

А. Л. ДЕРЕЦ, канд. техн. наук, доц., Днепропетровский государственный технический ун-т, Каменское;
А. В. САДОВОЙ, докт. техн. наук, проф., Днепропетровский государственный технический ун-т, Каменское.

СИНТЕЗ КАСКАДНО-ПОДЧИНЁННЫХ СТРУКТУР РЕЛЕЙНО-МОДАЛЬНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КОРНЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА N-I ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ

Введение. Принципы модального управления служат методологической основой обеспечения заданных показателей качества переходных процессов и для непрерывных систем [1], и для систем разрывного управления [2]. Однако модальные регуляторы не могут считаться оптимальными с точки зрения каких-либо критериев качества, поскольку типовые распределения корней характеристических уравнений, лежащие в основе определения параметров таких регуляторов, являются продуктом компромисса, частично удовлетворяющего ряду противоречивых технических требований. Вместе с тем, системы с переменной структурой, к которым относятся релейные системы, допускают не компромиссную, а совместную реализацию совокупности заданных свойств, в том числе – оптимальности по ряду критериев. Примером может служить каскадно-подчинённая система разрывного управления с линейными функциями переключения, синтезированная методом N-i переключений [3]. Обладая технической простотой, такая система обеспечивает оптимальное быстродействие при заданных ограничениях канонических координат, обусловленных максимально допустимыми значениями промежуточных координат объекта управления, вместе с предельной точностью воспроизведения задающих воздействий.

Постановка задачи. Применение алгоритмов разрывного управления позволяет отнести внутренние обратные связи динамических объектов к возмущениям, компенсируемым скользящими режимами регуляторов за счёт запаса по управляющему воздействию. Данное обстоятельство делает возможной унификацию математического описания релейных систем управления в пространстве канонических координат. При этом дифференциальные уравнения динамики электромеханических систем (ЭМС) становятся идентичными описанию динамики нейтрально-устойчивых объектов соответствующего порядка N. Метод N-i переключений предполагает применение каскада из N релейных регуляторов для оптимального по быстродействию управления такими объектами. Обобщённое математическое описание релейных систем подчинённого регулирования (СПР) для произвольного N имеет вид [3]:

$$pE_i = E_{i+1} \Big|_{i=1..N}, u_{Ri} = E_{i+1}^* = E_{maxi+1} \cdot \text{sign} \left(E_i^* - E_i - \sum_{j=i+1}^N K_{i,j} \cdot E_j \right), \quad (1)$$

где i – номера координат, считая от выхода системы, $p = d / dt$ – символ дифференцирования по времени, E_i – канонические координаты системы, E_{N+1} – управляющее воздействие, E_{maxi} – уровни ограничений, $K_{i,j}$ – коэффициенты обратных связей i -х регуляторов по j -м координатам, u_{Ri} – сигналы i -х, считая от входа системы, регуляторов, символом «*» обозначены задающие воздействия, как входное, так и сформированные регуляторами для подсистем, стоящих ниже в иерархии управления.

Согласно методу N-i переключений коэффициенты обратных связей $K_{i,j}$ синтезируются из условий обеспечения регуляторами R_i переключений в N-i характерных точках расчётной оптимальной по быстродействию траектории. Вместе с тем, уравнения скольжения регуляторов R_i системы (1)

$$E_i^* - E_i - \sum_{j=i+1}^N K_{i,j} \cdot E_j = 0$$

дают основание считать $K_{i,j}$ коэффициентами характеристических уравнений соответствующих подсистем управления

$$\sum_{j=i}^N K_{i,j} \cdot p^{(j-i)} = 0, \quad (2)$$

что открывает возможности как для анализа устойчивости скользящих режимов релейных СПР, так и для модификации результатов их синтеза методом N-i переключений с учётом принципов модального управления.

Материалы исследования. Математическое описание вида (1) ориентировано на численную реализацию процедуры оптимизации по быстродействию [3], обобщённую на произвольный порядок системы. Аналитические результаты применения метода N-i переключений приобретают более наглядное представление при введении отдельных буквенных обозначений для канонических координат ЭМС. Закрепим за координатами состояния символы «ε, ω, φ, Ω, Φ» начиная от точки приложения управляющего воздействия, которому присвоен символ «а». Подобная система обозначений ориентирована на традиционное описание вращательного движения одно-массовых и двухмассовых ЭМС и отображает пропорциональность канонических координат соответственно угловым ускорению и скорости, угловому положению одномассовой ЭМС или углу закручивания вала двухмассовой ЭМС, угловым скорости и положению рабочего органа упругой системы. Она использована в публикациях [4–11], что предполагает заимствование и дальнейшее развитие результатов данных работ.

