

103. **3.** *Божко А.Е., Голуб Н.М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наукова думка, 1980. – 188 с. **4.** Случайные колебания: пер. с англ. / Под ред. *С. Кренделла*. – М.: Мир, 1967. – 356 с.

Поступила в редколлегию 25.10.2009

УДК 539.3

В.И.КОНОХОВ, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;

Д.Б.ПИВОВАРОВ, студент, НТУ «ХПИ»;

В.Л.ХАВИН, канд.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТВОЛА ГИДРОПУШКИ ПРИ НАЛИЧИИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

У статті досліджений вплив подовжньо – поперечного навантаження на статичні переміщення стовбура гідрогармати. Для вибору достовірної моделі розглядалися три варіанти розрахункової схеми, відмінних рівнем складності математичної моделі. На основі обчислювальних експериментів запропонований найраціональніший і достатньо точніший варіант розрахункової схеми.

Influencing longitudinally is explored in the article – transversal loading on the static moving of trunk of hydropushky. For the choice of reliable model three variants of calculation chart were examined, different by the level of complication of mathematical model. On the basis of calculable experiments the most rational and exact enough variant of calculation chart is offered.

1. Введение. В процессе эксплуатации гидропушек, используемых для размывания породы на стенах карьеров, под воздействием высокого давления в гидросистеме (более 100 МПа) и большой длине ствола, через который выбрасывается технологическая жидкость, равной 10 – 12 метров, торец ствола совершает колебательные движения. Амплитуда колебаний ствола существенно влияет на эффективность работы гидропушки. Наличие больших прогибов, вызываемых низкой изгибной жесткостью ствола гидропушки, также влияет на безопасность ее эксплуатации. Особенностью данной конструкции является также наличие продольной следящей силы, действующей в концевом сечении, где происходит истечение технологической жидкости, что существенно влияет на изгибные деформации штанги.

Ранее был проведен анализ поведения подобной конструкции только под действием горизонтальной продольной силы [1]. Известны также расчеты для гибких стержней, учитывающие нелинейность для деформированного стержня [1]. Учет же реальных видов нагружения гибкого ствола в большинстве случаев делает предложенные в [1] методы определения изгибных перемещений неточными.

Цель работы – исследование влияния продольно-поперечного нагружения

на статические перемещения концевого сечения ствола гидропушки и выбор достоверной модели для их определения.

2. Постановка задачи. Для разработки рекомендаций по выбору модели, описывающей деформирование ствола гидропушки, рассматривались три последовательных варианта расчетной схемы, отличающиеся исходными гипотезами, и, соответственно, уровнем сложности математической модели.

Расчетная схема гидропушки представляет собой двухопорную балку с консольной частью. Ось гидропушки располагается под углом α к горизонту. Внешнее нагружение представляет собой равномерно распределенное усилие от собственного веса q и гидродинамическую следящую силу P (рис. 1). Значения всех величин приведены в табл. 1, где знак « \rightarrow » означает противоположное направление усилия.

Таблица 1 – Исходные данные

Продольная сила	P , кН	278
Распределенное усилие (вес)	q , кН/м	-0,944
Продольная составляющая распределенного усилия	q_z , кН/м	-0,838
Поперечная составляющая распределенного усилия	q_y , кН/м	-0,484
Длина балки	L , м	10,915
Длина пролета	ℓ , м	1,765
Длина консоли	a , м	9,15
Экваториальный (осевой) момент инерции сечения	I_{X_2} , мм ⁴	$0,246 \cdot 10^{-4}$
Модуль упругости	E , МПа	$2,1 \cdot 10^5$

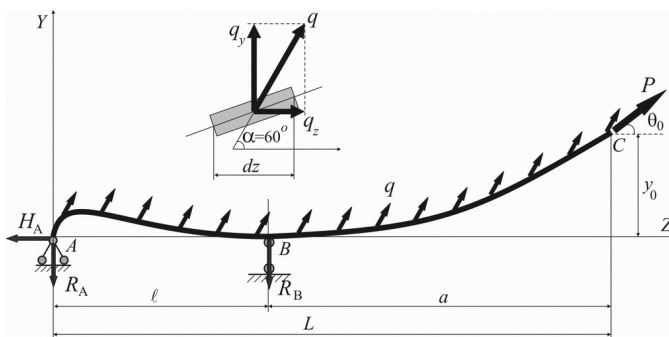


Рисунок 1 – Расчетная схема

Рассматривались следующие модели расчета перемещений гидропушки:

Модель 1. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и перемещениях без учета влияния продольной составляющей равномерного нагружения ($q_y \neq 0$; $P = 0$; $q_z = 0$).

