

*П.М. АНДРЕНКО, В.В. КЛІТНОЙ, В.М. МАКУХІН*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЧАСТОТИ ОБЕРТАННЯ ВАЛА НА ВИТРАТУ РІДИНИ В КІЛЬЦЕВІЙ ЩІЛИНІ**

Отримана математична залежність для визначення витрати рідини в кільцевій щілині яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, який обертається. Проведені аналітичні дослідження впливу частоти обертання вала, перепаду тиску на щілині, геометричних розмірів на витрату рідини в ній.

При математичному описі гідродинамічних процесів у гідравлічних елементах та пристроях виникає необхідність визначення витрати рідини у кільцевій щілині яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, який обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Вирішення цієї задачі лежить в площині розв'язання рівнянь, що описують рух в'язкої нестисливої рідини між близько розташованими поверхнями, одна з яких рухається.

Такі задачі розглядалися багатьма авторами [1, 2], при цьому обґрунтовано приймали, що рух робочої рідини (РР) через малі щілини, гідравлічних апаратів та пристроїв, ламінарний [3], а її об'ємні властивості стали. Приймали, що РР однорідна та ізотропна [4]. Так як, зазвичай, в гідравлічних апаратах висота щілини значно менша від її довжини (рис. 1 а), початковою ділянкою, на якій відбувається формування профілів швидкостей, нехтували. Вважали, що товщина стінок трубу, яка визначена з умови міцності, достатньо велика, це дозволяє вважати, що її діаметр не залежить від внутрішнього тиску, а пружні властивості враховувати приведеним об'ємним модулем пружності РР. Приймали, що кавітація відсутня, немає розриву РР. Вважали також, що в гідроагрегаті відсутній гідравлічний удар і швидкість звуку в РР –  $a$ , з урахуванням пружних властивостей трубопроводу, є величиною сталою та значно більша від швидкості руху РР. Вважали РР ньютонівською, а її течію – ізотермічною.

Рівняння руху РР у кільцевій щілині, яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, описується рівнянням Нав'є-Стокса для нестационарної течії в'язкої рідини в круглій трубі, в циліндричній системі координат, яка в проекції на вісь  $z$  [2]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \\ & = P_z - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_t \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де  $u_z$ ,  $u_r$  і  $u_\theta$  – швидкості РР по координатним осям;  $x$ ,  $y$  і  $z$  – осі координат;  $t$  – час;  $\nu_t$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості РР;  $r$  – радіус;  $\rho$  – густина РР;  $\theta$  – координатний кут;  $P_z$  – масова сила, яка припадає на одиницю маси рідини і має розмірність прискорення.

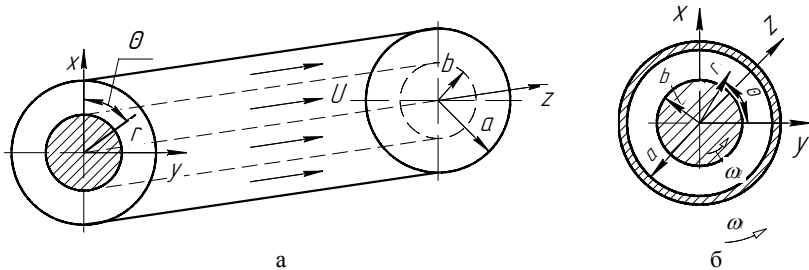


Рис. 1. Схема течії РР: а - між двома циліндричними трубами; б - між двома циліндрами, що обертаються

Рівняння нерозривності [2]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u_r) + \frac{\partial}{\partial u} (\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r u_z) \right] = 0. \quad (2)$$

Вважали, що течія РР вісесиметрична і одномірна, так як  $u_z \gg u_r$ , знехтуємо рухом у радіальному  $u_r \approx 0$  та круговому  $u_\theta = 0$  напрямку, в порівнянні з рухом уздовж осі трубопроводу.

Розглядали течію РР у кільцевій щілині, яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, який обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , для гідравлічного захисту занурювальних електродвигунів.