В такой системе обозначений математическое описание релейной СПР (1) второго порядка, выходной координатой которой является ω, приобретает вид [4]:

$$\left. \begin{array}{l} p\omega = \varepsilon \\ p\varepsilon = a \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} u_{R1} = u_{R\omega} = \varepsilon^* = \varepsilon_{max} \cdot \text{sign}(\omega^* - \omega - K_{\omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R2} = u_{R\varepsilon} = a^* = a_{max} \cdot \text{sign}(\varepsilon^* - \varepsilon) \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Согласно методу $N-i$ переключений коэффициенты главных обратных связей регуляторов R_ω , R_ε единичные, а коэффициент обратной связи регулятора R_ω по промежуточной координате определяется как функция уровней ограничения первой и второй производных регулируемой координаты ε_{max} , a_{max} по формуле

$$K_{\omega\varepsilon} = \varepsilon_{max} / (2 \cdot a_{max}). \quad (4)$$

Математическое описание СПР (1) для случая $N = 3$ при регулировании координаты φ приобретает вид [5]:

$$\left. \begin{array}{l} p\varphi = \omega \\ p\omega = \varepsilon \\ p\varepsilon = a \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} u_{R1} = u_{R\varphi} = \omega^* = \omega_{max} \cdot \text{sign}(\varphi^* - \varphi - K_{\varphi\omega} \cdot \omega - K_{\varphi\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R2} = u_{R\omega} = \varepsilon^* = \varepsilon_{max} \cdot \text{sign}(\omega^* - \omega - K_{\omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R3} = u_{R\varepsilon} = a^* = a_{max} \cdot \text{sign}(\varepsilon^* - \varepsilon) \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Коэффициенты обратных связей регуляторов R_ω , R_φ по промежуточным координатам определяются методом $N-i$ переключений на основании уровней ограничения первой, второй и третьей производных регулируемой координаты ω_{max} , ε_{max} , a_{max} по выражениям [5]

$$K_{\omega\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{max}}{2 \cdot a_{max}}, K_{\varphi\omega} = \frac{\omega_{max}}{2 \cdot \varepsilon_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}}{2 \cdot a_{max}}, K_{\varphi\varepsilon} = \frac{\omega_{max}}{4 \cdot a_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}^2}{12 \cdot a_{max}^2}. \quad (6)$$

Подчеркнём, что выражения (6) актуальны для настройки коэффициентов системы оптимального управления третьего порядка (5) во всём диапазоне изменения задающего воздействия. Однако максимумы канонических координат требуют коррекции при изменении формы оптимальной по быстродействию траектории, которая по аналогии с общепринятой классификацией режимов позиционирования может принимать форму трапеции [5], а также большого [6] и малого [7] треугольников. Аналогично система второго порядка (3) сохраняет оптимальность по быстродействию с настройкой (4) во всём диапазоне изменения выходной координаты при выполнении должной коррекции максимума первой производной [8] в режимах с треугольной диаграммой $\varepsilon(t)$.

Для случая $N=4$ в символьных обозначениях система (1) с регулируемой координатой Ω приобретает вид [9]:

$$\left. \begin{array}{l} p\Omega = \varphi \\ p\varphi = \omega \\ p\omega = \varepsilon \\ p\varepsilon = a \end{array} \right\}, \left. \begin{array}{l} u_{R1} = u_{R\Omega} = \varphi^* = \varphi_{max} \cdot \text{sign}(\Omega^* - \Omega - K_{\Omega\varphi} \cdot \varphi - K_{\Omega\omega} \cdot \omega - K_{\Omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R2} = u_{R\varphi} = \omega^* = \omega_{max} \cdot \text{sign}(\varphi^* - \varphi - K_{\varphi\omega} \cdot \omega - K_{\varphi\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R3} = u_{R\omega} = \varepsilon^* = \varepsilon_{max} \cdot \text{sign}(\omega^* - \omega - K_{\omega\varepsilon} \cdot \varepsilon) \\ u_{R4} = u_{R\varepsilon} = a^* = a_{max} \cdot \text{sign}(\varepsilon^* - \varepsilon) \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Коэффициенты обратных связей регуляторов R_ω , R_φ , R_Ω по промежуточным координатам определяются методом $N-i$ переключений на основании уровней ограничения первой, второй, третьей и четвертой производных регулируемой координаты φ_{max} , ω_{max} , ε_{max} , a_{max} по выражениям [9]

