

ИНТЕРАКТИВНЫЙ МОДУЛЬ РАСЧЕТОВ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ ПРИБОРОВ ДЛЯ ССКА КИДИМ

*Андреев Юрий Михайлович,
профессор,*

*Ларин Андрей Алексеевич,
доцент*

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков, Украина

Введение. Специальная система компьютерной алгебры КиДиМ (ССКА КиДиМ), созданная в НТУ «ХПИ», служит для автоматизации проведения комплексных и простых расчетов в области механики (кинематики, динамики, статики кинестатики) машин и механизмов. Структура программного комплекса представляется следующей схемой

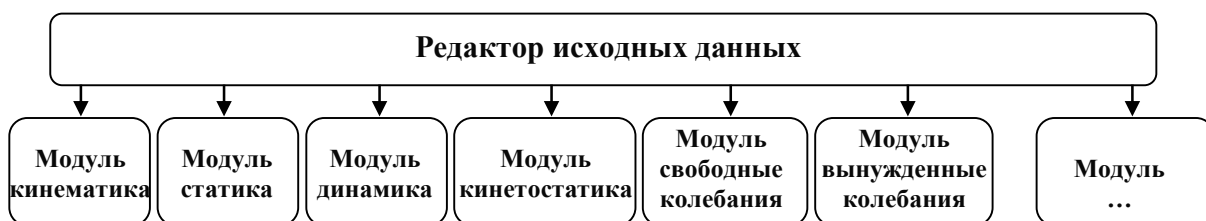


Рис. 1. Структура ССКА КиДиМ

Центральное место занимает редактор входных данных, позволяющий создавать и изменять файлы для проведения расчетов, содержащих числовую, формульную, графическую информацию о механической модели поставленной задачи или процесса.

Программные модули, входящие в комплекс, представляют собой законченные программы, решающие ту или иную компактную задачу механики, которые могут функционировать самостоятельно. При вызове они должны получить имя файла с исходными данными, который передается им редактором данных. В результате работы они должны сформировать выходные данные в виде формул, графиков, таблиц, анимаций или в форме, необходимой для передачи внешним программам, и вернуть управление редактору данных.

Имеется возможность проводить комплекс расчетов механической модели по одному файлу исходных данных, оставляя твердую копию последовательности проведенных расчетов и модификаций данных. Поэтому вид расчета задается в самом файле исходных данных. После этого может быть задана информация, модифицирующая или дополняющая задачу, а затем снова указан вид нового расчета и т.д. Таким образом, каждая программа (расчетный модуль) начинает свою работу с чтения информации в виде формул и инструкций языка исходных данных КиДиМ из переданного ей файла, проводит диагностику, выводит сообщения при обнаружении ошибок, отображает результаты расчета, формирует отчеты и возвращает управление редактору.

Среди задач механики по расчетам колебательных процессов в различных системах, особое место занимает задача виброизоляции источников колебаний от применяемых чувствительных датчиков, приборов, аппаратуры, человека. Для облегчения проведения комплексных расчетов для решения таких задач, предлагается объединить их в единый расчетный модуль, который по заданному аналитическому описанию способен провести необходимые расчеты, представить в удобном виде результаты, организовать интерактивное взаимодействие с пользователем.

Актуальность задачи. Состоит в автоматизации решения комплексной задачи виброизоляции путем объединения компонентных подзадач в единый программный модуль в рамках ССКА КиДиМ, что приведет к существенному повышению качества решения задачи и повышению производительности пользователя.

Постановка задачи. Проектируемый программный модуль должен обеспечить решение следующих подзадач задачи виброизоляции:

1. расчет собственных частот с коэффициентами влияния на них инерционных и упругих характеристик модели,
2. проведение цикла расчетов по полученной информации об указанных коэффициентах влияния с целью оптимизации спектра собственных частот подвески защищаемого объекта,
3. определение главных центральных осей инерции колеблющегося объекта путем диагонализации тензора инерции решением задачи на его собственные значения,
4. обеспечение максимального совпадения главных осей упругости подвески с главными осями инерции защищаемого объекта, что в идеале развязывает поступательные и вращательные движения объекта,
5. расчет динамических характеристик спроектированной системы подвески.

