv 1$ . Зауважимо, що предикатами  $f'(x_1)$  і  $f''(x_1)$  вичерпується клас можливих одномісних предикатів, заданих на множині  $A_{t+1}$ . Таким чином, при  $l = n = 1$  теорема про розкладання справедлива для будь-якого  $k$ .

3. Нехай  $l = 1$  і  $k$  довільним чином зафіксовано. Припустимо, що при  $n = t$  рівність (29) є тотожністю, і виведемо звідси, що і при  $n = t + 1$  рівність (29) буде тотожністю. За припущенням, згідно з (29), має місце тотожність

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2, \dots, x_t).$$

Тому при будь-якому  $a_i$  ( $1 \leq i \leq k$ )

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t, a_i) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2, \dots, x_t, a_i).$$

Отже,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t, x_{t+1}) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2, \dots, x_t, x_{t+1}).$$

Зауважимо, що предикатами, для яких справедлива записана вище тотожність, вичерпується весь клас всіляких  $t + 1$ -місних предикатів. Таким чином, при  $l = 1$  теорема про розкладання справедлива для будь-яких  $k$  і  $n$ .

4. Нехай  $k$  і  $n$  довільно фіксовані. Припустимо, що при  $l = t$  рівність (29) є тотожністю, і виведемо звідси, що і при  $l = t + 1$ , якщо  $l \leq n$ , рівність (29) буде тотожністю. За припущенням, згідно з (29), маємо тотожність

$$f(x_1, x_2, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_t^{\sigma_t} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t, x_{t+1}, \dots, x_n).$$

Користуючись цим, а також результатом, отриманим у пункті 3 цього доведення, маємо:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_n) &\equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_t^{\sigma_t} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t, x_{t+1}, \\
x_{t+2}, \dots, x_n) &\equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_t^{\sigma_t} \left( \bigvee_{(\sigma_{t+1})} x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t, \sigma_{t+1}, x_{t+2}, \dots, \right. \\
x_n) &\equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{t+1})} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Таким чином, теорема доведена для будь-яких  $k, l, n$ .

З теореми про диз'юнктивне розкладання випливають такі два наслідки.

Наслідок 1. *Будь-який скінченний предикат  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можна надати у вигляді:*

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\equiv x_1^{a_1} f(a_1, x_2, \dots, x_n) \vee x_1^{a_2} f(a_2, x_2, \dots, \\
x_n) &\vee \dots \vee x_1^{a_k} f(a_k, x_2, \dots, x_n). \tag{30}
\end{aligned}$$

Наслідок 2. *Будь-який скінченний продукт  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  можна надати у вигляді:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}. \tag{31}$$

Тотожності (30) і (31) отримуємо, вважаючи в (29) відповідно  $l = 1$  і  $l = n$ . Запис  $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$  в (31) під знаком диз'юнкції означає, що логічне підсумовування ведеться тільки за тими наборами індексів  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , які обертають предикат  $f$  в 1. Формула, що стоїть в правій частині тотожності (31), являє собою ДДНФ предиката  $f$ . Якщо предикат  $f$  тотожно помилковий, то відповідно до теореми про диз'юнктивне розкладання в правій частині тотожності (31) потрібно ставити 0.

Тотожність (30) можна використовувати як ефективний засіб спрощення формул алгебри скінченних предикатів. Розглянемо приклад такого спрощення. Нехай  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Потрібно спростити формулу

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee (x_1^a \vee x_1^a)(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a).$$

Виконуємо розкладання функції  $f$  за змінною  $x_1$ :

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &\equiv x_1^a f(a, x_2, x_3) \vee x_1^b f(b, x_2, x_3), \\
f(a, x_2, x_3) &\equiv (a^a \vee x_2^b)(a^a \vee a^b x_3^a) \vee (a^a \vee x_2^a)(x_2^b x_3^b \vee \\
\vee x_2^a x_3^a) &\equiv (1 \vee x_2^b)(1 \vee 0 \cdot x_3^a) \vee (1 \vee x_2^a)(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a) \equiv 1,
\end{aligned}$$

$$f(b, x_2, x_3) \equiv (b^a \vee x_2^b)(b^a \vee b^b x_3^a) \vee (b^a \vee x_2^a)(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a) \equiv \\ \equiv x_2^b x_3^a \vee x_2^a (x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a) \equiv x_2^b x_3^a \vee x_2^a x_3^a \equiv (x_2^a \vee x_2^b) x_3^a \equiv x_3^a.$$

Остаточню:

$$f \equiv x_1^a \vee x_1^b x_3^a \equiv (x_1^a \vee x_1^b)(x_1^a \vee x_3^a) \equiv x_1^a \vee x_3^a.$$

З другого наслідку теореми про розкладання випливає повнота алгебри скінченних предикатів: будь-який скінченний предикат можна записати у вигляді формули алгебри скінченних предикатів. Тотожність (31) можна використовувати для отримання ДДНФ предиката, заданого якою-небудь довільною обраною формулою алгебри скінченних предикатів.

Приклад:  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ , даний предикат:

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1^a \vee x_1^b)(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee (x_1^a \vee x_2^a)(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a).$$

Потрібно знайти ДДНФ зазначеного предиката. Маємо:

$$f(a, a, a) \equiv (a^a \vee a^b)(a^a \vee a^b a^a) \vee (a^a \vee a^a)(a^b a^b \vee a^a a^a) \equiv 1.$$

Аналогічно знаходимо:  $f(a, a, b) \equiv 1$ ,  $f(a, b, a) \equiv 1$ ,  $f(a, b, b) \equiv 1$ ,  $f(b, a, a) \equiv 1$ ,  $f(b, a, b) \equiv 1$ ,  $f(b, b, a) \equiv 1$ ,  $f(b, b, b) \equiv 0$ . ДДНФ предиката  $f$  має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a.$$

## Вправи

1. Наведіть приклади елементарних кон'юнкцій.
2. Наведіть приклад диз'юнктивної нормальної форми предиката.
3. Наведіть приклади конституенти одиниці.
4. Визначте номер якої-небудь конституенти одиниці.
5. Запишіть досконалу диз'юнктивну нормальну форму якого-небудь предиката.
6. Визначте номер якої-небудь досконалої диз'юнктивної нормальної форми предиката.
7. Перетворіть у ДДНФ будь-яку формулу алгебри скінченних предикатів.
8. Складіть таблицю предиката за його ДДНФ.
9. По таблиці предиката відшукайте його ДДНФ.

10. Відправляючись від якої-небудь формули, складіть таблицю вираженого нею предиката.

11. Отримайте економну ДНФ предиката, заданого деякою формулою.

12. Скористайтеся диз'юнктивним розкладанням предиката для спрощення якої-небудь формули алгебри скінченних предикатів.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке елементарна кон'юнкція?
2. Що таке ДНФ предиката?
3. Що таке конституенти одиниці?
4. Що таке ДДНФ предиката?
5. Як присвоїти номер ДДНФ предиката?
6. Як за формулою предиката отримати його ДДНФ?
7. Як за ДДНФ предиката побудувати його таблицю?
8. Як від таблиці предиката перейти до його ДДНФ?
9. Як за ДНФ предиката побудувати його таблицю?
10. Як за формулою предиката побудувати його економну ДНФ?
11. Що таке диз'юнктивне розкладання предиката?
12. Як за допомогою тотожних перетворень спростити формулу предиката?

#### 4 ДОСКОНАЛА КОН'ЮНКТИВНА НОРМАЛЬНА ФОРМА

Введемо в алгебрі скінченних предикатів операцію заперечення. Введення заперечення дозволить показати, що алгебра скінченних предикатів є булевою алгеброю. Крім того, наявність операції заперечення дасть можливість в ряді випадків записувати скінченні предикати у формі більш компактних виразів, а також виконувати тотожні перетворення формул більш коротким шляхом. Нарешті, операція заперечення дозволить природним чином ввести поняття досконалої кон'юнктивної нормальної форми і сформулювати теорему про кон'юнктивне розкладання предиката.

*Операція заперечення предиката* – це одномісна функція, задана на множині всіх  $k$ -кових  $n$ -місних предикатів зі значеннями в тій же множині. Якщо  $A$  – аргумент і  $B$  – значення операції заперечення, то домовимося писати  $(\neg A) = B$  або, в скороченій формі,  $\bar{A} = B$ . *Запереченням предиката*  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  назвемо предикат

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

що набуває значення 0 для всіх тих наборів значень аргументів  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , при яких  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ , і що набуває значення 1 – для всіх тих наборів значень аргументів, при яких  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ .

При  $k \geq 2$  можна визначити операцію заперечення аксіоматично, задавши її такими тотожностями:

$$\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \bar{B}, \quad (32)$$

$$\overline{\bar{A} \bar{B}} \equiv A \vee B, \quad (33)$$

$$\overline{x^{a_i}} \equiv x^{a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_k}. \quad (34)$$

Тут  $A$  і  $B$  – довільні формули,  $x$  – довільна літерна змінна,  $a_i$  – довільна літера алгебри скінченних предикатів, індекс  $i$  набуває значення в межах від 1 до  $k$ . Тотожності (32) і (33) збігаються за формою з відомими в алгебрі булевих функцій *законами де Моргана*, які, однак, застосовуються тепер не до булевих змінних, а до змінних предикатів. Тотожність (34) назвемо *законом заперечення*. Зауважимо, що при  $k = 1$  закон заперечення втрачає сенс.