$$K_{\omega\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{max}}{2 \cdot a_{max}}, K_{\varphi\omega} = \frac{\omega_{max}}{2 \cdot \varepsilon_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}}{2 \cdot a_{max}}, K_{\varphi\varepsilon} = \frac{\omega_{max}}{4 \cdot a_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}^2}{12 \cdot a_{max}^2}, K_{\Omega\varphi} = \frac{\varphi_{max}}{2 \omega_{max}} + \frac{\omega_{max}}{2 \varepsilon_{max}} + \frac{\varepsilon_{max}}{2 a_{max}}, \quad (8)$$

$$K_{\Omega\omega} = \frac{\varphi_{max}}{4 \varepsilon_{max}} + \frac{\omega_{max}}{4 a_{max}} + \frac{\varphi_{max} \varepsilon_{max}}{4 \omega_{max} a_{max}} + \frac{\omega_{max}^2}{12 \varepsilon_{max}^2} + \frac{\varepsilon_{max}^2}{12 a_{max}^2}, K_{\Omega\varepsilon} = \frac{\varphi_{max}}{8} a_{max} + \frac{\varphi_{max} \varepsilon_{max}^2}{24 \omega_{max} a_{max}^2} + \frac{\omega_{max} \varepsilon_{max}}{24 a_{max}^2} + \frac{\omega_{max}^2}{24 \varepsilon_{max} a_{max}}.$$

Формулы (8) применимы для настройки системы (7) во всём диапазоне изменения задающего воздействия при соответствующих модификациях максимумов канонических координат [10 – 12].

Сопоставление выражений (7) с (5) и (3) свидетельствует об идентичности математического описания внутренних контуров регулирования релейных СПР и обособленных систем более низких порядков, достигнутой благодаря принятым обозначениям координат. Вместе с тем, из сопоставления формул (8) с (6) и (4) очевидна идентичность выражений для настроек внутренних подсистем релейных СПР и отдельно взятых систем более низких порядков. Данные факты позволяют сделать вывод о применимости результатов синтеза систем вида (1) методом $N-i$ переключений к внутренним контурам релейных СПР более высоких порядков.

Устойчивость скользящих режимов регуляторов СПР (3), (5), (7) с коэффициентами обратных связей (4), (6), (8) подтверждается результатами аналитической проверки [4]. Для этого коэффициенты (4), (6), (8) представляются функциями постоянных времени замкнутой системы, которые определены как длительности нарастания канонических координат системы от нуля до максимума при наибольшей скорости изменения, то есть при максимальных значениях их производных

$$T_a = \varepsilon_{max} / a_{max}; T_\varepsilon = \omega_{max} / \varepsilon_{max}; T_\omega = \varphi_{max} / \omega_{max}, \quad (9)$$

выраженные через постоянные времени (9) коэффициенты функций переключения регуляторов приобретают компактный вид

$$K_{\omega\varepsilon} = \frac{1}{2} T_a, K_{\varphi\omega} = \frac{1}{2} (T_a + T_\varepsilon), K_{\varphi\varepsilon} = \frac{1}{4} T_a T_\varepsilon + \frac{1}{12} T_a^2, K_{\Omega\varphi} = \frac{1}{2} (T_\omega + T_\varepsilon + T_a), \quad (10)$$

$$K_{\Omega\omega} = \frac{1}{4} (T_\omega T_\varepsilon + T_\varepsilon T_a + T_\omega T_a) + \frac{1}{12} (T_\varepsilon^2 + T_a^2), K_{\Omega\varepsilon} = \frac{1}{8} T_\omega T_\varepsilon T_a + \frac{1}{24} (T_\omega T_a^2 + T_\varepsilon T_a^2 + T_\varepsilon^2 T_a).$$

С учётом выражений (10) характеристические уравнения скольжения релейных систем второго, третьего и четвертого порядков, синтезированных методом $N-i$ переключений, можно представить соответственно как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}T_a \cdot p + 1 = 0, \quad \left(\frac{1}{4}T_a T_\varepsilon + \frac{1}{12}T_a^2 \right) \cdot p^2 + \frac{1}{2}(T_a + T_\varepsilon) \cdot p + 1 = 0, \\ \left(\frac{1}{8}T_\omega T_\varepsilon T_a + \frac{1}{24}(T_\omega T_a^2 + T_\varepsilon T_a^2 + T_\varepsilon^2 T_a) \right) \cdot p^3 + \left(\frac{1}{4}(T_\omega T_\varepsilon + T_\varepsilon T_a + T_\omega T_a) + \frac{1}{12}(T_\varepsilon^2 + T_a^2) \right) \cdot p^2 + \frac{1}{2}(T_a + T_\varepsilon + T_\omega) \cdot p + 1 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Анализ уравнений (11) указывает на явную зависимость их коэффициентов от половинных постоянных времени замкнутой системы (9)

$$\tau_a = \frac{1}{2}T_a, \tau_\varepsilon = \frac{1}{2}T_\varepsilon, \tau_\omega = \frac{1}{2}T_\omega, \quad (12)$$