Модель 2. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и больших перемещениях без учета влияния продольной составляющей равномерного нагружения ($q_y \neq 0$; $P \neq 0$; $q_z = 0$).

Модель 3. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях

и больших перемещениях с учетом влияния продольной составляющей равномерного нагружения ($q_y \neq 0$; $P \neq 0$; $q_z \neq 0$).

2.1. Модель 1. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и перемещениях без учета влияния продольной составляющей равномерного нагружения.

Деформированное состояние системы определяется на основе суперпозиции двух решений:

1. Изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой q_z при малых перемещениях и углах поворота.

2. Изгиб балки сосредоточенной следящей силой P , возникающей за счет наличия прогиба y_0 и угла поворота θ_0 сечения, в котором приложена следящая сила. В силу малости величины углов поворота, считаем $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$.

Для получения первого решения (изгиб усилием q_y) интегрировалось приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки постоянной жесткости, рассмотренное в [2], при $P = 0$

$$EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = M_x(z) \quad (1)$$

с граничными условиями для функции прогиба $y(z)$:

$$y(0) = 0; \quad y(\ell) = 0 \quad (2)$$

и уравнениями изгибающего момента $M_x(z)$:

$$M(z) = -R_A z + q_y \frac{z^2}{2} \quad \text{при } 0 \leq z \leq \ell \quad (3)$$

$$M(z) = -R_A z - R_B (z - \ell) + q_y \frac{z^2}{2} \quad \text{при } \ell \leq z \leq L$$

где реакции опор $R_A = q_y \frac{\ell^2 - a^2}{2\ell}$; $R_B = q_y \frac{L^2}{2\ell}$.

Полученные уравнения для прогибов и углов поворота имеют вид:
 $0 \leq z \leq \ell$:

$$EI_x y = 0,04167 q_y z^4 + 0,0833 \frac{q_y L(L-2\ell)}{\ell} z^3 - 0,04167 q_y \ell (2L^2 - 4\ell L + \ell^2) z;$$

$$EI_x \theta = 0,16667 q_y z^3 + 0,25 \frac{q_y L(L-2\ell)}{\ell} z^2 - 0,04167 q_y \ell (2L^2 - 4\ell L + \ell^2),$$

$$\ell \leq z \leq L: \quad (4)$$

$$EI_x y = 0,04167 q_y z^4 - 0,16667 q_y L z^3 + 0,25 q_y L^2 z^2 - 0,04167 q_y \ell (8L^2 - 4\ell L + \ell^2) z + 0,08333 q_y L^2 \ell^2;$$

$$EI_x \theta = 0,16667 q_y z^3 - 0,5 q_y L z^2 + 0,5 q_y L^2 z - 0,04167 q_y \ell (8L^2 - 4\ell L + \ell^2),$$

что позволяет определить угол поворота и прогиб в концевом сечении ($z = L$):

$$y_0 = 0,103 \text{ м.} \quad \theta_0 = 0,0142 \text{ рад.}$$

Второе решение (изгиб следящей силой P) определялось также интегри-

рованием уравнения изогнутой оси (1) с граничными условиями (2) с правой частью (изгибающим моментом $M_x(z)$), возникающим из-за изгибного перемещения точки приложения силы P ;

$$M(z) = -R_A z + H_A y \quad \text{при } 0 \leq z \leq \ell;$$

$$M(z) = -R_A z - R_B(z - \ell) + H_A y \quad \text{при } \ell \leq z \leq L$$

где реакции опор $H_A \cong P$; $R_A = \frac{P}{\ell}(y_0 - \theta_0 a)$; $R_B = \frac{P}{\ell}(\theta_0 L - y_0)$.