Справедливість законів де Моргана доводиться перевіркою тотожностей для всіх можливих варіантів значень предикатів  $A$  і  $B$ . Наприклад, переконуємося при  $A = 0$  і  $B = 1$ , що  $\overline{0 \vee 1} \equiv \overline{0} \cdot \overline{1}$  і  $\overline{0 \cdot 1} \equiv \overline{0} \vee \overline{1}$ . Легко встановлюється також справедливість закону заперечення. Дійсно, якщо  $x = a_i$ , то предикати, які стоять ліворуч і праворуч від знака тотожності в (34), звертаються в 0, якщо ж  $x \neq a_i$ , то обидва предикати обертаються в 1.

Користуючись наведеними раніше тотожностями алгебри скінченних предикатів, а також тотожностями (32) – (34), можна довести, що:

$$\overline{0} \equiv 1, \quad (35)$$

$$\overline{1} \equiv 0. \quad (36)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \overline{0} &\equiv \overline{x^{a_1} x^{a_2}} \equiv \overline{x^{a_1} \vee x^{a_2}} \equiv x^{a_2} \vee x^{a_3} \vee \dots \vee x^{a_k} \vee x^{a_1} \vee x^{a_3} \vee \dots \vee x^{a_k} \equiv 1, \\ \overline{1} &\equiv \overline{x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_k}} \equiv \overline{x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_k}} \equiv \\ &\equiv (x^{a_2} \vee x^{a_3} \vee \dots \vee x^{a_k}) (x^{a_1} \vee x^{a_3} \vee \dots \vee x^{a_k}) \dots (x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_{k-1}}) \equiv 0. \end{aligned}$$

Будь-яка формула із запереченнями може бути перетворена за допомогою залежностей (32) – (36) у тотожну їй формулу без заперечень. Дійсно, застосовуючи багаторазово закони де Моргана, ми завжди зможемо всі знаки заперечення, які стоять над формулою або її частинами, опустити безпосередньо на узнавання літер або на 0 і 1. Потім, користуючись тотожностями (34) – (36), виключаємо заперечення з формули. Розглянемо приклад виключення знаків заперечення з формули. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ . Тоді:

$$\overline{x_1^a \vee x_1^b x_2^c} \equiv \overline{x_1^a x_1^b x_2^c} \equiv \overline{x_1^a} (\overline{x_1^b \vee x_2^c}) \equiv (x_1^b \vee x_1^c) (x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b).$$

За допомогою тотожностей (32) – (34) спільно з переліченими вище основними тотожностями алгебри скінченних предикатів можна вирішити питання про тотожність двох будь-яких формул зі знаками заперечення. Спочатку виключаємо з формул знаки заперечення, а потім приводимо формули до ДДНФ. Звідси випливає, що система тотожностей (32) – (34) повна, вона спільно з тотожностями (4) – (19) аксіоматично визначає всі властивості операції заперечення.

У ряді випадків процес виключення знаків заперечення з формул істотно спрощується, якщо використовувати такі тотожності:

$$x^{a_i} \overline{x^{a_j}} \equiv x^{a_i}, \quad (37)$$

$$x^{a_i} (\overline{x^{a_j}} \vee A) \equiv x^{a_i}. \quad (38)$$

Тотожності справедливі за умови, що  $i \neq j$ , індекси  $i$  і  $j$  набувають значення в межах від 1 до  $k$ . Літерою  $A$  – позначена довільна формула алгебри скінченних предикатів. Тотожність (37) назвемо *законом поглинання заперечення*, тотожність (38) – *узагальненим законом поглинання заперечення*. Доведемо справедливість тотожності (38):

$$\begin{aligned} x^{a_i} (\overline{x^{a_j}} \vee A) &\equiv x^{a_i} (x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_i} \vee \dots \vee x^{a_{j-1}} \vee x^{a_{j+1}} \vee \dots \vee x^{a_k} \vee A) \equiv \\ &\equiv x^{a_i} \vee x^{a_i} A \equiv x^{a_i}. \end{aligned}$$

Розглянемо приклад, який ілюструє застосування щойно наведених тотожностей. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ , потрібно спростити формулу

$$f \equiv (\overline{x_1^a x_1^b} \vee \overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^a}) x_1^b x_2^c,$$

попередньо виключивши з неї заперечення. Застосовуючи тотожність (38), безпосередньо отримуємо шуканий результат  $f \equiv x_1^b x_2^c$ . Без використання законів поглинання заперечення той же результат досягається більш довгим шляхом:

$$\begin{aligned} f &\equiv ((x_1^b \vee x_1^c)(x_1^a \vee x_1^c) \vee x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c) x_1^b x_2^c \equiv \\ &\equiv (x_1^c \vee x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c) x_1^b x_2^c \equiv x_1^b x_2^c \vee x_1^b x_2^c \equiv x_1^b x_2^c. \end{aligned}$$

Для операції заперечення також справедливі такі тотожності:

1) *закон подвійного заперечення*

$$\overline{\overline{A}} \equiv A; \quad (39)$$

2) *закон виключеного третього*

$$A \vee \overline{A} \equiv 1; \quad (40)$$

3) *закон суперечності*

$$A \overline{A} \equiv 0. \quad (41)$$

Ці тотожності за формою збігаються з однойменними законами алгебри булевих функцій. Тотожності (39) – (41) можна отримати з раніше виведених тотожностей.

Доведемо справедливість закону подвійного заперечення індукцією по довжині формули. Він виконується для формул 0 і 1, а також для всіляких узнавань літер:  $\overline{\overline{0}} \equiv \overline{1} \equiv 0, \overline{1} \equiv \overline{\overline{0}} \equiv 1,$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{x^{a_i}}} &\equiv \overline{x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_{i-1}} \vee x^{a_{i+1}} \vee \dots \vee x^{a_k}} \equiv \overline{x^{a_1} x^{a_2} \dots x^{a_{i-1}} x^{a_{i+1}} \dots} \\ \dots \overline{x^{a_k}} &\equiv (x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_i} \vee \dots \vee x^{a_k})(x^{a_1} \vee x^{a_3} \vee \dots \vee x^{a_i} \vee \dots \vee x^{a_k}) \dots \\ \dots (x^{a_1} \vee \dots \vee x^{a_i} \vee x^{a_{i+2}} \vee \dots \vee x^{a_k}) \dots (x^{a_1} \vee \dots \vee x^{a_i} \vee \dots \vee x^{a_{k-1}}) &\equiv \\ &\equiv x^{a_i}. \end{aligned}$$

Припустимо, що закон подвійного заперечення справедливий для формул  $A$  і  $B$ , і встановимо, що він виконується також для формул  $A \vee B$  і  $AB$ :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A \vee B}} &\equiv \overline{\overline{AB}} \equiv \overline{A \vee B} \equiv A \vee B, \\ \overline{\overline{AB}} &\equiv \overline{\overline{A \vee B}} \equiv \overline{\overline{AB}} \equiv AB. \end{aligned}$$

Таким чином, закон подвійного заперечення справедливий для всіх формул.

Доведемо тотожність (40). Вона виконується для формул 0 і 1, а також для всіх узнавань літер:  $0 \vee \overline{0} \equiv 0 \vee 1 \equiv 1, 1 \vee \overline{1} \equiv 1 \vee 0 \equiv 1,$

$$x^{a_i} \vee \overline{x^{a_i}} \equiv x^{a_i} \vee x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_{i-1}} \vee x^{a_{i+1}} \vee \dots \vee x^{a_k} \equiv 1.$$

Якщо тотожність (40) справедлива для формул  $A$  і  $B$ , то вона справедливо і для формул  $A \vee B$  і  $AB$ :

$$\begin{aligned} A \vee B \vee \overline{A \vee B} &\equiv A \vee B \vee \overline{A} \overline{B} \equiv \\ &\equiv (A \vee A)(A \vee \overline{B}) \vee (B \vee \overline{A})(B \vee \overline{B}) \equiv A \vee \overline{B} \vee B \vee \overline{A} \equiv 1, \\ AB \vee \overline{AB} &\equiv AB \vee \overline{A} \vee \overline{B} \equiv (A \vee \overline{A})(B \vee \overline{A})(A \vee \overline{B})(B \vee \overline{B}) \equiv B \vee \overline{A} \vee A \vee \overline{B} \equiv 1. \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться закон суперечності.

Отже, ми бачимо, що в алгебрі скінченних предикатів, поряд з операціями диз'юнкції і кон'юнкції, існує операція заперечення з усіма властивостями, якими наділяє її булева алгебра (тотожності (32), (33), (35), (36), (39) – (41)). Тому алгебру скінченних предикатів можна розглядати як різновид булевої алгебри. Основною множиною в ній служить система всіх  $k$ -кових  $n$ -місних предикатів з алфавітом літер  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  і алфавітом змінних  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , роль нуля виконує тотожно помилковий предикат,



роль одиниці – тотожно істинний предикат, в ролі базисних операцій виступають диз’юнкція, кон’юнкція і заперечення.

Як систему тотожностей алгебри скінченних предикатів, що задає в ній структуру булевої алгебри (і тільки цю структуру), можна використовувати, наприклад, такий набір аксіом: (10), (4), (6), (8), (39), (32) і тотожність:

$$(A \vee \bar{A})B \equiv B. \quad (42)$$

Підкреслимо ще раз, що алгебра скінченних предикатів не є лише булевою алгеброю, вона має і свої специфічні тотожності: закон істинності (18), закон хибності (19) і закон заперечення (34), які не впливають з аксіом булевої алгебри.