подстановка которых позволяет привести данные уравнения к виду

$$\begin{aligned} \tau_a \cdot p + 1 = 0, \quad \left(\tau_a \tau_\varepsilon + \frac{1}{3}\tau_a^2 \right) \cdot p^2 + (\tau_a + \tau_\varepsilon) \cdot p + 1 = 0, \\ \left(\tau_a \tau_\varepsilon \tau_\omega + \frac{1}{3}(\tau_\omega \tau_a^2 + \tau_\varepsilon \tau_a^2 + \tau_\varepsilon^2 \tau_a) \right) \cdot p^3 + \left(\tau_a \tau_\varepsilon + \tau_a \tau_\omega + \tau_\varepsilon \tau_\omega + \frac{1}{3}(\tau_a^2 + \tau_\varepsilon^2) \right) \cdot p^2 + (\tau_a + \tau_\varepsilon + \tau_\omega) \cdot p + 1 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда коэффициенты (10) с учётом подстановок (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} K_{\omega\varepsilon} = \tau_a, \quad K_{\varphi\omega} = \tau_a + \tau_\varepsilon, \quad K_\varepsilon = \tau_a \tau_\varepsilon + \frac{1}{3}\tau_a^2, \quad K_{\Omega\varphi} = \tau_a + \tau_\varepsilon + \tau_\omega, \\ K_{\Omega\omega} = \tau_a \tau_\varepsilon + \tau_a \tau_\omega + \tau_\varepsilon \tau_\omega + \frac{1}{3}(\tau_a^2 + \tau_\varepsilon^2), \quad K_{\Omega\varepsilon} = \tau_a \tau_\varepsilon \tau_\omega + \frac{1}{3}(\tau_\omega \tau_a^2 + \tau_\varepsilon \tau_a^2 + \tau_\varepsilon^2 \tau_a). \end{aligned} \quad (14)$$

Данная форма представления характеристических уравнений делает их удобными для анализа с точки зрения принципов модального управления. Рассмотрим полученные для случая задания действительных корней

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1}, p_2 = -\frac{1}{\tau_2}, p_3 = -\frac{1}{\tau_3} \quad (15)$$

характеристические уравнения релейно-модальных регуляторов [2] порядка $N = 2 \dots 4$:

$$\tau_1 \cdot p + 1 = 0, \quad (\tau_1 \tau_2) \cdot p^2 + (\tau_1 + \tau_2) \cdot p + 1 = 0, \quad (\tau_1 \tau_2 \tau_3) \cdot p^3 + (\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3) \cdot p^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \cdot p + 1 = 0. \quad (16)$$

Обозначим их коэффициенты символом Q_{ij} по аналогии с коэффициентами K_{ij} систем (3), (5), (7)

$$Q_{\omega\varepsilon} = \tau_1, \quad Q_{\varphi\omega} = \tau_1 + \tau_2, \quad Q_{\varphi\varepsilon} = \tau_1 \tau_2, \quad Q_{\Omega\varphi} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad Q_{\Omega\omega} = \tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3, \quad Q_{\Omega\varepsilon} = \tau_1 \tau_2 \tau_3. \quad (17)$$

Подстановка постоянных времени (12) в уравнения (16) вместо τ_1, τ_2, τ_3 соответственно позволяет представить эти уравнения в виде

$$\tau_a \cdot p + 1 = 0, \quad (\tau_a \tau_\varepsilon) \cdot p^2 + (\tau_a + \tau_\varepsilon) \cdot p + 1 = 0, \quad (\tau_a \tau_\varepsilon \tau_\omega) \cdot p^3 + (\tau_a \tau_\varepsilon + \tau_a \tau_\omega + \tau_\varepsilon \tau_\omega) \cdot p^2 + (\tau_a + \tau_\varepsilon + \tau_\omega) \cdot p + 1 = 0. \quad (18)$$