Полученные уравнения для прогибов и углов поворота имеют вид

$$0 \leq z \leq \ell:$$

$$y = C_1 e^{(\chi z)} + C_2 e^{(-\chi z)} + \frac{R_A}{P} z;$$

$$\theta = C_1 \chi e^{(\chi z)} - C_2 \chi e^{(-\chi z)} + \frac{R_A}{P},$$

$$\ell \leq z \leq L:$$

$$y = C_3 e^{(\chi z)} + C_4 e^{(-\chi z)} + \frac{(R_A + R_B)}{P} z - \frac{R_B}{P} \ell;$$

$$\theta = C_3 \chi e^{(\chi z)} - C_4 \chi e^{(-\chi z)} + \frac{(R_A + R_B)}{P},$$

(5)

$$\text{где } \chi^2 = \frac{P}{EI_x}.$$

Константы интегрирования ($C_1 \div C_4$) находятся из граничных условий (2)

и условий сопряжения $y|_{(\ell-0)} = y|_{(\ell+0)}$; $\frac{dy}{dx}|_{(\ell-0)} = \frac{dy}{dx}|_{(\ell+0)}$.

После подстановки решения в (2) и в условия сопряжения получаем СЛАУ относительно неизвестных констант, решая которую, например, методом, изложенным в [3], находим:

$$C_1 = -3,249 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad C_2 = 3,249 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$C_3 = -6,406 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad C_4 = 1,008 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Окончательно, решение задачи представляет собой суперпозицию решений (4) и (5) (рис. 2). Представленный на рис. 2 график функции прогиба, мало соответствует действительной форме изогнутой оси стержня. Поэтому полученное решение можно рассматривать в качестве некоторого первого приближения

Для уточнения прогиба от силы P , очевидно, необходимо построить итерационный процесс, в котором в цикле решается уравнение (1). Для этого используется алгоритм метода «простых итераций», приведенный в [3]. Программная реализация алгоритма производилась с помощью средств математического пакета MATLAB, изложенных в [4] и [5]. На каждой итерации вычисляется прогиб и угол поворота концевое сечения. При этом в начале каждого цикла, заново формируется уравнение (1). Правая часть уравнения формируется в каждом цикле с учетом отклонений концевое сечения стержня, полу-

ченного на предыдущей итерации. Полученный в i -ом цикле результат есть, таким образом, исходное приближение для $i+1$ -ой итерации. Условием выхода из цикла является равенство результатов двух последних приближений.

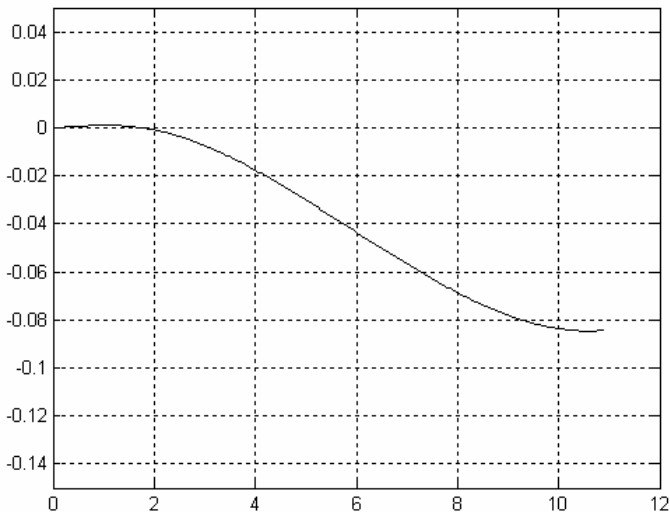


Рисунок 2 – Суперпозиция функций прогибов (первое приближение)

Данный итерационный процесс сходится к тривиальному решению $y = 0$, а суперпозиция решений представляет собой функцию перемещений оси стержня под действием исключительно поперечного распределенного усилия (кривая 1 на рис. 3). Это свидетельствует о некорректности математической модели – метод суперпозиции при данных больших прогибах некорректен.

Объяснить результат, полученный с помощью итерационного процесса, можно обратившись к физическому смыслу задачи. Задача о нахождении прогиба от следящей нагрузки эквивалентна задаче о нахождении положения равновесия растянутого стержня, получившего начальное отклонение.

Корректно определить перемещения в рассматриваемой системе можно лишь с учетом совместного действия продольных и поперечных усилий.