Механические и математические модели вынужденных и свободных колебаний систем твердых тел. Моделирование пространственных малых колебаний твердых тел в ССКА КиДиМ как голономных систем основано на понятиях *структур (геометрических и дифференциальных), структурных матриц, дискретных элементов* модели [1]. *Геометрические структуры* (или просто *структуры*) – это выражения геометрических параметров (координат) точек и тел через обобщенные координаты. *Дифференциальные структуры* – это выражения скоростей точек и тел через обобщенные скорости и обобщенные координаты. *Структурные матрицы* – это аналитические матрицы, получающиеся дифференцированием геометрических структур (дифференциальных структур) по обобщенным координатам (обобщенным скоростям). *Дискретные элементы* (силовые, инерционные, диссипативные и упругие) модели служат для задания проекций сил и пар – активных и сил инерции и представляют собой совокупность двух аналитических выражений – *характеристики* (значения) и *координаты*, выражающейся с помощью структуры через обобщенные координаты (скорости). *Характеристика* элемента это формула его физического значения – проекции силы или пары для



силового элемента и значения инерционного параметра – массы или момента инерции для инерционного элемента. *Координата* элемента отражает геометрические (или кинематические) свойства системы в смысле определения виртуальных перемещений ее точек и тел. Это может быть любая величина, характеризующая соответствующее перемещение – линейное или угловое тела для инерционных и силовых элементов. В качестве координаты элемента допустимо использовать проекции линейных или угловых скоростей точек и тел модели – в этом случае подразумеваются дифференциальные структуры. Для задания активных линейных упругих и диссипативных сил используются упругие и диссипативные элементы - совокупность коэффициента упругости или диссипации в качестве характеристик) и параметра деформации упругого тела (перемещения тела в вязкой среде) в качестве координаты.

Для автоматизации записи инерционных элементов тел, совершающих пространственные движения, в КиДиМ принято пользоваться выражениями, называемыми «твердое тело», задающими тензор инерции тела в связанной с ним центральной системе координат и преобразование исходной системы координат в эту связанную. Для решаемых здесь задач это выглядит следующим образом

$$Name \mid R_{\xi}(\mathbf{a}), \dots, S_{\xi}(d), \dots \mid m, J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{xz};, \quad (1)$$

где *Name* – название тела, *m, J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}* - масса и компоненты тензора инерции тела, *R_ξ(a), ..., S_ξ(d), ...* - последовательность поворотов (*R*) и смещений (*S*) базовой системы координат для совмещения со связанной с телом, при этом индекс показывает вдоль или вокруг какой оси координат осуществляется эти повороты и смещения.

Аналитическая информация о твердых телах и силах механической системы, представленная в файле исходных данных, позволяет ССКА КиДиМ автоматически получить дифференциальные уравнения движения широкого класса механических систем. Это делается аналитическим приведением указанных сил к обобщенным координатам. Так силы инерции каждого *i*-го тела приводятся к главному вектору и главному моменту в центре масс и с помощью

соответствующих структурных матриц $\mathbf{W}_{\bar{R}_i}^u = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}} \right]$, $\mathbf{W}_{\bar{M}_i}^u = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]$ - к обобщенным координатам

$$-\mathbf{Q}_i^u = \mathbf{W}_{\bar{R}_i}^{uT} m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{\bar{M}_i}^{uT} \left(\mathbf{J}_{C_i} \ddot{\vec{\epsilon}}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \vec{\omega}_i^{(i)} \right), \quad (2)$$

где \mathbf{J}_{C_i} - центральный тензор инерции *i*-го тела.

Путем сложения обобщенных сил инерции всех тел и приравнивания результата обобщенным силам активных сил системы, формируется общее уравнение динамики системы, отвечающее вариационному принципу д'Аламбера-Лагранжа. После выделения членов, соответствующих линейным силам вязкого

трения и линейным силам упругости, задаваемым диссипативными (с координатами β) и упругими (с координатами γ) элементами, искомые уравнения в матричном виде для n тел приобретают вид [2]:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{\vec{r}_i}^{uT} m_i \ddot{\vec{r}}_{C_i} + \mathbf{W}_{\vec{M}_i}^{uT} \left(\mathbf{J}_{C_i} \ddot{\vec{\varepsilon}}_i^{(i)} + \vec{\omega}_i^{(i)} \times \mathbf{J}_{C_i} \vec{\omega}_i^{(i)} \right) \right\} + \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \dot{\beta} + \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \gamma = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}. \quad (3)$$

Входящие в выражение (3) транспонированные матрицы, представляют собой *структурные матрицы*, а выражения в квадратных скобках - диагональные матрицы.