Сравнение коэффициентов многочленов (14) и (18) позволяет сделать несколько неожиданный вывод о близости форм их аналитических выражений, синтезированных принципиально отличающимися методами. Сопоставление уравнений (14) и (18) указывает на тождественность коэффициентов при нулевых и первых степенях комплексной переменной p и на совпадение отдельных слагаемых в коэффициентах при старших степенях, причём с учётом положительной определённости постоянных времени отдельные коэффициенты оптимальных регуляторов превышают соответствующие коэффициенты модальных (по примерным оценкам в $1,2 \div 1,5$ раза):

$$\tau_a \tau_\varepsilon + \frac{1}{3}\tau_a^2 > \tau_a \tau_\varepsilon, \quad \tau_\omega \tau_\varepsilon \tau_a + \frac{1}{3}(\tau_\omega \tau_a^2 + \tau_\varepsilon \tau_a^2 + \tau_\varepsilon^2 \tau_a) > \tau_\omega \tau_\varepsilon \tau_a, \quad \tau_\omega \tau_\varepsilon + \tau_\varepsilon \tau_a + \tau_\omega \tau_a + \frac{1}{3}(\tau_\varepsilon^2 + \tau_a^2) > \tau_\omega \tau_\varepsilon + \tau_\varepsilon \tau_a + \tau_\omega \tau_a. \quad (19)$$

Выявленное частичное совпадение аналитических выражений коэффициентов обратных связей релейных регуляторов, синтезированных методом распределения корней характеристических уравнений и путём оптимизации по быстродействию, открывает возможность интеграции принципов модального управления и метода $N-i$ переключений с целью взаимной компенсации их недостатков.

Так, релейные СПР с линейными уравнениями скольжения, оптимизированные по быстродействию методом $N-i$ переключений, поддерживают скользящий режим на всём протяжении переходной траектории, сугубо нелинейной при ограничении координат состояния, за счёт перераспределения данной функции между отдельными регуляторами каскада. Однако области существования скользящих режимов каждого из регуляторов в отдельности крайне малы, их размеры по различным координатным осям сопоставимы с приращениями соответствующих координат состояния на временном интервале, равном наименьшей постоянной времени T_a . Это затрудняет восстановление скользящего режима при отклонениях изображающей точки от расчётной траектории [3]. Данная проблема усугубляется при комплексно-сопряжённых корнях характеристических уравнений, которые придадут колебательность скользящему движению системы. Следовательно, настройки оптимальных по быстродействию релейных СПР требуют коррекции из соображений робастности в направлении обеспечения действительных значений корней их характеристических полиномов при расширении областей существования скользящих режимов регуляторов. Вместе с тем любое изменение настроек формально нарушает оптимальность системы, поэтому должно быть минимизировано и строго обосновано.

Именно такие минимальные изменения в настройки оптимальных регуляторов позволяет внести замена коэффициентов вида (14) на коэффициенты вида (17) модальных регуляторов в силу близости их аналитических форм. Назначение действительных отрицательных корней на основе половинных постоянных времени (12) обеспечивает аperiodические скользящие движения всех подсистем СПР и в то же время разрешает ключевую для концепции модального управления проблему обоснованного распределения корней, поскольку постоянные (12) определены для системы, воспроизводящей оптимальную по быстродействию траекторию.

Однако при использовании постоянных времени (12) для коррекции настроек оптимальных регуляторов в их значения необходимо внести поправки с учётом следующего обстоятельства. Одной из целей коррекции на-

строек оптимальных регуляторов является расширение областей существования скользящих режимов. Оно может быть достигнуто такой простой мерой, как увеличение коэффициентов обратных связей, что приводит к более раннему возникновению переключений во временной области. В геометрической интерпретации это соответствует повороту гиперплоскости скольжения в направлении фазовой траектории, благодаря чему попадание на неё изображающей точки происходит на большем удалении от начала координат. Поскольку при непосредственной подстановке половинных постоянных времени (12) оптимальной по быстродействию системы в выражения (16) были получены формулы (18), из которых следует прямо противоположное желаемому соотношение (19) отдельных коэффициентов, предлагается скорректировать постоянные (12) до таких значений, при которых коэффициенты (14) не будут превосходить синтезируемые им на замену коэффициенты (17). Такая коррекция осуществима с помощью повышающего коэффициента $\gamma > 1$, который при назначении корней (15) и вычислении коэффициентов (17) применяется к исходным значениям постоянных времени (12) в равной степени:

$$\tau_1 = \gamma \tau_a, \tau_2 = \gamma \tau_\epsilon, \tau_3 = \gamma \tau_\omega. \quad (20)$$

Системы второго порядка не требуют коррекции постоянных времени по причине полного совпадения их характеристических уравнений в виде (13) и (18). Для систем третьего порядка повышающий коэффициент γ следует определять из уравнения

$$\tau_a \tau_\epsilon + \frac{1}{3} \tau_a^2 = \gamma \tau_a \gamma \tau_\epsilon,$$