2.2. Модель 2. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и больших перемещениях без учета влияния продольной составляющей равномерного нагружения.

В предлагаемой постановке задача сводится к решению дифференциального уравнения (1) с правыми частями вида:

$$\begin{aligned}
 M_x(z) &= -R_A z + H_A y + q_y \frac{z^2}{2} && \text{при } 0 \leq z \leq \ell; \\
 M_x(z) &= -R_A z - R_B(z - \ell) + H_A y + q_y \frac{z^2}{2} && \text{при } \ell \leq z \leq L,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$\text{где } H_A \cong P, \quad R_A = q_y \frac{\ell^2 - a^2}{2\ell} + \frac{P}{\ell}(y_0 - \theta_0 a), \quad R_B = q_y \frac{L^2}{2\ell} + \frac{P}{\ell}(\theta_0 L - y_0)$$

и условиях

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\ell) = 0, \quad y_2(\ell) = 0, \quad y'_1(\ell) = y'_2(\ell), \quad y_2(L) = y_0, \quad y'_2(L) = \theta_0, \quad (7)$$

где y_1 и y_2 – решения уравнения (1) для интервалов $0 \leq z \leq \ell$ и $\ell \leq z \leq L$ соответственно и имеющие вид

$$\begin{aligned} y_1 &= C_{11} e^{xz} + C_{12} e^{-xz} + \left(y_0 - a\theta_0 + \frac{q_y(\ell^2 - a^2)}{2P} \right) \frac{z}{\ell} - \frac{q_y}{P} \left(\frac{z^2}{2} + \frac{EI_x}{P} \right); \\ y_2 &= C_{21} e^{xz} + C_{22} e^{-xz} + \left(\frac{q_y L}{P} + \theta_0 \right) z - \frac{q_y}{P} \left(\frac{z^2}{2} + \frac{EI_x}{P} + \frac{L^2}{2} \right) + y_0 - \theta_0 L. \end{aligned} \quad (8)$$

Подчиняя решение (8) условиям (7) получаем систему нелинейных уравнений для определения констант $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, y_0, \theta_0$:

$$\left\{ \begin{aligned} C_{11} + C_{12} - q_y \frac{EI_x}{P^2} &= 0; \\ C_{11} e^{x\ell} + C_{12} e^{-x\ell} - \frac{q_y}{P} \left(\frac{EI_x}{P} + \frac{a^2}{2} \right) - (y_0 + a\theta_0) &= 0; \\ C_{21} e^{x\ell} + C_{22} e^{-x\ell} - \frac{q_y}{P} \left(\frac{EI_x}{P} + \frac{a^2}{2} \right) + (y_0 - a\theta_0) &= 0; \\ C_{11} e^{x\ell} - C_{12} e^{-x\ell} - C_{21} e^{x\ell} + C_{22} e^{-x\ell} + \frac{1}{x} \left\{ \frac{q_y}{P} \left(\frac{\ell^2 - a^2}{2\ell} - L \right) - [y_0 - (\ell - a)\theta_0] \frac{1}{\ell} \right\} &= 0; \\ C_{21} e^{xL} + C_{22} e^{-xL} - q_y \frac{EI_x}{P^2} &= 0; \\ C_{21} e^{xL} - C_{22} e^{-xL} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Система нелинейных уравнений (9) относительно неизвестных $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, y_0, \theta_0$ решалась методом минимизации невязок при помощи математического пакета MATLAB. Были получены следующие значения констант:

$$C_{11} = -0,13736 \text{ м}; \quad C_{12} = 0,10499 \text{ м};$$

$$C_{21} = -0,12862 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad C_{22} = -0,20359 \text{ м}.$$

и значения перемещений в концевом сечении $y_0 = -0,1349828 \text{ м}$, $\theta_0 = -0,0182326 \text{ рад}$, которые оказались значительно больше, чем при учете только поперечной нагрузки q_y . Следует также отметить, что угловые перемещения сечений $\theta(z)$ малы, так например, $|\theta_0| = 1,82 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$, что подтверждает корректность применения приближенного линейаризованного уравнения изогнутой оси (1) для решения поставленной задачи.