Проведемо оцінку масової сили у рівнянні (1) у порівнянні з членом  $\frac{\partial u_z}{\partial t}$ , який виражає локальне прискорення. Для чого скористаємося

методикою, наведеною у роботі [5]. Масова сила, яка припадає на одиницю маси рідини, визначалась силою ваги РР (прискоренням вільного падіння).

Порядок ( $\Pi$ ) масової сили, яка припадає на одиницю маси рідини, становить прискорення вільного падіння, порядок члена  $\frac{\partial u_z}{\partial t} - \Pi(\partial u_z / \partial t) = u_z a / l$ ,

де через  $l$  позначена характерна довжину уздовж осі трубопроводу (довжина пробігу хвиль збурення).

$$\Pi[(g): \partial u_z / \partial t] = (g) l / u_z a, \quad (3)$$

Розрахунки за формулою (3) показали, що  $\Pi[(g): \partial u_z / \partial t]$  становить 0,108. Таким чином масовою силою в рівнянні (1) можна знехтувати.

Похибка при нехтуванні масовою силою не перевершить 0,1%. Аналогічне припущення приймає і більшість дослідників, [2, 5 - 8].

За методикою наведеною у роботі [5], проведемо оцінку члена рівняння

(1)  $u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$ , який виражає конвективне прискорення, у порівнянні з

локальним  $-\frac{\partial u_z}{\partial t}$ . Проведемо оцінку порядку цих членів

$$\Pi(u_z \partial u_z / \partial z : \partial u_z / \partial t) = u_z^2 / l : u_z a / l = u_z / a .$$

Ураховуючи, що у кільцевій щілині, яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, завжди виконується умова  $u_z \ll a$ , тоді  $\Pi(u_z \partial u_z / \partial z : \partial u_z / \partial t) = 0,09749$ , отже, членом рівняння Нав'є-Стокса, що виражає конвективне прискорення, можна знехтувати. При цьому похибка в розрахунках, від нехтування членом рівняння Нав'є-Стокса, яке виражає конвективне прискорення, при розгляді процесів, що відбуваються у кільцевій щілині яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, становитиме 0,79.

Оцінку членів, які враховують у рівнянні (1) дію в'язкості РР, проведемо за методикою наведеною у роботі [3]. Оцінимо порядок членів  $\Pi(\partial^2 u_z / \partial z^2) = u / l^2$ , та  $\Pi(\partial^2 u_z / \partial r^2) = u_z / r^2$ . Підставляючи чисельні дані отримали:

$$\Pi(\partial^2 u_z / \partial z^2) = 2670; \quad \Pi(\partial^2 u_z / \partial r^2) = 33127,7.$$

Таким чином членом  $\partial^2 u_z / \partial z^2$  у рівнянні (1) можна знехтувати. Похибка в розрахунках при цьому становитиме для процесів, що відбуваються в кільцевій щілині яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал – 2,8 %. Приймали густину РР сталю, рівною середньому її значенню при роботі гідроагрегата. Враховуючи вищенаведене, рівняння Нав'є-Стокса та нерозривності запишуться у вигляді, аналогічному, як у роботі [2]

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\Delta p}{\mu l}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

де  $\Delta p$  – перепад тиску на щілині;  $\mu$  – коефіцієнт динамічної в'язкості РР.

Ламінарний рух РР між співвісними циліндрами, що обертаються, при припущенні що лінії течії мають вигляд кола ( $u_r = 0$ ), а течія відбувається в площині ( $u_x = 0$ ) та є усталеною ( $\partial u / \partial t = 0$ ), див. рис. 1 б, визначається з рівнянь Нав'є-Стокса та нерозривності [2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v_t \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\omega}{\partial \theta} &= \frac{u_\omega^2}{r}; \\ \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v_t \left( \frac{\partial^2 u_\omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\omega}{\partial x^2} - \frac{u_\omega}{r^2} \right) &= \frac{u_\omega}{r} \frac{\partial u_\omega}{\partial \theta}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \quad \frac{\partial u_\omega}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де  $u_\omega$  – швидкість РР, яка викликана обертанням вала.