откуда получим расчётную формулу

$$\gamma = \sqrt{\frac{\tau_a \tau_\epsilon + \frac{1}{3} \tau_a^2}{\tau_a \tau_\epsilon}}. \quad (21)$$

Для систем четвёртого порядка повышающий коэффициент γ можно найти из уравнений

$$\tau_\omega \tau_\epsilon \tau_a + \frac{1}{3} (\tau_\omega \tau_a^2 + \tau_\epsilon \tau_a^2 + \tau_\epsilon^2 \tau_a) = \gamma \tau_\omega \gamma \tau_\epsilon \gamma \tau_a$$

или

$$\tau_\omega \tau_\epsilon + \tau_\epsilon \tau_a + \tau_\omega \tau_a + \frac{1}{3} (\tau_\epsilon^2 + \tau_a^2) = \gamma \tau_\omega \gamma \tau_\epsilon + \gamma \tau_\epsilon \gamma \tau_a + \gamma \tau_\omega \gamma \tau_a$$

откуда получим формулы

$$\gamma = \sqrt[3]{\frac{\tau_\omega \tau_\epsilon \tau_a + \frac{1}{3} (\tau_\omega \tau_a^2 + \tau_\epsilon \tau_a^2 + \tau_\epsilon^2 \tau_a)}{\tau_\omega \tau_\epsilon \tau_a}}$$

или

$$\gamma = \sqrt{\frac{\tau_\omega \tau_\epsilon + \tau_\epsilon \tau_a + \tau_\omega \tau_a + \frac{1}{3} (\tau_\epsilon^2 + \tau_a^2)}{\tau_\omega \tau_\epsilon + \tau_\epsilon \tau_a + \tau_\omega \tau_a}}, \quad (22)$$

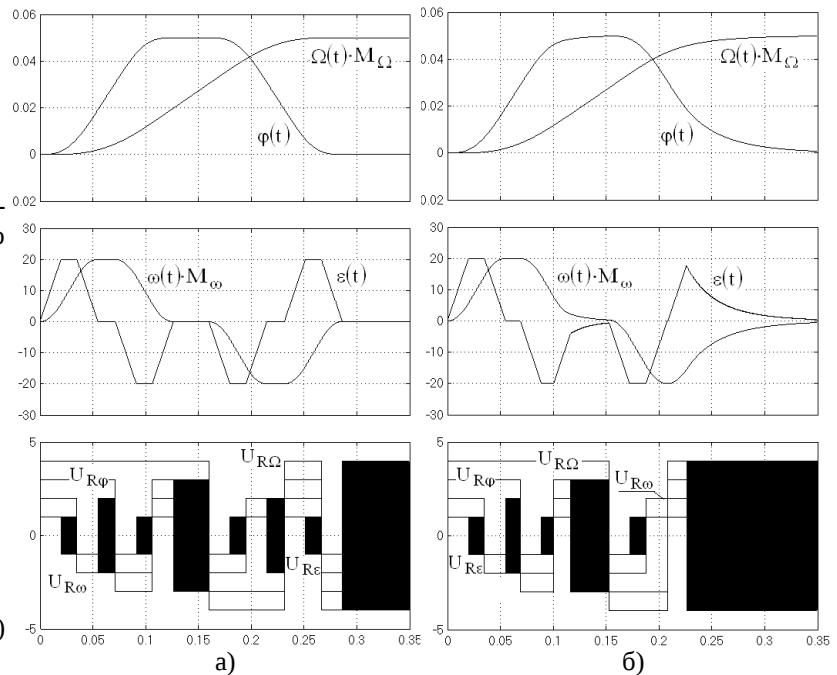


Рисунок 1 – Переходные процессы в релейной СПР с оптимальными (а) и модальными (б) регуляторами

по результатам применения которых выбирается большее из значений. Ориентировочная оценка γ для систем третьего и четвертого порядков при типовых соотношениях постоянных времени составляет $1,05 < \gamma < 1,2$.

На рисунке 1 представлены переходные процессы в релейной СПР четвёртого порядка (7) с нейтрально-устойчивым объектом управления, которая синтезирована методом $N-i$ переключений (рис. 1,а) а затем её настройки скорректированы по принципу модального управления (рис. 1,б). Ограничения координат установлены из соображений наглядности временных диаграмм на уровнях $a_{max} = 1000$, $\epsilon_{max} = 20$, $\omega_{max} = 0,7$, $\varphi_{max} = 0,05$ при $\Omega = 0,008$. Получаемые для таких уставок регуляторов интервалы стабилизации всех координат на оптимальной по быстродействию траектории (рис 1,а) сопоставимы по величине, как и постоянные времени, что не характерно для электромеханических систем. Сравнительный анализ результатов исследования динамики СПР с оптимальными и модальными регуляторами подтверждает эффективность предложенного порядка коррекции параметров.