2.3. Модель 3. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и больших перемещениях с учетом влияния продольной составляющей

равномерного нагружения.

Решение данной задачи для рассматриваемой системы сводится к интегрированию уравнения (1) с условиями (7), а изгибающий момент $M_x(z)$ (правая часть) задается в виде:

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq \ell \quad M_x(z) &= -R_A z + H_A y + q_y \frac{z^2}{2} + M_0(z); \\ \ell \leq z \leq L \quad M_x(z) &= -R_A z - R_B(z - \ell) + H_A y + q_y \frac{z^2}{2} + M_0(z), \end{aligned} \quad (10)$$

где $M_0 = q_z \left(zy(z) - \int_0^z y(\xi) d\xi \right)$, а выражения для реакций примут вид:

$$\begin{aligned} H_A &= P + q_z L, \quad R_A = q_y \frac{\ell^2 - a^2}{2\ell} + \frac{P}{\ell} (y_0 - \theta_0 a) + \frac{q_z}{\ell} \int_0^L y(z) dz, \\ R_B &= q_y \frac{L^2}{2\ell} - \frac{P}{\ell} (y_0 - \theta_0 L) - \frac{q_z}{\ell} \int_0^L y(z) dz. \end{aligned}$$

Уравнения (1) с правой частью (10) не имеет решения в элементарных функциях, поэтому уравнение для численного интегрирования было приведено к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dz} = \theta; \\ \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x(z)}{EI_x}; \\ \frac{dM_0}{dz} = -q_z \theta z. \end{cases} \quad (11)$$

Система дифференциальных уравнений (11) решалась методом Рунге-Кутты, реализованном в программном пакете MATLAB, при начальном условии $y(0) = 0$ на участке $0 \leq z \leq \ell$. Начальное условие для функции θ определялось при помощи итерационного процесса методом «стрельбы» из условия $y(\ell) = 0$, начальное значение M_0 принято равным нулю. На участке $\ell \leq z \leq L$ интегрирование велось при начальных условиях $y(\ell) = 0$, $\theta = \theta(\ell)$ и $M_0 = M_0(\ell)$, которые определялись из решения на первом участке ($0 \leq z \leq \ell$).

Скорость решения весьма сильно зависит от значений y_0 , θ_0 , которые в свою очередь, являются решением задачи в конечном сечении ($z = L$). Вследствие этого был построен итерационный процесс, заключающийся в том, что изначально, в первом приближении, y_0 и θ_0 задаются из вышеприведенного решения (п. 2.2), а затем на каждом последующем i -ом интегрировании системы (11) в итерационном режиме подставляются решения $y_0^{(i-1)}$ и $\theta_0^{(i-1)}$, найденные на предыдущем шаге. Так как выяснилось, что простые итерации не дают сходимости, было введено дополнительное условие. Как оказалось, изгибающий момент в конечном сечении на каждой итерации не обращался в нуль,

а его модуль пропорционален отклонению $y_0^{(i)}$ и $\theta_0^{(i)}$ от действительных, искомых значений. Вследствие этого накладывалось дополнительное условие вида:

$$M_x(L) = -R_A L - R_B(L - \ell) + H_A y_0 + q_y \frac{L^2}{2} + q_z y_0 L - q_z \int_0^L y(\xi) d\xi = 0,$$

которое позволило добиться быстрой сходимости процесса.

Решение для y_0 и θ_0 , полученное с точностью до 5 значащих цифр, имело вид:

$$y_0 = -0,13815 \text{ м};$$

$$\theta_0 = -1,8651 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

3. Результаты расчетов. Для сравнения, в табл. 2 приведены полученные для трех моделей величины прогибов и углов поворота в конечном сечении штанги. В пункте 2.1 приводятся значения прогибов и углов поворота при действии только поперечной распределенной нагрузки – решение, к которому сходится итерационный процесс.