Координатами инерционных элементов, формируемых препроцессором КиДиМ при обработке записей вида (1), что видно из выражений (2), будут абсолютные координаты центров масс тел \vec{r}_{C_i} и проекции угловой скорости тела на оси связанной с телом центральной системы координат $\vec{\omega}_i^{(i)}$. Чаще всего оси этой последней системы координат не являются главными. Поэтому тензоры инерции \mathbf{J}_{C_i} в уравнениях (3) не является диагональным, что диагностируется ССКА КиДиМ по наличию центробежных моментов инерции в записях (1). Для того, чтобы тензоры тел были диагональными требуется добавить к указанным в записях (1) поворотам и смещениям систем координат еще один поворот, матрица которого определится при решении полной проблемы собственных значений и векторов для каждого такого тензора \mathbf{J}_{C_i} , например, методом вращений Якоби [3]. При применении такого метода следует ожидать, что полученная связанная главная центральная система координат будет наиболее близка к исходной системе с неглавными осями¹. Такое преобразование тензора можно представить следующим образом

$$[\vec{\mathbf{J}}_{C_i}] = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix} \mathbf{V}, \quad (4)$$

где $[\vec{\mathbf{J}}_{C_i}] = [\{J'_x, J'_y, J'_z\}]$ - диагональный центральный тензор инерции тела, \mathbf{V} - матрица указанного поворота.

Тогда проекции угловых скоростей и угловых ускорений, входящие в выражения (2) и уравнения (3), формулы для которых через обобщенные координаты и обобщенные скорости автоматически формируются препроцессором ССКА КиДиМ при обработке записей вида (1), надо преобразовать к новой главной центральной системе координат по формулам

$$\vec{\omega}_{иц}^{(i)} = \mathbf{V}^T \vec{\omega}_i^{(i)}, \quad \ddot{\vec{\varepsilon}}_{иц}^{(i)} = \mathbf{V}^T \ddot{\vec{\varepsilon}}_i^{(i)}$$

¹ Речь идет о том, что главные оси инерции не имеют направлений в отличие от осей системы координат, поэтому их можно, во-первых, направить в противоположную сторону, а, во-вторых, переобозначить, ось абсцисс- осью ординат или осью аппликат, и, наоборот.



где $\vec{\omega}_{\text{иц}}^{(i)}$, $\vec{\varepsilon}_{\text{иц}}^{(i)}$ - векторы угловой скорости и углового ускорения тела в главной центральной системе координат, а $\vec{\omega}_i^{(i)}$, $\vec{\varepsilon}_i^{(i)}$ - векторы угловой скорости и углового ускорения в изначально заданной центральной, но не главной, системе координат.

При рассмотрении задач на малые колебания механических систем их уравнения движения (3) нуждаются в предварительной линеаризации. Линеаризации подлежат зависимости вида (2) для обобщенных сил инерции, что достигается пренебрежением слагаемыми с произведениями угловых скоростей вследствие малости колебаний. В этом случае дифференциальные структуры, используемые ССКА КиДиМ для формирования уравнений (3) берутся линейными

$$\vec{v}_C = \left. \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=0} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}_{R_i}^u \dot{\mathbf{q}}, \quad \vec{a}_C = \mathbf{W}_{R_i}^u \ddot{\mathbf{q}}$$

$$\vec{\omega}_i^{(i)} = \vec{\omega}_i^{(i)}(\dot{\mathbf{q}}, 0, t), \quad \vec{\varepsilon}_i^{(i)} = \mathbf{W}_{M_i}^u \ddot{\mathbf{q}},$$