Рис. 1,б демонстрирует раннее вхождение в скользящий режим подвергнутых коррекции регуляторов R_ϕ , R_Ω , что свидетельствует о достигнутом расширении области существования их скользящих режимов. Значительная стадия переходного процесса на рис 1,б имеет чётко выраженный аperiodический характер. При этом динамика внутреннего контура, регулятор которого R_ϵ не подвергнут изменениям, сохраняет идентичность с соответствующими фрагментами оптимального процесса. Отклонение модальной СПР от оптимальной траектории, оцениваемое по изменению порядка переключений регуляторов, в масштабах всего переходного процесса является весьма незначительным. Общее увеличение длительности переходного процесса за счёт возникновения дотяжек в системе с выбранными ограничениями составляет 25%.

Выводы. Установленная в настоящей работе на примере релейных СПР 2 – 4 го порядков аналогия аналитических выражений коэффициентов обратных связей оптимальных и модальных релейных регуляторов позволила разработать методику коррекции настроек систем оптимального управления в направлении расширения областей существования скользящих режимов путём интеграции принципов модального управления в матема-

тический аппарат метода $N-i$ переключений. Синтез каскада релейно-модальных регуляторов с распределением корней на основе постоянных времени оптимальных по быстродействию систем сводится к последовательности расчётов по формулам (9), (11), (22), (21), (20), (17) и подстановкам $K_{ij} = Q_{ij}$ в системе (5). В результате применения предложенной методики настройки параметров релейная СПР приобретает комбинированные характеристики оптимальных и модальных систем, обеспечивая воспроизведение оптимальной по быстродействию траектории при больших отклонениях от заданного состояния и формирование аperiodического процесса в малой окрестности точки равновесия без модификации параметров в течение переходного процесса. Благодаря своей простоте процедура параметрического синтеза СПР может служить элементом алгоритма управления адаптивных цифровых систем, осуществляющих самонастройку в режиме реального времени. Аналитические результаты данной работы могут быть распространены на все системы четвертого порядка, замкнутые по старшим производным выходной величины. Кроме того, вышеизложенные принципы коррекции настроек СПР применимы к системам более высоких порядков.

Список литературы: 1. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с. 2. Горелов П.В. Релейно-модальное управление двухмассовыми электромеханическими системами / Горелов П.В., Мотченко А.И., Морозов Д.И. // Вестник НТУ ХПИ: «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика» – Харьков. – 2008. – №30. – С.120 – 123. 3. Садовой А.В. Релейные системы оптимального управления электроприводами / Садовой А.В., Сухинин Б.В., Сохина Ю.В., Дерезь А.Л. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2011. – 337 с. 4. Садовой О.В., Дерезь О.Л. Спеціальні питання математичного опису і моделювання динаміки складних систем. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2014. – 206 с. 5. Садовой А.В. Параметрический синтез позиционных релейных систем подчиненного регулирования методом $N-i$ переключений / Садовой А.В., Дерезь А.Л. // Вестник НТУ ХПИ: «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика». – Харьков. – 2005. – №45. – С.71 – 73. 6. Садовой А.В. Оптимизация по быстродействию режимов средних перемещений позиционных релейных СУЭП методом $N-i$ переключений / Садовой А.В., Дерезь А.Л. // Сборник научных трудов ДГТУ: «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика». – Днепродзержинск. – 2007.– С.420 – 422. 7. Садовой А.В. Оптимизация по быстродействию методом $N-i$ переключений режимов малых перемещений позиционного электропривода / Садовой А.В., Дерезь А.Л. // Вестник КГПУ.– Кременчуг. – 2007. – №.3/2007(44). – С.15 – 17. 8. Садовой А.В. Рациональное ограничение ускорения электроприводов, синтезируемых методом $N-i$ переключений / Садовой А.В., Дерезь А.Л. // Вестник КГПУ. – Кременчуг. – 2006. – №3/2006 (38). – С.21–22. 9. Садовой А.В. Параметрический синтез релейной системы подчиненного регулирования скорости электропривода с упругой связью / Садовой А.В., Дерезь А.Л. // Вестник КГПУ. – Кременчуг. – 2008 – №3/2008(50). – Часть 1. – С.83 – 87. 10. Дерезь А. Л. Оптимизация по быстродействию системы регулирования скорости электропривода методом $N-i$ переключений при неопределённом максимуме упругого момента / Дерезь А. Л., Садовой А. В. // Сборник научных трудов ДГТУ. – Днепродзержинск. – 2013. – №1(21) . – С.150 – 156. 11. Дерезь А. Л. Синтез релейной системы управления четвертого порядка методом $N-i$ переключений при неопределённых максимумах первой и второй производных регулируемой координаты / Дерезь А. Л., Садовой А. В. // Сборник научных трудов ДГТУ. – Днепродзержинск. – 2016. – №1(28) . – С.81 – 88. 12. Садовой А.В. Синтез методом $N-i$ переключений релейной системы четвертого порядка без внутренних ограничений / Садовой А.В., Дерезь А.Л. // Сборник научных трудов ДГТУ. – Днепродзержинск. – 2008. – №.1(9). – С.167 – 171.