Таблица 2 – Результаты расчетов

	модель 2.1	модель 2.2	модель 2.3
Прогиб y_0 , м	-0,103	-0,1350	-0,1382
Угол поворота θ_0 , рад	-0,0142	-0,01823	-0,01865

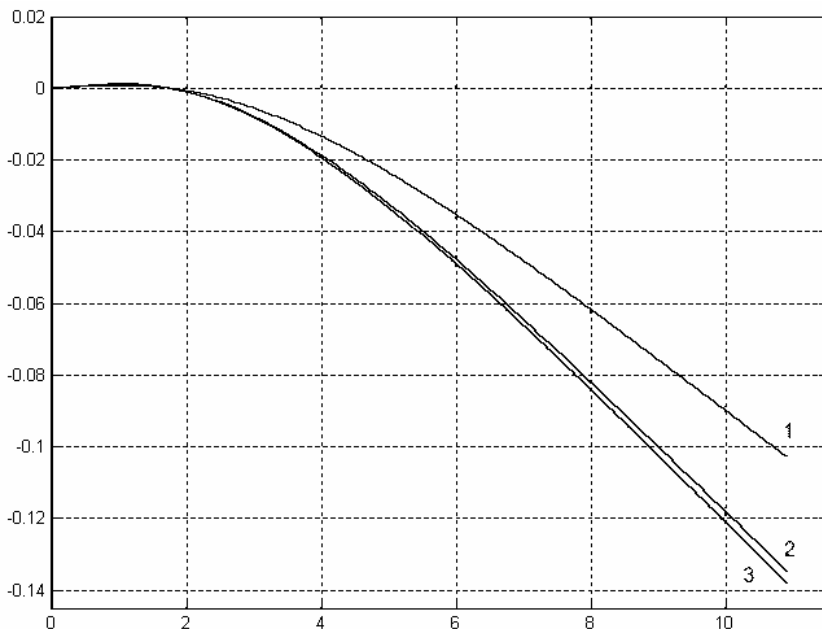


Рисунок 3 – Функция прогиба

На рис. 3 показаны зависимости, полученные для функции прогибов $y(z)$ для трех рассмотренных моделей:

- 1 – прогиб под действием распределенной поперечной нагрузки ($q_y \neq 0$; $P = 0$; $q_z = 0$) (модель 1).
- 2 – прогиб при совместном действии распределенной поперечной нагрузки и сосредоточенного продольного усилия ($q_y \neq 0$; $P \neq 0$; $q_z = 0$) (модель 2).
- 3 – прогиб при совместном действии распределенной поперечной, продольной нагрузки и продольного сосредоточенного усилия ($q_y \neq 0$; $P \neq 0$; $q_z \neq 0$) (модель 3).

4. Выводы. Использование метода суперпозиции перемещений в данной задаче некорректно, так как, в виду больших прогибов, математическая модель не отражает реального воздействия продольных усилий при продольно-поперечном изгибе. Наиболее точным является решение с учетом всех компонент внешнего нагружения, но оно связано с рядом чисто технических проблем, возникающих в связи с особенностями граничных условий и использованием методов численной математики. Это решение нерационально и громоздко, и в итоге учет продольного распределенного усилия дает незначительную поправку, которая практического интереса не представляет. Дальнейшие вычисления с учетом нелинейности деформирования стержня и привлечением точного дифференциального уравнения изогнутой оси балки можно не проводить, так как углы поворота во всех случаях оказались малыми величинами (не более $|\theta_0| = 1,87 \cdot 10^{-2}$ то есть $(\theta)^3 \ll 1$) и принятые упрощения оправданы. Наиболее рациональным и достаточно точным является решение без учета продольного распределенного усилия. В этом случае возможно получения аналитического выражения для функций прогиба и углов поворота сечения, минимальное привлечение численных методов, удовлетворение любых граничных условий без внесения заметных поправок в алгоритм расчета.

Список литературы: 1. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 1 напряженно-деформированное состояние стержней / Шевченко Ф.Л. – ДонНТУ, 2006. – 293 с. 2. Любошиц М.И. Справочник по сопротивлению материалов / Любошиц М.И. Ицкович Г.М. – Минск, Высшая школа, 1969. – 462 с. 3. Калиткин Н.Н. Численные методы / Калиткин Н.Н. – М.: Наука, 1978. – 512 с. 4. Иглин С.П. Математические расчеты на базе MATLAB / Иглин С.П. – БХВ Санкт-Петербург, 2005. – 640 с. 5. Дьяконов В.П. MATLAB 6: Учебный Курс / Дьяконов В.П. – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.

Поступила в редколлегию 18.10.2009