Закони істинності і хибності можна записати в модифікованому вигляді без використання символів 0 і 1:

$$x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_k} \equiv A \vee \bar{A}, \quad (43)$$

$$x^{a_i} \wedge x^{a_j} \equiv A \bar{A}, \quad (i \neq j). \quad (44)$$

Тотожність (44) може бути виведена з тотожностей булевої алгебри і тотожностей (34), (43). Дійсно, нехай  $i \neq j$ . Тоді

$$\begin{aligned} x^{a_i} \wedge x^{a_j} &\equiv \overline{\overline{x^{a_i} \wedge x^{a_j}}} \equiv \overline{\overline{x^{a_i} \vee x^{a_j}}} \equiv \neg(x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_{i-1}} \vee x^{a_{i+1}} \vee \dots \vee x^{a_k} \vee x^{a_1} \vee \\ &\vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_{j-1}} \vee x^{a_{j+1}} \vee \dots \vee x^{a_k}) \equiv \neg(x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \dots \vee x^{a_k}) \equiv \overline{\overline{A \vee \bar{A}}} \equiv \bar{A} \bar{A}. \end{aligned}$$

Таким чином, при наявності операції заперечення, заданої аксіоматично тотожністю (32) – (34), закони хибності можна виключити з числа аксіом алгебри скінченних предикатів.

Зауважимо, що введення операції заперечення в алгебрі скінченних предикатів не розширює її виражальних можливостей. Адже ми знаємо, що алгебра скінченних предикатів повна і без операції заперечення. Таким чином, введенням операції заперечення досягається лише консервативне розширення алгебри скінченних предикатів. Далі ми не раз будемо вводити в алгебрі скінченних предикатів нові операції. Хоча вони і не розширюють виражальних можливостей алгебри скінченних предикатів, проте роблять більш гнучким її мову, підвищують рівень її абстрактності.

Розглянемо поняття *інверсного предиката*, яке нам знадобиться при введенні досконалої кон'юнктивної нормальної форми. Предикат  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  назвемо інверсним по відношенню до предикату  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , якщо

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Предикат, інверсний предикату  $f$ , будемо записувати у вигляді  $f^*$ , так що

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (45)$$

Таблиця інверсного предиката може бути отримана з таблиці вихідного предиката заміною в її останньому рядку значень предиката на зворотні: 0 на 1 і 1 на 0. Для кожного предиката існує інверсний йому предикат. Предикат, інверсний інверсному предикату, збігається з вихідним предикатом:

$$f^{**}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (46)$$

Система предикатів, інверсних усім можливим предикатам, збігається з системою всіх предикатів (маються на увазі предикати одного і того ж типу, які відповідають цілком певним множинам літер і змінних). За формулою, що представляє деякий скінченний предикат, неважко побудувати формулу для інверсного предиката. Для цього потрібно в вихідній формулі замінити всі знаки кон'юнкції знаками диз'юнкції, знаки диз'юнкції – знаками кон'юнкції, знаки 0 – знаками 1 і знаки 1 – знаками 0. Слід також ввести знаки заперечення над тими узнаваннями літер, де вони до цього були відсутні, і виключити знаки заперечення у тих узнавань літер, над якими вони були присутні. Наприклад, нехай

$$f \equiv x_1^a x_2^b \vee \bar{x}_3^c,$$

тоді

$$f^* \equiv (\bar{x}_1^a \wedge \bar{x}_2^b) x_3^c.$$

Розглянемо тепер кон'юнктивне розкладання предиката. Для цього застосуємо тотожність (29) до предикату  $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n) \equiv$$

$$\equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_l^{\sigma_l} f^*(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l, x_{l+1}, \dots, x_n).$$

Діємо запереченням на ліву і праву частини отриманої тотожності, використовуючи закони де Моргана і враховуючи, що  $\overline{f^*} \equiv f$ . В результаті приходимо до *теорема про кон'юнктивне розкладання*, сформульоване таким чином.

*Будь-який скінченний предикат  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  може бути наданий у вигляді:*

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n) \equiv \\ & \equiv \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)} (\overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \dots \vee \overline{x_l^{\sigma_l}} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l, x_{l+1}, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (47)$$

Подання предиката  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у вигляді правої частини тотожності (47) назвемо його *кон'юнктивним розкладанням* за змінними  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Літерні змінні  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$  відіграють роль індексів при утворенні багаторазової кон'юнкції. Запис  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)$  під знаком кон'юнкції означає, що логічне множення ведеться за всіма можливими наборами індексів  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ . Таким чином, у правій частині тотожності (47) присутні  $k^l$  кон'юнктивних членів.

З теорема про кон'юнктивне розкладання впливають такі два *наслідки*.

*Наслідок 1. Будь-який скінченний предикат  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  може бути наданий у вигляді*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv & (\overline{x_1^{a_1}} \vee f(a_1, x_2, \dots, x_n)) (\overline{x_1^{a_2}} \vee f(a_2, x_2, \dots, x_n)) \dots \\ & \dots (\overline{x_1^{a_k}} \vee f(a_k, x_2, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (48)$$

*Наслідок 2. Будь-який скінченний предикат  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  може бути наданий у вигляді*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=0} (\overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{\sigma_n}}). \quad (49)$$

Тотожності (48) і (49) отримуємо, вважаючи у виразі (47) відповідно  $l = 1$  і  $l = n$ . Запис  $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$  в (49) під знаком кон'юнкції означає, що логічне множення ведеться тільки за тими наборами індексів  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)$ , які звертають предикат  $f$  в 0. Якщо предикат  $f$  тотожно істинний, то,

відповідно до теореми про кон'юнктивне розкладання, в правій частині тотожності (49) потрібно ставити 1.

Подання предиката  $f$  у вигляді формули, одержуваної в результаті виключення з першої частини тотожності (49) знаків заперечення за допомогою законів заперечення, назовемо *досконалою кон'юнктивною нормальною формою* предиката  $f$  (ДКНФ). Розглянемо приклад отримання ДКНФ предиката. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2\}$ . Знайти ДКНФ предиката:

$$f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a.$$

Значення  $f(\sigma_1, \sigma_2)$  дорівнюють 0 для всіх наборів  $(\sigma_1, \sigma_2)$ , крім  $(a, b)$ ,  $(a, c)$  і  $(b, a)$ . За формулою (49) знаходимо:

$$f(x_1, x_2) \equiv (\overline{x_1^a} \vee \overline{x_2^a})(\overline{x_1^b} \vee \overline{x_2^b})(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^c})(x_1^a \vee x_2^a)(x_1^c \vee x_2^c)(x_1^b \vee x_2^b).$$

Позбавляючись від заперечень за допомогою тотожностей (34), виводимо ДКНФ предиката  $f$ :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c) \wedge \\ &\wedge (x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^c) \wedge \\ &\wedge (x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b). \end{aligned}$$

Як відомо, в алгебрі булевих функцій поняття ДДНФ і ДКНФ двоїсті одне одному. Це означає, що визначення поняття ДКНФ в алгебрі булевих функцій може бути отримано простою заміною в визначенні ДДНФ слів «кон'юнкція», «диз'юнкція», «істина», «неправда» відповідно словами «диз'юнкція», «кон'юнкція», «неправда», «істина». В алгебрі скінченних предикатів було б неправильно визначати ДКНФ за аналогією з ДДНФ як кон'юнкцію таких диз'юнкцій узнав'язь літер, в які кожна змінна входить по одному разу. Насправді в кон'юнктивні члени ДКНФ кожна змінна входить  $k - 1$  раз. В алгебрі скінченних предикатів тільки при  $k = 2$  має місце подвійність понять ДДНФ і ДКНФ такого ж типу, як і в алгебрі булевих функцій.

Введемо поняття елементарної диз'юнкції, конституенти нуля і кон'юнктивної нормальної форми. Ці поняття не є двоїстими поняттями елементарної кон'юнкції, конституенти одиниці і ДНФ, як це має місце в алгебрі булевих функцій. *Елементарною диз'юнкцією* назовемо таку

диз'юнкцію узнавань літер, в яку кожне узнавання літери може входити не більше одного разу і жодна зі змінних не може входити не більше  $k - 1$  раз. Елементарною диз'юнкцією, яка не містить жодного диз'юнктивного члена, будемо вважати формулу 0. Іншими словами, ніяка змінна не може бути представлена в елементарній диз'юнкції усіма своїми узнаваннями, хоча б одне із узнавань має бути відсутнім. Прикладами елементарних диз'юнкцій при  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$  можуть бути формули

$$x_1^a \vee x_2^b; \quad x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b; \quad x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^a \vee x_3^c.$$

Формула

$$x_1^a \vee x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a$$

не є елементарною диз'юнкцією, оскільки в неї входять усі узнавання літери для змінної  $x_1$ . Така формула виражає тотожно істинний предикат.

Будь-яку кон'юнкцію довільного числа різних елементарних диз'юнкцій назвемо *кон'юнктивною нормальною формою (КНФ)* предиката. Як КНФ, яка не містить жодного кон'юнктивного члена, приймемо формулу 1. Приклад КНФ:

$$(x_1^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b)(x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^a \vee x_3^c).$$

Будь-яку елементарну диз'юнкцію, в якій зустрічаються всі змінні алгебри скінченних предикатів, причому кожна з них входить  $k - 1$  разів у складі узнавань літер з різними показниками, назвемо *конституентною нуля*. Домовимося в конституенті нуля всі узнавання літер розташовувати в порядку зростання номерів змінних, а для однакових змінних – в порядку зростання номерів літер, що відіграють роль показників узнавань літери. Приклад конституенти нуля (в тій же алгебрі):

$$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^a \vee x_3^c.$$

Використовуючи знак заперечення, можна записувати конституенти нуля в більш компактній формі, близькій до форми запису конституенти одиниці. Конституенту нуля, наведену в попередньому прикладі, запишемо так:

$$\overline{x_1^c \vee x_2^a \vee x_3^b}.$$

Остання форма запису константи нуля інверсна формі запису константи одиниці: в ній замість знаків кон'юнкції стоять знаки диз'юнкції, а над узнаваннями літер з'явилися знаки заперечення.