З системи рівнянь (5), визначалось дотичне напруження

$$\tau = -\mu \frac{2a^2 b^2}{r^2} \frac{\omega}{a^2 - b^2}, \quad (6)$$

де  $a$  і  $b$  – відповідно радіус труби і вала.

Прирівнюючи дотичне напруження (6), дотичному напруженню, визначеному згідно відомої формули Ньютона, отримали залежність для визначення розподілу швидкості РР викликаною обертанням вала

$$u_\omega = \frac{2a^2 b^2 \omega}{a^2 - b^2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right). \quad (7)$$

З залежності (7) отримали середню швидкість РР, яка викликана обертанням вала

$$u_{\omega \text{ ср}} = \frac{4a^2 b^2 \omega}{(a+b)(a^2 - b^2)} \left[ \frac{a-b}{a} - (\ln a - \ln b) \right]. \quad (8)$$

Середню швидкість РР, для її течії у кільцевій щілині яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал і яка викликана перепадом тиску знаходили з розв'язуючи рівняння (4), по аналогії з [2]

$$u_{z \text{ ср}} = \frac{\Delta p}{8\mu l} \left[ a^2 + b^2 - \frac{(a^2 - b^2)}{\ln \frac{a}{b}} \right]. \quad (9)$$

Швидкості  $u_z$  і  $u_\omega$  направлені під кутом  $90^\circ$ , отже сумарна швидкість РР в кільцевій щілині

$$u_\Sigma = \sqrt{u_{z \text{ ср}}^2 + u_{\omega \text{ ср}}^2}. \quad (10)$$

Помноживши сумарну швидкість РР у кільцевій щілині на  $\pi(a^2 - b^2)$  – площу щілини, отримали залежність для визначення витрати в ній

$$Q = \pi(a^2 - b^2) \sqrt{\frac{\Delta p^2}{64\mu^2 l^2} \left[ a^2 + b^2 - \frac{(a^2 - b^2)}{\ln \frac{a}{b}} \right]^2 + \frac{4a^4 b^4 \omega^2 \left[ \frac{a-b}{a} - (\ln a - \ln b) \right]^2}{(a-b)^2 (a^2 - b^2)^2}}. \quad (11)$$

Зауважимо, що витрата у кільцевій щілині яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, який обертається, залежать від багатьох факторів, а саме від геометричних розмірів щілини (радіального проміжку, довжини), перепаду тиску, коефіцієнта кінематичної в'язкості РР, співвісного розміщення вала в трубі та інших. Відмітимо, що несиметричне розташування вала в трубі може бути враховано коефіцієнтом значення якого згідно роботи [9] знаходиться в межах від 1 до 2,5.

В пакеті прикладних програм знаходили витрату РР у кільцевій щілині, яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, який обертається, для гідравлічного захисту занурювальних електродвигунів, при наступних параметрах: радіус труби  $a = 14,2$  мм; радіус вала  $b = 14$  мм, який у дослідженнях змінювали в діапазоні від 14, 0 мм до 14,15 мм; довжина щілини  $l = 450$  мм; частота обертання вала  $\omega = 3000 \frac{\text{об}}{\text{с}}$ ; перепад тиску на щілині  $\Delta p = 0,2$  МПа, який у дослідженнях змінювали в діапазоні від 0,1 МПа до 0,6 МПа. Установлено, що суттєвий вплив на величину витрати мають частота обертання вала (рис. 3 а) та ширина щілини (рис.4). Перепад тиску на щілині, у межах у яких він розглядався, на витрату крізь неї має незначний вплив.

подавали на вхід ступінчатий вплив, у вигляді перепаду тиску, отримували графіки перехідних процесів у кільцевій щілині (рис. 4). Установлено, у незалежності від перепаду тиску на щілині, частоті обертання вала та його радіусу, перехідний процес має ступінчатий характер, тобто вхідний сигнал передається через щілину миттєво.