поэтому инерционные составляющие в выражениях (2) и уравнениях (3) станут линейной формой относительно обобщенных ускорений с постоянными коэффициентами, диссипативные силы примут линейную форму относительно обобщенных скоростей, а упругие – линейную форму относительно обобщенных координат. Обозначим матрицы этих форм, соответственно, $\mathbf{M} = \mathbf{W}_J^T [\mathbf{J}] \mathbf{W}_J$ – инерции, $\mathbf{V} = \mathbf{W}_D^T [\mathbf{D}] \mathbf{W}_D$ – диссипации, $\mathbf{K} = \mathbf{W}_C^T [\mathbf{C}] \mathbf{W}_C$ – упругости, через $\mathbf{F}(t) = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}$ – вектор правой части, что позволит записать уравнения вынужденных малых колебаний в матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}(t). \quad (5)$$

В случае, если $\mathbf{F}(t)$ – произвольная периодическая функция времени с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ее можно разложить в ряд Фурье. Ограничиваясь в этом разложении k гармониками, запишем

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_j(t) = \sum_{j=1}^k \mathbf{F}_{c_j} \cos(j\omega t) + \mathbf{F}_{s_j} \sin(j\omega t), \quad (6)$$

Для линейной системы справедлив принцип суперпозиции, поэтому можно искать решение системы (5) при моногармоническом возбуждении

$$\mathbf{F}_j(t) = \mathbf{F}_{c_j} \cos(j\omega t) + \mathbf{F}_{s_j} \sin(j\omega t). \quad (7)$$

в виде

$$\mathbf{q}_j(t) = \mathbf{q}_{c_j} \cos(j\omega t) + \mathbf{q}_{s_j} \sin(j\omega t) \quad (8)$$

Полное решение системы (5) при возбуждении (6) представим так:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^k \mathbf{q}_{c_j} \cos(j\omega t) + \mathbf{q}_{s_j} \sin(j\omega t). \quad (9)$$

Моногармоническое решение (8) будет определено, если амплитуды каждой из гармонических составляющих – \mathbf{q}_{cj} , \mathbf{q}_{sj} , определить из (5). Подставим представления (7) и (6) в комплексной форме в уравнение (5), тогда для отыскания \mathbf{q}_{cj} , \mathbf{q}_{sj} получим комплексную систему линейных уравнений:

$$\{[\mathbf{K} - (j\omega)^2 \mathbf{M}] - i(j\omega)\mathbf{B}\}(\mathbf{q}_{cj} + i\mathbf{q}_{sj}) = (\mathbf{F}_{cj} + i\mathbf{F}_{sj}) \quad (10)$$

Рассмотрим матрицу $\mathbf{A} = \{[\mathbf{K} - (j\omega)^2 \mathbf{M}] - i(j\omega)\mathbf{B}\}$, входящую в (10). Так как матрицы \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} – симметрические, то и матрица \mathbf{A} будет симметрической. Наиболее эффективным алгоритмом решения систем линейных алгебраических уравнений с симметрической матрицей является метод Холецкого, использующий треугольное разложение матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ [3]. Причем \mathbf{L} – левая нижняя треугольная матрица разложения \mathbf{A} . Для большей эффективности вычислительного алгоритма матрицы \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} , \mathbf{A} , \mathbf{L} представляются диагональю и нижним треугольником. При решении уравнений (10) матрицы \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} определяются один раз. Матрица \mathbf{L} , необходимая для вычисления матрицы \mathbf{A} , определяется для каждой частоты ω и номера гармоники j . Затем по составляющим возбуждения – \mathbf{F}_{cj} , \mathbf{F}_{sj} из (10) методом Холецкого определяются амплитуды составляющих моногармонического решения \mathbf{q}_{cj} , \mathbf{q}_{sj} , а по ним, и само полигармоническое решение (9).