Тепер ми можемо дати ще одне, рівнозначне першому, визначення *досконалої кон'юнктивної нормальної форми* як кон'юнкції довільного числа різних конститuent нуля. Здійснюючи нумерацію конститuent нуля і ДКНФ, можна показати, що кожному  $k$ -ковому  $n$ -місцевому предикату відповідає одна ДКНФ. Як ДКНФ тотожно істинного предиката приймаємо формулу 1.

Окрім кон'юнкції і диз'юнкції предикатів, розглянутих раніше, введемо в алгебрі скінченних предикатів ще одну двомісну операцію – *імплікацію предикатів*  $\supset$ , визначивши її такою рівністю:

$$A \supset B \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A} \vee B. \quad (50)$$

Літери  $A$  і  $B$  позначають довільні формули алгебри скінченних предикатів. Знак  $\stackrel{\text{def}}{=}$  позначає рівність предикатів за визначенням.

Операцію  $\supset$  вважатимемо молодшою по відношенню до операцій  $\wedge$  і  $\vee$ . Це означає, що за відсутності у формулі дужок, що регулюють порядок виконання операцій, операція імплікації повинна виконуватися після виконання операцій кон'юнкції і диз'юнкції.

Властивості імплікації предикатів збігаються з властивостями імплікації висловлювань. Випишемо найбільш важливі з них:

1) *рефлексивність імплікації*:

$$A \supset A \equiv 1; \quad (51)$$

2) *транзитивність імплікації*:

$$(A \supset B)(B \supset C) \supset (A \supset C) \equiv 1; \quad (52)$$

3) *властивості логічних констант*:

$$0 \supset A \equiv 1, \quad (53)$$

$$1 \supset A \equiv A, \quad (54)$$

$$A \supset 0 \equiv \bar{A}, \quad (55)$$

$$A \supset 1 \equiv 1; \quad (56)$$

4) закон дедукції:

$$A(A \supset B) \supset B \equiv 1; \quad (57)$$

5) закон контрапозиції:

$$A \supset B \equiv \bar{B} \supset \bar{A}; \quad (58)$$

6) закон імпортации:

$$(A \supset (B \supset C)) \supset (AB \supset C) \equiv 1; \quad (59)$$

7) закон експортации:

$$(AB \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)) \equiv 1; \quad (60)$$

8) закон приведення до абсурду:

$$A \bar{A} \supset B \equiv 1. \quad (61)$$

Використовуючи операцію імплікації, тотожність (47) можна записати без знаків заперечення:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n) &\equiv \\ &\equiv \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l)} (x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_l^{\sigma_l} \supset f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l, x_{l+1}, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (62)$$

Відповідно до цього перший і другий наслідки теореми про кон'юнктивне розкладання запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\equiv (x_1^{a_1} \supset f(a_1, x_2, \dots, x_n))(x_1^{a_2} \supset f(a_2, x_2, \dots, x_n)) \dots \\ &\dots (x_1^{a_k} \supset f(a_k, x_2, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (63)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=0} (x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} \supset 0). \quad (64)$$

Остання тотожність називається *імплікативним розкладанням предиката*. Воно показує, що будь-який скінченний предикат може бути поданий у вигляді суперпозиції операцій кон'юнкції і імплікації, що діють на усі можливі узнавання літер, і на тотожно помилковий предикат 0. В той же час, як зазначалося вище, при  $k \geq 2$  предикат 0 можна виразити у вигляді кон'юнкції деяких узнавань літер, наприклад,  $x_1^{a_1} x_1^{a_2} = 0$ . Таким чином, ми приходимо до ще однієї повної алгебри скінченних предикатів. Її базис складають операції кон'юнкції і імплікації і усі можливі узнавання літер. Щоб мати можливість розрізняти обидві введені алгебри, першу назовемо диз'юнктивною алгеброю скінченних предикатів, а другу – імплікативною. Імплікативна алгебра може бути отримана з диз'юнктивною

заміною в її базисі операції диз'юнкції операцією імплікації. Крім двох знайдених, існує множина інших алгебр скінченних предикатів. Зокрема, будь-який набір операцій, що задовольняє умови теореми Поста, разом із усілякими узнаваннями літер, можна прийняти як базис повної алгебри скінченних предикатів. На роль повної системи елементарних операцій також підходить будь-яка система операцій, через які виражаються операції кон'юнкції і диз'юнкції або операції кон'юнкції і імплікації. Мабуть, існують і інші базиси, що задають повні алгебри скінченних предикатів. Ще належить сформулювати критерій повноти для алгебр скінченних предикатів

У даних методичних вказівках як мова для запису скінченних предикатів прийнята диз'юнктивна алгебра і різні її консервативні розширення. Зручність диз'юнктивної алгебри скінченних предикатів полягає в тому, що на її мові коротко і витончено записуються закони істинності і хибності. Ці закони в будь-якій алгебрі скінченних предикатів будуть відігравати особливу роль. По суті, вони являють собою вимоги, виконання яких необхідне і достатнє для коректного введення змінних на скінченних множинах. Закон істинності задає область зміни змінної, а закон хибності забезпечує попарну відмінність всіх елементів множини, на якій задана змінна. У будь-який інший алгебрі закони істинності і хибності будуть записуватися у вигляді більш громіздких виразів. Далі диз'юнктивну алгебру і її консервативні розширення будемо називати просто *алгеброю скінченних предикатів*.

### **Вправи**

1. Виключіть знаки заперечення з будь-якої формули алгебри предикатів.
2. Наведіть приклад доведення будь-якого твердження індукцією за довжиною формули алгебри предикатів.
3. Побудуйте інверсну формулу для будь-якої формули алгебри скінченних предикатів.



4. Відшукайте ДКНФ будь-якого предиката.
5. Наведіть приклади елементарних диз'юнкцій.
6. Наведіть приклад кон'юнктивної нормальної форми предиката.
7. Наведіть приклади конституенти нуля.
8. Перелічіть відомі Вам властивості імплікації предикатів.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке заперечення предиката, які його властивості?
2. Що таке закон заперечення?
3. Як виключити знаки заперечення з формули алгебри предикатів?
4. Що таке закони поглинання заперечення?
5. Що таке інверсний предикат?
6. Що таке кон'юнктивне розкладання предиката?
7. Що таке елементарна диз'юнкція?
8. Що таке КНФ?
9. Що таке конституенти нуля?
10. Що таке ДКНФ предиката?
11. Що таке імплікація предикатів, які її властивості?
12. Що таке імплікативне розкладання предиката?
13. Що таке імплікативна алгебра предикатів?

## 5 МІНІМІЗАЦІЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРИ СКІНЧЕННИХ ПРЕДИКАТІВ

Існує безліч диз'юнктивних і кон'юнктивних нормальних форм, що відповідають одному і тому ж скінченному предикату. Цікавою є така задача: вибрати з безлічі таку форму, в яку входить найменше число узнавань літер. Назвемо цю задачу *канонічною задачею мінімізації* формул алгебри скінченних предикатів. Уміння мінімізувати формули, як буде показано нижче, корисно при вирішенні рівнянь теорії інтелекту, а також при побудові схем, що реалізують функції інтелекту. Диз'юнктивні і кон'юнктивні нормальні форми, які одержуємо в результаті канонічної мінімізації, назвемо мінімальними ДНФ і КНФ. Проблема канонічної мінімізації в алгебрі скінченних предикатів має багато спільного з однойменною проблемою в алгебрі булевих функцій. Всі викладені в цьому розділі методи можна розглядати як узагальнення відомих в алгебрі булевих функцій методів канонічної мінімізації.

*Пошук мінімальної диз'юнктивної нормальної форми.* Тут ми визначимо послідовність дій, які повинні бути виконані при знаходженні мінімальної ДНФ. Предикат  $g$  назвемо *імплікантою предиката  $f$* , якщо на будь-якому наборі значень аргументів, для якого  $g = 1$ , маємо також  $f = 1$ . Будемо говорити, що імпліканта  $g$  накриває своїми одиницями одиниці предиката  $f$ . Елементарну кон'юнкцію  $g$  назвемо *власною частиною* елементарної кон'юнкції  $f$ , якщо  $g$  може бути отримана з  $f$  викиданням деяких узнавань літер. Наприклад, елементарна кон'юнкція  $x_1^a x_3^b$  є власною частиною елементарної кон'юнкції  $x_1^a x_2^c x_3^b$ . Назвемо *простою імплікантою* предиката  $f$  будь-яку елементарну кон'юнкцію, що володіє такими властивостями: вона є імплікантою предиката  $f$ , і ніяка її власна частина не є імплікантою предиката  $f$ .

Диз'юнкція будь-якого числа імплікант скінченного предиката є імплікантою цього предиката. Систему  $S$  імплікант скінченного предиката  $f$  назвемо *повною*, якщо будь-яка одиниця з таблиці значень предиката  $f$  накривається одиницями хоча б однією імплікантою системи  $S$ . Тому або

іншому скінченному предикату може відповідати, взагалі кажучи, кілька різних повних систем імплікант. Диз'юнкція усіх імплікант повної системи імплікант кожного скінченного предиката виражає собою цей предикат. Система всіх простих імплікант будь-якого скінченного предиката є його повною системою. Диз'юнкція всіх простих імплікант скінченного предиката виражає собою цей предикат; назвемо її *скороченою диз'юнктивною нормальною формою* даного скінченного предиката.