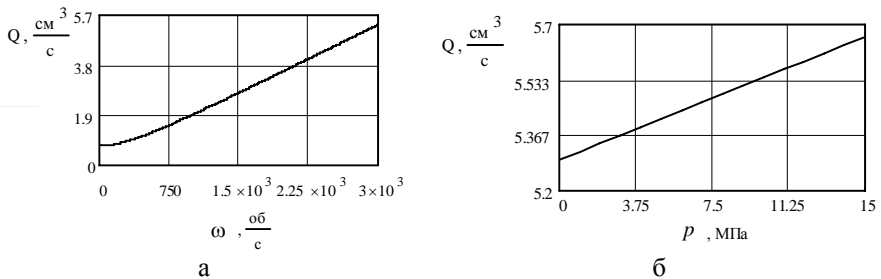


Рис. 3. Зміна витрати рідини у кільцевій щілині, яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, який обертається, в залежності: а – частоти обертання вала; б – перепаду тиску на щілині

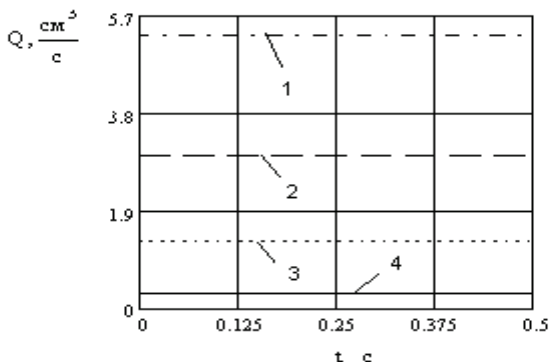


Рис. 4. Графіки перехідних процесів у кільцевій щілині, яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, який обертається, в залежності від радіусу вала: 1 – 14 мм; 2 – 14,05 мм; 3 – 14,1 мм; 4 – 14,15 мм

**Висновки.** Отримана математична залежність для визначення витрати рідини в кільцевій щілині яка утворена циліндричною трубою всередині якої розміщено вал, який обертається, і яка уточнює існуючу математичну модель гідравлічного захисту занурювальних електродвигунів. Проведені аналітичні дослідження впливу частоти обертання вала, геометричних розмірів та перепаду тиску на щілині, для гідравлічного захисту занурювальних електродвигунів, на витрату рідини в ній, дозволили встановити, що вхідний сигнал передається через щілину миттєво, а найбільший вплив на неї має ширину щілини та частота обертання валу. Отримані результати дозволять обґрунтовано проводити вибір конструктивних параметрів щілини.

Список літератури: 1. Бодяков Г. И. Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя цилиндрами // Инж.- физ. Журнал. – 1965. – т. 8. – №1. – С. 41 – 47. 2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика: Учебник. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с. 3. Попов Д.Н. Динамика и регулирование гидро - и пневмосистем. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Машиностроение, 1987.- 464 с. 4. Лурье З. Я., Лищенко И. Г. Скорость течения вязкой жидкости в постоянном зорезе узла поршень- цилиндр объемной гидромашины // Вестник ХГПУ. – Харьков: ХГПУ. – 1999. – Вып. 85. – С. 66 -73. 5. Лямаев Б.Ф., Небольский Г.П., Нелобов В.А. Стационарные и переходные процессы в сложных гидросистемах. Методы расчета на ЭВМ. Под ред. Б. Ф. Лямаева. – Л.: Машиностроение, 1978. – 192 с. ил., табл. – Библиогр.: с. 185 – 189. 6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973.– 847 с.: ил., табл. 7. Гликман Б.Ф. Математические модели пневмогидравлических систем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-техн. лит., 1986. – 368 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 353 – 363. 8. Темнов В.К. Волновые процессы в гидросистемах: Учеб. пособие – Челябинск: ЧПИ, 1981. – 81с. 9. Никитин Г. А., Ипатов А. М. Утечки через уплотнения малой длины // Гидропривод и гидропневмоавтоматика. Вып. 6. - К.: Техника, 1970. С. 81–86.

*Поступила до редколегії 12.03.08*