При отсутствии диссипативных и силовых слагаемых из (5) получим уравнения малых свободных колебаний

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0. \quad (11)$$

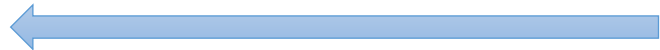
После подстановки в (11) решения $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \cos \omega t$, задача сводится к обобщенной проблеме [3] собственных значений и векторов:

$$\mathbf{K}\mathbf{q}_0 = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{q}_0, \quad (12)$$

Схема решения задачи (12) в ССКА КиДиМ состоит в треугольном разложении методом Холецкого матрицы \mathbf{M} (если она недиагональная), трехдиагонализации преобразованной матрицы \mathbf{K} и последующим решением полной проблемы QL-алгоритмом [3]. При небольшом числе степеней свободы (до 20) используется метод вращений Якоби [3] для последовательной диагонализации матриц \mathbf{M} и \mathbf{K} . В алгоритмы решения таких задач встроена реализация метода чувствительности, для которого строится функция чувствительности и по методике [4] определяются коэффициенты влияния инерционных (k_j^i) и упругих (k_c^i) параметров на собственные частоты системы:

$$k_j^i = \frac{\partial \omega_i / \omega_i}{\partial J_j / J_j} = -\frac{1}{2} \frac{T_j^i}{T^i}, \quad k_c^i = \frac{\partial \omega_i / \omega_i}{\partial C_k / C_k} = \frac{1}{2} \frac{\Pi_k^i}{\Pi^i}, \quad (13)$$

где ω_i – i -я собственная частота системы, J_j , C_k – j -я масса (момент инерции) и k -я жесткость системы, T_j^i , Π_k^i – амплитуды их кинетической и потенциальной энергии при колебаниях на i -ой форме, соответственно, $T^i = \sum_{j=1}^m T_j^i$,



$\Pi^i = \sum_{k=1}^c \Pi_k^i$ - амплитудные значения полной механической энергии колебаний

на этой форме.

Выводы. Согласно выводам статьи [5] при решении задачи виброизоляции приборов, установленных на транспортных средствах, от вибраций их корпусов желательно добиться следующих результатов:

1. Верхняя собственная частота системы «прибор на упругой подвеске» должна быть как можно ниже.

2. В идеале надо добиться, чтобы все 6 частот совпали, для этого упругость амортизаторов должна быть одинаковой вдоль и перпендикулярно их осей, это обеспечит кратность частот поступательных движений при колебаниях прибора, для того, чтобы «вращательные» частоты совпали между собой и с «поступательными» частотами, необходима специальная схема расположения амортизаторов, определяемая массой прибора и жесткостью амортизаторов.

3. Так как угловые перемещения приборов часто более критичны к появлению их ошибок, а вибрации основания, на котором устанавливается прибор, носит, как правило поступательный характер, то необходимо обеспечить развязку поступательных и вращательных движений прибора на упругом основании. Этого можно добиться, если обеспечить «статическую» и «динамическую» балансировку упругой подвески прибора. «Статическая» балансировка обеспечивается совпадением центра масс прибора с центром упругости (линия действия равнодействующей сил упругости амортизаторов при любом поступательном перемещении прибора должна проходить через его центр масс). «Динамическая» балансировка будет обеспечена, если оси симметрии схемы расположения амортизаторов будут главными осями инерции.

Решения задач, сформулированных в постановке задачи и в выводах, очевидно, может быть проведено по алгоритмам, приведенным в статье (формулы (1)-(12)).

Список литературы:

1. Андреев Ю. М. О динамике голономных систем твердых тел / Ю.М. Андреев, О. К. Морачковский // Прикл. механика. – Киев. - 2005. - Т. 41, №7. - С. 130-138.
2. Андреев Ю. М. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Надежность и долговечность машин и сооружений: междунар. науч.-техн. сбор. НАН Украины. – К.: ИПП им. Писаренко Г. С., Ассоциация «Надежность машин и сооружений», 2006. – Вып. 26. – С. 11–18.
3. Уилкинсон Дж. Х. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ: Линейная алгебра / Дж. Х. Уилкинсон, К. Райнш; пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1976. – 390 с.
4. Андреев Ю. М. Синтез нелинейных вибрационных систем по скелетным кривым с использованием теории чувствительности / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – Х.: «Вища школа». Изд-во при Харьк. ун-те, 1984. – Вып. 40. – С. 50–56.
5. Андреев Ю. М. Расчеты систем виброизоляции в специальной системе компьютерной алгебры / Ю. М. Андреев, А. А. Ларин, О. И. Литвинов // Вісник СевНТУ. Збірник наукових праць. Серія: Механіка, енергетика, екологія / Севастоп. нац. техн. ун-т. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2011. - С. 50-54.