У багатьох випадках (проте далеко не завжди) скорочена диз'юнктивна нормальна форма являє собою більш економічний засіб запису скінченних предикатів, ніж ДДФ. Однак скорочена форма, як правило, не співпадає з мінімальною диз'юнктивною нормальною формою, яка складніше за неї. *Диз'юнктивним ядром* скінченного предиката назвемо безліч всіх таких його простих імплікант, виключення кожної з яких із системи усіх простих імплікант робить цю систему неповною. Елементи диз'юнктивного ядра входять до складу будь-якої повної системи простих імплікант. Систему простих імплікант скінченного предиката назвемо *приведеною*, якщо вона повна і ніяка її власна підмножина не є повною системою. Диз'юнкцію всіх простих імплікант наведеної системи назвемо *тупиковою диз'юнктивною нормальною формою* предиката. Відзначимо, що предикат може мати багато тупикових диз'юнктивних нормальних форм.

Будь-яка мінімальна диз'юнктивна нормальна форма є разом з тим і тупиковою ДДФ. Багато скінченних предикатів мають декілька різних мінімальних ДДФ, що містять однакове число узнавань літер. Вибираючи з числа тупикових ДДФ одну з найменшим числом узнавань літер, отримуємо мінімальну ДДФ предиката. Сформульовані поняття і положення дозволяють намітити хід дій, що лежать в основі всіх описаних нижче методів мінімізації формул алгебри скінченних предикатів. Спочатку потрібно відшукати всі прості імпліканти заданого скінченного предиката і скласти з них скорочену ДДФ. Потім слід знайти всі тупикові

ДНФ і з їх числа вибрати мінімальну диз'юнктивну нормальну форму скінченного предиката.

Нижче розглядаються три алгоритми мінімізації формул алгебри скінченних предикатів. Алгоритми супроводжуються прикладами. В окремому випадку при  $k=2$  вони перетворюються у відомі алгоритми канонічної мінімізації формул алгебри булевих функцій Квайна – Мак-Класкі, Порецького – Блейка і Нельсона.

*Узагальнення методу Квайна – Мак-Класкі.* Розглянемо метод диз'юнктивної мінімізації формул алгебри скінченних предикатів, що узагальнює відомий метод Квайна – Мак-Класкі мінімізації формул алгебри булевих функцій. Початковою інформацією при мінімізації служить досконала диз'юнктивна нормальна форма предиката, для якого відшукується мінімальна ДНФ. Розглянемо приклад. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Предикат заданий такою ДДНФ:

$$f \equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^c \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^c x_3^a \vee x_1^a x_2^c x_3^b \vee x_1^a x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^c \vee x_1^c x_2^a x_3^b \vee x_1^c x_2^b x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c.$$

Нижче описується алгоритм мінімізації, що включає в себе 9 кроків.

1. Усюди, де це можливо, застосовуємо *операцію неповного диз'юнктивного склеювання*, яка оснований на тотожності:

$$A x^{a_1} \vee A x^{a_2} \vee \dots \vee A x^{a_k} \equiv A x^{a_1} \vee A x^{a_2} \vee \dots \vee A x^{a_k} \vee A. \quad (65)$$

Тут  $A$  – деяка елементарна кон'юнкція,  $x$  – одна з літерних змінних. Операція неповного диз'юнктивного склеювання полягає в дописуванні до вихідної ДНФ у вигляді додаткових диз'юнктивних членів усіх можливих елементарних кон'юнкцій, які можна отримати переходом від лівої частини тотожності (65) до правої. Операцію неповного диз'юнктивного склеювання спершу застосовуємо до конституенти одиниці вихідної ДДНФ, потім – до елементарної кон'юнкції, що складається з  $n-1$  узнавань літер,  $n-2$  узнавань літер і т.д. і, нарешті, до елементарних кон'юнкцій, що складаються з одного узнавання літери. У нашому прикладі маємо:

$$f \equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^c \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^c x_3^a \vee x_1^a x_2^c x_3^b \vee x_1^a x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^c \vee x_1^c x_2^a x_3^b \vee x_1^c x_2^b x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c \vee x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^a x_3^b \vee x_1^c x_3^b \vee x_2^b x_3^b.$$

2. Застосовуємо до диз'юнктивних членів отриманої формули всюди, де це можливо, операцію елементарного диз'юнктивного поглинання:

$$Ax^\sigma \vee A \equiv A, \tag{66}$$

де  $x^\sigma$  – деякий предикат узнавання літери. В результаті отримуємо скорочену ДНФ. У прикладі маємо:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_3^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c.$$

3. Складаємо імплікантну таблицю. *Імплікантна таблиця* скінченного предиката  $f$  являє собою матрицю, рядки якої позначені усіма можливими простими імплікантами предиката  $f$ , а стовпці – конститuentами одиниці того ж предиката. Кожна клітинка таблиці відповідає парі предикатів, один з них представлений конститuentою одиниці, інший – деякою елементарною кон'юнкцією. Якщо елементарна кон'юнкція, відповідна деякому рядку таблиці, є імплікантою для конститuentи одиниці, що відповідає деякому стовпцю, то в клітинку, утворену перетином рядка і стовпця, заносимо зірочку, в іншому випадку клітинку залишаємо незаповненою. Імплікантна таблиця, що отримується в прикладі, подана в таблиці 7.

Таблиця 7

Проста імпліканта	$x_1^a x_2^a x_3^a$	$x_1^a x_2^a x_3^c$	$x_1^a x_2^a x_3^b$	$x_1^a x_2^b x_3^b$	$x_1^a x_2^c x_3^a$	$x_1^a x_2^c x_3^b$	$x_1^a x_2^c x_3^c$	$x_1^b x_2^b x_3^a$	$x_1^b x_2^b x_3^b$	$x_1^b x_2^b x_3^c$	$x_1^c x_2^a x_3^b$	$x_1^c x_2^b x_3^b$	$x_1^c x_2^c x_3^b$	$x_1^c x_2^c x_3^c$
$x_1^a x_2^a$	*	*	*											
$x_1^a x_3^b$		*		*		*								
$x_1^a x_2^c$					*	*	*							
$x_2^b x_3^b$				*					*			*		
$x_1^b x_2^b$								*	*	*				
$x_1^c x_3^b$											*	*	*	

### Завершення таблиці 7

Проста імпліканта	$x_1^a x_2^a x_3^a$	$x_1^a x_2^a x_3^c$	$x_1^a x_2^a x_3^c$	$x_1^a x_2^b x_3^b$	$x_1^a x_2^c x_3^a$	$x_1^a x_2^c x_3^b$	$x_1^a x_2^c x_3^c$	$x_1^b x_2^b x_3^a$	$x_1^b x_2^b x_3^b$	$x_1^b x_2^b x_3^c$	$x_1^c x_2^a x_3^b$	$x_1^c x_2^b x_3^b$	$x_1^c x_2^c x_3^b$	$x_1^c x_2^c x_3^c$
$x_1^c x_2^c x_3^c$														*

4. За імплікантною таблицею знаходимо диз'юнктивне ядро предиката, для чого знаходимо ті стовпці таблиці, в яких міститься по одній зірочці. Відповідні зірочкам прості імпліканти утворюють диз'юнктивне ядро предиката. У прикладі диз'юнктивне ядро предиката є такою множиною:

$$\{x_1^a x_2^a, x_1^a x_2^c, x_1^b x_2^b, x_1^c x_3^b, x_1^c x_2^c x_3^c\}.$$

5. За імплікантною таблицею відшукуємо систему усіх конститuentів одиниці предиката, що не накриваються одиницями його диз'юнктивного ядра. З цією метою відзначаємо всі стовпці, в яких містяться зірочки, відповідні простим імплікантам, що увійшли до складу диз'юнктивного ядра. Стовпці, що залишилися невідзначеними, відповідають потрібним конститuentам одиниці. У нашому прикладі розшукувана система має в своєму складі єдину конститuentу одиниці  $\{x_1^a x_2^b x_3^b\}$ .

6. За імплікантною таблицею методом повного перебору відшукуємо всі наведені системи простих імплікант, що накривають своїми одиницями усі конститuentи одиниці системи, вихначеної на п'ятому кроці алгоритму. У прикладі маємо дві такі системи:  $\{x_1^a x_3^b\}$ ,  $\{x_2^b x_3^b\}$ , кожна з яких складається з однієї конститuentи одиниці.

7. Об'єднуючи диз'юнктивне ядро предиката з кожною з систем, отриманих на шостому кроці алгоритму, формуємо всі наведені системи простих імплікант предиката. У нашому прикладі маємо дві системи:

$$\{x_1^a x_2^a, x_1^a x_2^c, x_1^b x_2^b, x_1^c x_3^b, x_1^c x_2^c x_3^c, x_1^a x_3^b\},$$

$$\{x_1^a x_2^a, x_1^a x_2^c, x_1^b x_2^b, x_1^c x_3^b, x_1^c x_2^c x_3^c, x_2^b x_3^b\}.$$

8. Будуємо усі тупикові ДНФ предиката. У прикладі маємо дві такі форми:

$$x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c \vee x_1^a x_3^b,$$

$$x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_3^b.$$

9.3 числа тупикових ДНФ вибираємо мінімальну ДНФ, що має найменше число узнавань літер. У нашому прикладі обидві тупикові ДНФ мають однакове число узнавань літер – 13, будь-яка з них може бути прийнята як мінімальна ДНФ. Вихідна ДДНФ предиката  $f$  має 42 узнавання літери. В результаті мінімізації число узнавань літер у формулі скоротилося більш ніж в три рази.