Bibliography (transliterated): 1. Kuzovkov N. T. *Modalnoe upravlenie i nablyudayushchie ustroystva*. M.: Mashinostroenie, 1976. Print. 2. Gorelov P.V., Motchenko A.I., Morozov D.I. “Releyno-modalnoe upravlenie dvuhmassovyyimi elektromekhanicheskimi sistemami”. *Vestnik NTU HPI*. 30(2008):120 – 123. Print. 3. Sadovoy A.V., Suhinin B.V., Sohina Yu.V., Derets A.L. *Releynnye sistemy optimalnogo upravleniya elektroprivodami*. Dneprodzerzhinsk: DGTU, 2011. Print. 4. Sadovoy O.V., Derets O.L. *Spetsialni pitannya matematichnogo opisu i modelyuvannya dynamiki skladnih sistem*. – Dniprodzerzhinsk : DDTU, 2014. Print. 5. Sadovoy A.V., Derets A.L. “Parametricheskyy sintez pozitsionnykh releynykh sistem podchinennogo regulirovaniya metodom $N-i$ pereklyucheniy”. *Vestnik NTU HPI. Harkov*.45(2005): 71 – 73. Print. 6. Sadovoy A.V., Derets A.L. “Optimizatsiya po byistrodeystviyu rezhimov srednih peremescheniy pozitsionnykh releynykh SUEP metodom $N-i$ pereklyucheniy”. *Sbornik nauchnykh trudov DGTU. Dneprodzerzhinsk*. (2007): 420 – 422. Print. 7. Sadovoy A.V., Derets A.L. “Optimizatsiya po byistrodeystviyu metodom $N-i$ pereklyucheniy rezhimov malyykh peremescheniy pozitsionnogo elektroprivoda”. *Vestnik KGPU. Kremenchug*.3.44(2007): 15 – 17. Print. 8. Sadovoy A.V., Derets A.L. “Ratsionalnoe ogranichenie uskoreniya elektroprivodov, sinteziruemykh metodom $N-i$ pereklyucheniy”. *Vestnik KGPU. Kremenchug*. 3.38(2006): 21–22. Print. 9. Sadovoy A.V., Derets A.L. “Parametricheskyy sintez releynoy sistemy podchinyonnoho regulirovaniya skorosti elektroprivoda s uprugoy svyazyyu”. *Vestnik KGPU. Kremenchug*. 3.1.50(2008): 83 – 87. Print. 10. Derets A. L., Sadovoy A. V. “Optimizatsiya po byistrodeystviyu sistemy regulirovaniya skorosti elektroprivoda metodom $N-i$ pereklyucheniy pri neopredelyonnom maksimume uprugogo momenta”. *Sbornik nauchnykh trudov DGTU*. 1.21(2013): 150 – 156. Print. 11. Derets A. L., Sadovoy A. V. “Sintez releynoy sistemy upravleniya chetyvortogo poryadka metodom $N-i$ pereklyucheniy pri neopredel'yonnykh maksimumah pervoy i vtoroy proizvodnykh reguliruemykh koordinaty”. *Sbornik nauchnykh trudov DGTU. Dneprodzerzhinsk*.1.28(2016): 81 – 88. Print. 12. Sadovoy A.V., Derets A.L. “Sintez metodom $N-i$ pereklyucheniy releynoy sistemy chetyvortogo poryadka bez vnutrennih ogranicheniy”. *Sbornik nauchnykh trudov DGTU. Dneprodzerzhinsk*.1.9(2008): 167 – 171. Print.

Поступила 21.05.2017