*Узагальнення методів Порецького – Блейка і Нельсона.* Нижче наведено опис алгоритму мінімізації формул алгебри скінченних предикатів, який *узагальнює* алгоритм Порецького – Блейка диз'юнктивної мінімізації формул алгебри булевих функцій. Вихідною інформацією при мінімізації для цього алгоритму служить довільно обрана ДНФ предиката, для якого відшукується мінімальна ДНФ. Розглянемо приклад. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ . Предикат  $f$  заданий такою ДНФ:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_2^c x_3^a \vee x_1^c x_2^c x_3^a.$$

1. Застосовуємо до диз'юнктивних членів вихідної ДНФ всюди, де можливо, *операцію групування узнавань літер*:

$$Ax^{\sigma_1} \vee Ax^{\sigma_2} \vee \dots \vee Ax^{\sigma_r} \equiv A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_r}). \quad (67)$$

Зазначена операція не використовується в методі Порецького – Блейка при мінімізації формул алгебри булевих функцій, вона стає необхідною тільки в алгебрі скінченних предикатів при диз'юнктивній мінімізації в разі, коли  $k > 2$ . В результаті виконання операції групування узнавань літер отримуємо диз'юнкцію деяких дужкових форм. У нашому прикладі:

$$f \equiv (x_1^a)x_2^a \vee (x_1^a)x_2^b \vee (x_1^a)x_3^a \vee (x_1^b \vee x_1^c)x_2^c x_3^a \vee x_1^a(x_2^a \vee x_2^b) \vee$$

$$\vee x_1^b(x_2^c)x_3^a \vee x_1^c(x_2^c)x_3^a \vee x_1^a(x_3^a) \vee x_1^b x_2^c(x_3^a) \vee x_1^c x_2^c(x_3^a).$$

2. До дужкових форм всюди, де це можливо, застосовуємо *операцію узагальненого диз'юнктивного склеювання*, засновану на використанні тотожності

$$A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_r}) \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \dots \vee x^{\sigma_s}) \equiv$$

$$\equiv A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_r}) \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \dots \vee x^{\sigma_s}) \vee AB. \quad (68)$$

Ця тотожність справедлива лише в тому випадку, коли множина  $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s\}$  збігається з алфавітом  $A$ , причому в записі множини допускаються повтори літер. Результатом операції узагальненого диз'юнктивного склеювання є множина всіх ненульових кон'юнкцій виду  $AB$ . У нашому прикладі отримуємо множину, що складається з єдиного добутку  $\{x_2^c x_3^a\}$ . Зауважимо, що тотожність (68), що лежить в основі операції узагальненого диз'юнктивного склеювання в алгебрі скінченних предикатів, виглядає складнішою, ніж відповідна тотожність в алгебрі булевих функцій. В окремому випадку при  $k=2$  тотожність (68) переходить у відому тотожність алгебри булевих функцій:  $Ax \vee B\bar{x} \equiv Ax \vee B\bar{x} \vee AB$ , що використовується в алгоритмі Порецького – Блейка. Доведемо справедливість тотожності (68):

$$\begin{aligned}
 & A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_r}) \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \dots \vee x^{\sigma_s}) \equiv \\
 & \equiv A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_r}) \vee AB(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_r}) \vee \\
 & \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \dots \vee x^{\sigma_s}) \vee AB(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \dots \vee \\
 & \vee x^{\sigma_s}) \equiv AB(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_s}) \vee A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee \\
 & \vee x^{\sigma_r}) \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \dots \vee x^{\sigma_s}) \equiv AB(x^{\sigma_1} \vee \\
 & \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_k}) \vee A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_r}) \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee \\
 & \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \dots \vee x^{\sigma_s}) \equiv AB \vee A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \dots \vee x^{\sigma_r}) \vee \\
 & \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \dots \vee x^{\sigma_s}).
 \end{aligned}$$

3. Вихідну ДНФ поповнюємо диз'юнктивними членами з системи, отриманої на другому кроці алгоритму. У нашому прикладі маємо:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_2^c x_3^a \vee x_1^c x_2^c x_3^a \vee x_2^c x_3^a.$$

4. Застосовуємо всюди, де це тільки можливо, операцію диз'юнктивного поглинання  $A \vee AB \equiv A$ . В результаті виконання цього кроку алгоритму отримуємо скорочену ДНФ скінченного предиката. За прикладом скорочена ДНФ має вигляд:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_3^a \vee x_2^c x_3^a.$$

5. Від скороченої ДНФ переходимо до мінімальної ДНФ за методом Квайна – Мак-Класкі. За прикладом отримуємо таку мінімальну ДНФ:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a.$$



Переходимо до опису алгоритму мінімізації формул алгебри скінченних предикатів, який *узагальнює* метод Нельсона мінімізації формул алгебри булевих функцій. Вихідною інформацією при мінімізації для цього алгоритму є довільно обрана КНФ предиката, для якої відшукується мінімальна ДНФ. Розглянемо приклад. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Предикат  $f$  заданий такою КНФ:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a).$$

1. Розкриваємо дужки і знищуємо усі нульові диз'юнктивні члени. За прикладом отримуємо:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_3^a \vee x_2^c x_3^a.$$

2. Застосовуємо операцію диз'юнктивного поглинання. В результаті отримуємо скорочену ДНФ. У нашому прикладі застосування операції диз'юнктивного поглинання не приводить до спрощень, тому формула, визначена на першому кроці алгоритму, є скороченою ДНФ.

3. За методом Квайна – Мак-Класкі переходимо від скороченої ДНФ до мінімальної ДНФ, яка за прикладом дорівнює:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a.$$

Відзначимо, що в розглянутому прикладі вихідна КНФ предиката  $f$  має п'ять узнавань літер, це менше, ніж в мінімальній ДНФ, де їх шість. Цим прикладом демонструється важливість задачі пошуку мінімальної КНФ в алгебрі скінченних предикатів. Вирішення вказаної задачі викладається у наступному пункті.

*Пошук мінімальної кон'юнктивної нормальної форми.* В алгебрі булевих функцій має місце принцип двоїстості, через який методи пошуку мінімальної КНФ виявляються абсолютно аналогічними методам пошуку мінімальної ДНФ. В алгебрі скінченних предикатів при  $k > 2$  стан інший. Тут ми позбавлені принципу двоїстості, він тепер втрачає силу, операції кон'юнкції і диз'юнкції тепер вже не рівноправні. Тому методи кон'юнктивної мінімізації повинні розглядатися окремо, тут не можна обійтися посиланням на аналогію з методами диз'юнктивної мінімізації.

Предикат  $g$  назвемо *імпліцентовою* предиката  $f$ , якщо на будь-якому наборі значень аргументів, для якого  $g = 0$ , маємо також  $f = 0$ . Будемо говорити, що імпліцента  $g$  накриває своїми нулями нулі предиката  $f$ . Елементарну диз'юнкцію  $g$  назвемо *власною частиною* елементарної диз'юнкції  $f$ , якщо  $g$  може бути отримана з  $f$  викиданням деяких узнавнь літер. Наприклад, елементарна диз'юнкція  $x_1^a \vee x_1^b \vee x_3^c$  є власною частиною елементарної диз'юнкції  $x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^c \vee x_3^c$ . Назвемо *простою імпліцентовою* предиката  $f$  будь-яку елементарну диз'юнкцію, що володіє такими властивостями: вона є *імпліцентовою* предиката  $f$  і ніяка її власна частина не є імпліцентовою предиката  $f$ .

Кон'юнкція будь-якого числа імпліцент скінченного предиката є імпліцентовою цього предиката. Систему  $S$  імпліцент скінченного предиката  $f$  назвемо *повною*, якщо будь-який нуль з таблиці значень предиката  $f$  накривається нулями хоча б однієї імпліценти системи  $S$ . Тому чи іншому скінченному предикату може відповідати, взагалі кажучи, декілька різних повних систем імпліцент. Кон'юнкція усіх імпліцент повної системи імпліцент деякого скінченного предиката виражає собою цей предикат. Система всіх простих імпліцент будь-якого скінченного предиката є його повною системою. Кон'юнкція усіх простих імпліцент скінченного предиката висловлює собою цей предикат, назвемо її *скороченою КНФ* даного скінченного предиката.

*Кон'юнктивним ядром* скінченного предиката назвемо множину всіх таких його простих імпліцент, виключення кожної з яких із системи всіх простих імпліцент робить систему неповною. Елементи кон'юнктивного ядра входять до складу будь-якої повної системи простих імпліцент. Систему простих імпліцент скінченного предиката назвемо *приведеною*, якщо вона повна і ніяка її власна підмножина не є повною системою. Кон'юнкцію всіх простих імпліцент наведеної системи назвемо *тупиковою кон'юнктивною нормальною формою* предиката. Вибираючи з числа тупикових КНФ одну з найменшим числом узнавнь літер, отримуємо мінімальну КНФ.

Розглянемо метод кон'юнктивної мінімізації формул алгебри скінченних предикатів, який узагальнює метод Квайна – Мак-Класкі. Вихідною інформацією при мінімізації служить ДКНФ предиката, для якого відшукується мінімальна КНФ. Розглянемо приклад. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Предикат заданий такою ДКНФ:

$$f \equiv (\overline{x_1^a} \vee \overline{x_2^a} \vee \overline{x_3^a})(\overline{x_1^a} \vee \overline{x_2^b} \vee \overline{x_3^a})(\overline{x_1^b} \vee \overline{x_2^a} \vee \overline{x_3^a}) \wedge (\overline{x_1^b} \vee \overline{x_2^b} \vee \overline{x_3^a})(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^c} \vee \overline{x_3^a})(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^b} \vee \overline{x_3^b})(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^a} \vee \overline{x_3^c}).$$

ДКНФ представлена у скороченому записі з використанням знаків заперечення. Далі обробці піддається власне ДКНФ, а не її скорочений запис.

Нижче описується алгоритм мінімізації:

1. Усюди, де це можливо, застосовуємо *операцію неповного кон'юнктивного склеювання*, заснованого на тотожності

$$(A \vee x^{a_i})(A \vee x^{a_j}) \equiv (A \vee x^{a_i})(A \vee x^{a_j})A, \quad (69)$$

яке справедливо за умови  $i \neq j$ . Операція неповного кон'юнктивного склеювання складається в дописуванні у вихідну КНФ у вигляді додаткових кон'юнктивних членів всіляких елементарних диз'юнкцій  $A$ . Останні можна отримати шляхом переходу від лівої частини тотожності (68) до правої. Операцію неповного кон'юнктивного склеювання спочатку застосовуємо до конституенти нуля вихідної ДКНФ, потім – до елементарних диз'юнкцій, що складаються з  $n(k-1) - 1$  узнавань літер,  $n(k-1) - 2$  узнавань літер та ін., нарешті, до елементарних диз'юнкцій, що складаються з одного узнавання літери. У нашому прикладі маємо:

$$\begin{aligned} f \equiv & (x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c \vee x_3^b \vee \\ & \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c \vee x_3^b \vee \\ & \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a \vee \\ & \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a \vee x_3^b)(x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^c \vee x_3^b \vee \\ & \vee x_3^c)(x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c) \wedge \\ & \wedge (x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^c) \wedge (x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a) \wedge (x_1^c \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b). \end{aligned}$$

2. Застосовуємо до кон'юнктивного члена отриманої формули *операцію елементарного кон'юнктивного поглинання*:

$$(A \vee x^\sigma)A \equiv A. \quad (70)$$

Завдяки цьому, отримуємо скорочену КНФ. У нашому прикладі маємо:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^c \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c).$$

У прикладі скорочена КНФ збігається з мінімальною КНФ. У більш складних випадках процес мінімізації продовжується.

3. Складаємо *імпліцентну таблицю*. Імпліцентна таблиця скінченного предиката  $f$  являє собою матрицю, рядки якої позначені всілякими простими імпліцентами предиката  $f$ , а стовпці – конституенти нуля того ж предиката. Кожна клітинка таблиці відповідає парі предикатів, один з яких представлений конституентою нуля, інший – деякою елементарною диз'юнкцією. Якщо елементарна диз'юнкція, відповідає деякому рядку таблиці, є імпліцентою для конституенти нуля, що відповідає деякому стовпцю, то в клітинку, утворену перетином рядка і стовпця, заносимо зірочку, у іншому випадку – клітинку залишаємо незаповненою.

4. За імпліцентною таблицею знаходимо кон'юнктивне ядро предиката. Для цього знаходимо ті стовпці таблиці, в яких міститься тільки по одній зірочці. Відповідні зірочкам прості імпліценти утворюють кон'юнктивне ядро предиката.

5. За імпліцентною таблицею відшукуємо систему усіх простих конституент нуля предиката, що не накриваються нулями його кон'юнктивного ядра. З цією метою відзначаємо всі стовпці, в яких містяться зірочки, відповідні простим імпліцентам, що увійшли до складу кон'юнктивного ядра. Стовпці, що залишилися невідзначеними, відповідають потрібним конституентам одиниці.

6. За імпліцентною таблицею методом повного перебору відшукуємо всі наведені системи простих імпліцент, що накривають своїми нулями усі конституенти нуля системи, знайденої на п'ятому кроці алгоритму.

7. Об'єднуючи кон'юнктивне ядро предиката з кожною з систем, отриманих на шостому кроці алгоритму, формуємо всі наведені системи простих імпліцент предиката.

8. Будуємо усі тупикові КНФ предиката.

Наведемо опис алгоритму мінімізації формул алгебри скінченних предикатів, який *узагальнює* алгоритм Порецького – Блейка кон'юнктивної мінімізації формул алгебри булевих функцій. Вихідною інформацією при мінімізації для цього алгоритму служить довільно обрана КНФ предиката, для якої відшукується мінімальна КНФ. Розглянемо приклад. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2\}$ . Предикат  $f$  заданий такою КНФ:

$$f \equiv (x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c).$$

1. До кон'юнктивних членів вихідної КНФ всюди, де можливо, застосовуємо *операцію узагальненого кон'юнктивного склеювання*, засновану на використанні тотожності

$$(A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j}) \equiv (A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j})(A \vee B), \quad (71)$$

справедливої в разі, коли  $i \neq j$ . Результатом операції узагальненого кон'юнктивного склеювання є множина усіх не рівних одиниці елементарних диз'юнкцій виду  $A \vee B$ . У нашому прикладі отримуємо таку множину елементарних диз'юнкцій:

$$\{x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b, \quad x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b, \quad x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b, \\ x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c, \quad x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c \vee x_2^b, \\ x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c\}.$$

Зауважимо, що тотожність (71), яка полягає в основі операції узагальненого кон'юнктивного склеювання, в алгебрі скінченних предикатів виглядає дещо інакше, ніж відповідна тотожність в алгебрі булевих функцій. В окремому випадку при  $k = 2$  тотожність (71) переходить у відому тотожність алгебри булевих функцій

$$(A \vee x)(B \vee \bar{x}) \equiv (A \vee x)(B \vee \bar{x})(A \vee B),$$

що використовується в алгоритмі Порецького – Блейка. Доведемо справедливості тотожності (71):

$$\begin{aligned}
(A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j}) &\equiv (A \vee x^{a_i})(A \vee x^{a_i} \vee B)(B \vee x^{a_j}) \wedge \\
&\wedge (B \vee x^{a_j} \vee A) \equiv (A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j})(A \vee B \vee x^{a_i} x^{a_j}) \equiv \\
&\equiv (A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j})(A \vee B).
\end{aligned}$$

2. Вихідну КНФ поповнюємо кон'юнктивними членами із системи, отриманої на першому кроці алгоритму. У нашому прикладі маємо

$$\begin{aligned}
f &\equiv (x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c) \wedge \\
&\wedge (x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c)(x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^b)(x_1^a \vee \\
&\vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c) .
\end{aligned}$$

Таблиця. 8

Проста імпліцента	Конституента нуля				
	$x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b$	$x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c$	$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^c$	$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c$	$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b$
$x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c$		*	*		
$x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b$	*				*
$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b$				*	*
$x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c$		*		*	

3. Застосовуємо всюди, де це можливо, операцію кон'юнктивного поглинання  $A(A \vee B) \equiv A$ . В результаті виконання цього кроку алгоритму отримуємо скорочену КНФ скінченного предиката. У нашому прикладі маємо таку скорочену КНФ:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c)(x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c).$$

4. Виконуємо кроки 3-9 попереднього алгоритму. У нашому прикладі імпліцентна таблиця має вигляд, представлений таблиці 8, по якій знаходимо кон'юнктивне ядро предиката:

$$\{x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c, x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b\}.$$

Маємо дві тупикові КНФ:

$$\begin{aligned}
&(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c)(x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b), \\
&(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c)(x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c),
\end{aligned}$$

кожна з яких може бути прийнята в якості мінімальної КНФ предиката  $f$ .

Переходимо до опису алгоритму мінімізації формул алгебри скінченних предикатів, який *узагальнює* алгоритм Нельсона кон'юнктивної мінімізації формул алгебри булевих функцій. Вихідною інформацією при мінімізації служить довільно обрана ДНФ предиката, для якого відшукується мінімальна КНФ. Розглянемо приклад. Нехай  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Предикат заданий такої ДНФ:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a.$$

1. Користуючись другим законом дистрибутивності, переходимо до деякої КНФ предиката  $f$ . У прикладі маємо:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_3^a)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_3^a) \wedge \\ \wedge (x_1^a \vee x_2^a \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_2^a \vee x_3^a)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a).$$

2. Застосовуємо операцію кон'юнктивного поглинання. В результаті отримуємо скорочену КНФ. У нашому прикладі скорочена КНФ має вигляд:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_3^a)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a).$$

3. Виконуємо кроки 3-9 алгоритму узагальнюючого методу Квайна – Мак-Класкі. У прикладі отримуємо таку мінімальну КНФ:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a).$$

Зауважимо, що у напрямку мінімізації формул алгебри скінченних предикатів багато важливих завдань ще чекає свого рішення. До їх числа відносяться: подальша розробка методів канонічної мінімізації; розробка оцінок складності мінімальних форм; розробка методів мінімізації дужкових форм; розробка методів факторизації (пошуку форм з найменшим числом входження знаків кон'юнкції і диз'юнкції).

У читача, який ознайомився з розділами методичних вказівок, може виникнути питання: чому в методичних вказівках, присвячених теорії інтелекту, так багато уваги приділяється розробці формальної мови у вигляді алгебри скінченних предикатів? Чи не краще було б, задовольняючись існуючим математичним апаратом, відразу ж взятися за моделювання якої-небудь складної інтелектуальної діяльності, наприклад,

гри в шахи або доведення теорем. На свій сором, автори колись саме так і вчинили. Об'єктом математичного опису було обрано українську мову. Як формальні мови, якими вівся опис цього об'єкта, були використані мови програмування, апарат теорії графів, мова теорії алгоритмів, логічні числення. Багато років пішло у малоефективних спробах, доки, нарешті, стало зрозуміло, що всі ці засоби настільки погано пристосовані для цілей формального опису людської мови, що створюють важкодосяжні перешкоди при його моделюванні. Оскільки природна мова полягає в основі інтелектуальної діяльності людини, можна не сумніватися, що і моделювання верхніх шарів інтелекту буде настільки ж неефективним, якщо обмежитися існуючими математичними засобами.

Труднощі, з якими довелося зіткнутися при моделюванні природної мови, врешті-решт, були проаналізовані. З них народилися вимоги, що висуваються до формальної мови, здатної ефективно описувати людську мову. У свою чергу, сформульовані вимоги, можна сказати, примусово, привели до алгебри скінченних предикатів. Проведений після цього математичний опис механізмів української мови засобами алгебри скінченних предикатів продемонстрував переваги цієї алгебри, причому настільки великі, що в подальшому жодного разу не виникала необхідність звернутися по допомогу будь-якої іншої формальної мови. Нижче наведено доводи, які переконали авторів в тому, що алгебра скінченних предикатів якраз є тією формальною мовою, якою повинен вестися опис механізмів людської мови (а можливо, і багатьох інших механізмів інтелекту), що ніякі інші формальні засоби не можуть скласти йому конкуренцію і що саме ця мова покликана стати фундаментом, на якому має будуватися теорія інтелекту.

Людська мова, як явище дискретне, звісно, повинна описуватися засобами дискретної математики. Проте вибір засобів зазначеного типу вельми обмежений. Це – мови програмування для ЕОМ, логічні числення, мови теорії алгоритмів, апарат теорії графів. При спробі використання мов програмування або мов теорії алгоритмів доводиться зіткнутися з



подальшими важкодосяжними перешкодами. Ці мови, як відомо, призначені для опису алгоритмів, тобто процедур з однозначним результатом. Проте природна мова багатозначна, що проявляється, наприклад, у вигляді омографічності слів, тобто неоднозначності їх сенсу. Мови програмування і теорії алгоритмів – це такі мови, які можуть описувати тільки однозначні відповідності. Природна ж мова вимагає формальних засобів для опису багатозначних відповідностей, тобто відповідностей довільного виду, інакше кажучи, – відносин.

Для опису людської мови найкраще підійшов би апарат рівнянь, подібний до апарату, що використовується в математичному аналізі, який відрізняється від останнього тим, що він призначений для формалізації не безперервних, а дискретних процесів. Така мова дає логічні числення, а саме: числення висловлювань і числення предикатів. Однак щоб мати можливість ефективно вирішувати зазначені рівняння, необхідно довести числення, що цікавлять нас, до рівня алгебри. Зроблено ж це тільки в численні висловлювань. В результаті ми маємо алгебру булевих функцій і апарат булевих рівнянь. Однак апарат булевих рівнянь для формального опису природної мови нашттовхується на серйозну незручність, що полягає в тому, що в алгебрі булевих функцій використовуються лише виконавчі знаки, в той час як в природній мові фігурують літерні, тобто багатозначні символи.

Цього недоліку, здавалося б, можна було уникнути, звернувшись до апарату багатозначної логіки. Однак при найближчому розгляді виявляється, що багатозначна логіка розвинена тільки в напрямку опису однозначних відповідностей, а не довільних відносин. Вчення про рівняння з багатозначною логікою, наскільки нам відомо, зовсім не розвинене. Розвиток в напрямку багатозначної логіки примусово приводить до алгебри скінченних предикатів. Дійсно, щоб мати можливість записувати найзагальніші рівняння багатозначної логіки, в правій їх частини немає необхідності ставити довільні формули, достатньо писати константи. Необов'язково використовувати всі літерні константи,

достатньо взяти всього два знаки: 0 і 1. Але як тільки ми так вчинимо, негайно прийдемо до поняття скінченного предиката, а отже, і до алгебри скінченних предикатів.

Використання числення предикатів для цілей математичного опису людської мови також наштовхується на певні труднощі: числення дуже слабо розвинене щодо потреб опису скінченних об'єктів. Числення предикатів не має навіть засобів для формульного запису будь-яких індивідуальних скінченних відносин. Разом з тим, людська мова – явище суто скінченне і воно вимагає для своєї формалізації апарат скінченної математики. Намагаючись алгебраїзувати скінченний фрагмент числення предикатів, ми не зможемо прийти ні до чого іншого, окрім алгебри скінченних предикатів. Нарешті, звернувшись до апарату теорії графів, ми виявимо, що, хоча він і використовується для опису скінченних відносин, проте абсолютно не містить в собі виразних засобів для запису цих відносин у вигляді формул і рівнянь деякої алгебри. Якщо ж ми захочемо перевести інформацію, що міститься у графах, на мову таблиць, то побачимо, що за допомогою графів виражаються саме скінченні предикати.

Таким чином, який би шлях ми не вибрали при розробці прийнятних формальних засобів математичного опису людської мови, ми неминуче приходимо до алгебри скінченних предикатів. Разом з тим в цьому розділі встановлено, що алгебра скінченних предикатів повна, тобто її мовою можуть бути описані будь-які скінченні відносини. Тому будь-який інший математичний апарат, призначений для опису довільних скінченних відносин, в логічному сенсі обов'язково буде рівносильний алгебрі скінченних предикатів.

### **Вправи**

1. Наведіть приклади власної частини яких-небудь елементарних кон'юнкції і диз'юнкції.
2. Наведіть приклади простих імплікант і імпліцент.

3. Відшукайте мінімальну ДНФ якогось предиката за методом Квайна – Мак-Класкі.

4. Відшукайте мінімальну ДНФ якогось предиката методом Порецького – Блейка.

5. Відшукайте мінімальну ДНФ якогось предиката методом Нельсона.

6. Відшукайте мінімальну КНФ якогось предиката методом Квайна – Мак-Класкі.

7. Відшукайте мінімальну КНФ якогось предиката методом Порецького – Блейка.

8. Відшукайте мінімальну КНФ якогось предиката методом Нельсона.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке канонічна мінімізація формул алгебри скінченних предикатів?

2. Що таке мінімальні ДНФ і КНФ предиката?

3. Що таке прості імпліканти та імпліценти?

4. Що таке скорочені ДНФ та КНФ предиката?

5. Що таке диз'юнктивне та кон'юнктивне ядро предиката?

6. Що таке тупикові ДНФ та КНФ предиката?

7. Що таке метод Квайна-Мак-Класкі?

8. Як побудувати імплікантну та імпліцентну таблиці?

9. Що таке метод Порецького-Блейка?

10. Що таке метод Нельсона?

11. Яка роль алгебри скінченних предикатів в справі інформатизації?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов-Кушнарєнко Ю.П. О прикладной алгебре предикатных операций // Проблемы бионики – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 1998, вып. 49 – С. 14–22.
2. Пославский С.А., Походенко В.А., Шабанов-Кушнарєнко С.Ю. Условия существования линейного предиката и его содержательная интерпретация // Проблемы бионики – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 1998, вып. 49 – С. 39–45.
3. Дударь З.В., Пославский С.А., Пронюк А.В., Шабанов-Кушнарєнко С.Ю. Обобщение метода компараторной идентификации // АСУ и приборы автоматики – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 1999, вып. 109 – С. 188–193.
4. Шабанов-Кушнарєнко Ю.П., Шляхов В.В., Компараторная идентификация алгебраических систем // АСУ и приборы автоматики – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 2000, вып. 113 – С. 107–123.
5. Дударь З.В., Калиниченко О.В., Шабанов-Кушнарєнко С.Ю. О методе и задачах теории интеллекта. I // Радиоэлектроника и информатика – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 2000, № 2 – С. 112–122.
6. Дударь З.Ю., Калиниченко О.В., Шабанов-Кушнарєнко С.Ю. О методе и задачах теории интеллекта II // Радиоэлектроника и информатика – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 2000, № 3 – С. 133–145.
7. Дударь З.В., Калиниченко О.В., Шабанов-Кушнарєнко С.Ю. О методе и задачах теории интеллекта. III // Радиоэлектроника и информатика – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 2000, № 4 – С. 113–124.
8. Дударь З.В., Пославский С.А., Ситникова А.В., и др. О физико-математическом описании смысла текстов естественного языка // Радиоэлектроника и информатика – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 2002, № 2 – С. 105–115.

9. Шабанов-Кушнарєнко Ю.П. Проблема искусственного интеллекта // Радиоэлектроника и информатика – Харьков: Изд-во ХТУРЭ, 2002, № 3 – С. 100–106.

10. Бондаренко М.Ф., Дударь З.В., Процай Н.Т., и др. Алгебра предикатов и предикатных операций // Радиоэлектроника и информатика – Харьков: Изд-во ХНУРЭ, 2005, № 1 – С. 80–86.

11. Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнарєнко Ю.П. Об алгебре предикатов // Бионика интеллекта – Харьков: Изд-во ХНУРЭ, 2004, № 1 – С. 15–26.

12. Бондаренко М.Ф., Дрюченко О.Я., Коряк С.Ф., Шабанов-Кушнарєнко Ю.П. Ідентифікація людини за параметрами мовних сигналів (проблеми та шляхи їх вирішення). – Харків: «Компанія СМІТ», 2006. – 259 с.

Навчальне видання

**Методичні вказівки для самостійної роботи з курсу  
«Теорія інтелекту»  
для студентів спеціальності  
121 «Інженерія програмного забезпечення»**

Укладачі:

**Чередніченко** Ольга Юріївна  
**Вовк** Марина Анатоліївна  
**Орловський** Дмитро Леонідович  
**Копп** Андрій Михайлович

Відповідальний за випуск проф. Годлевський М.Д.

Роботу до друку рекомендував проф. Горілий О.В.

В авторській редакції

План 2017 р., поз. 5

Підписано до друку 06.10.2017. Формат 60 × 84/16. Папір офсетн. № 2.

Друк – ризографія. Гарнітура New Roman Times. Ум. друк. арк. 4,4.

Наклад 50 прим. Зам. № . Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХП», 61002, , Харків, вул. Фрунзе, 21  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

---

Друкарня НТУ «ХП»  
61002, Харків, вул.. Фрунзе, 21