

Р. С. ВОЛЯНСКИЙ, канд. техн. наук, доц., Днепропетровский государственный технический ун-т, Каменское;
А. В. САДОВОЙ, докт. техн. наук, проф., Днепропетровский государственный технический ун-т, Каменское.

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА

Введение. Ввиду строгости математической формулировки и в силу физического смысла аналитическое конструирование регуляторов (АКР) занимает особое место среди методов создания систем оптимального управления движением линейных динамических объектов. Предложенный А. М. Летовым в середине прошлого века [1], к настоящему времени метод АКР получил широкое распространение при синтезе систем управления электромеханическими объектами [2] и технологическими процессами [3,4]. Широкое распространение этот метод получил благодаря однозначной взаимосвязи цели управления, заданной интегральным функционалом качества с функцией Ляпунова, которая представляет собой избыточную энергию, запасенную на траекториях возмущенного движения, и параметрами возмущенного движения. Причем использование для решения задачи АКР модифицированного принципа симметрии (МПС) позволяет определить вид и параметры функционала и функции Ляпунова через структуру и параметры объекта управления.

Классическое решение задачи АКР, изложенное в работе [1], приводит к статическим по управляющему и возмущающему воздействиям системам. Результаты работ [2-4] позволяют улучшить статические и динамические характеристики замкнутых систем за счет компенсации внутренних обратных и перекрестных связей и инерционностей объекта. Причем подход, предложенный в [2], позволяет уменьшить порядок замкнутой системы по сравнению с порядком исходного объекта и привести замкнутую систему к эквивалентному апериодическому звену первого порядка.

Недостатком указанного подхода является то, что такое приведение оказывается справедливым только в сравнительно малой области фазового пространства, попадание в которую выводит регулятор из насыщения. Вне этой области происходит размыкание системы, и она работает как разомкнутая с максимальным управляющим воздействием. Очевидно, что в этом случае сложно говорить о формировании желаемых траекторий движения вследствие накопления больших ошибок в интегральных и бесконечно больших сигналах в дифференциальных составляющих регулятора. Причем если первые могут быть ограничены на некотором уровне [5], то попытка ограничивать дифференциальные составляющие приводит к снижению запаса устойчивости замкнутой системы и появлению затухающих колебаний.

Устранить указанный недостаток можно путем формирования траекторий замкнутой системы, эквивалентных траекториям движения объекта n -го порядка. В этом случае все производные от ошибки регулирования имеют конечные значения, что не приводит к насыщению регулятора. Как следствие, система управления остается замкнутой при любых начальных условиях. Таким образом работа, посвященная исследованию систем, формирующих заданные траектории движения, является актуальной.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является синтез управляющего воздействия, которое формирует траектории движения замкнутой системы, эквивалентные траекториям апериодического звена n -го порядка.

Материалы исследования.

1. Синтез управляющего воздействия

Рассмотрим уравнения движения обобщенного линейного электромеханического объекта n -го порядка в нормальной форме

$$p y_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} y_i + m_n U, \quad j \in [1, n], \quad (1)$$

где y_i – переменные состояния электромеханической системы, b_{ij} , m_n – параметры объекта, U – управляющее воздействие.

Представим уравнения (1) в канонической форме

$$p x_j = x_{j+1}; \quad p x_n = - \sum_{i=1}^n a_i x_i + M_n U, \quad j \in [1, n-1], \quad x_1 = y_1, \quad (2)$$

здесь a_i – коэффициенты характеристического полинома объекта (1), M_n – коэффициент при управляющем воздействии.

В соответствии с принципом симметрии САУ определим управляющее воздействие U , компенсирующее внутренние обратные связи объекта управления (2),

$$U = \frac{1}{M_n} \left(p^n + \sum_{i=1}^n a_i p^{i-1} \right) x_1^*, \quad (3)$$

здесь x_1^* – желаемое значение выходной координаты объекта управления.

Система управления, в которой реализуется управляющее воздействие (3), является безынерционной и обеспечивает движение объекта управления по заданной траектории

$$y_1 = y_1^*. \quad (4)$$

Для реализации этого управляющего воздействия необходимо вычислять n производных от желаемой координаты y_1^* , что технически реализуемо только в случае n -кратной дифференцируемости функции $y_1^*(t)$. При постоянном входном воздействии это условие может быть достигнуто путем перехода от алгоритма управления (3) к алгоритму вида

$$U = \frac{1}{M_n} \left(p^{n-k} + \sum_{i=1}^n a_i p^{i-k-1} \right) x_1^*, \quad (5)$$

где k – желаемый порядок системы управления.

При $k = n$ алгоритм (5) преобразуется к виду

$$U = \frac{1}{M_n} \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i p^{i-n-1} \right) x_1^*, \quad (6)$$

который будет рассматриваться в дальнейшем.

Такой алгоритм управления обусловлен совпадением порядков исходного и преобразованного объектов.

Переход от управляющего воздействия (3) к воздействию (6) соответствует переходу от траекторий движения, которые описываются уравнением (4), к траекториям, движение по которым описывается уравнениями в форме Бруновского

$$p^n y_1 = x_1^*. \quad (7)$$

Таким образом установка на входе регулятора, реализующего алгоритм (3), нескольких последовательно включенных интеграторов позволяет перейти к алгоритму (5), который задает желаемый порядок системы управления. Причем наличие интеграторов в прямом канале повышает порядок астатизма системы без введения в алгоритм управления дополнительных интегральных составляющих.

Поскольку динамика преобразованного объекта управления задана в форме Бруновского, то наиболее простым методом синтеза управляющего воздействия является модальный синтез [6], который определяет управляющее воздействие x_1^* следующим образом

$$x_1^* = -g \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i p^i \right) \eta_1, \quad \eta_1 = y_1 - y_1^*, \quad (8)$$

где g – коэффициент усиления регулятора, y_1^* – желаемое значение переменной y_1 .

В этом случае искомые коэффициенты обратных связей γ_i являются коэффициентами желаемого характеристического полинома

$$D(p) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i p^i, \quad (9)$$

выбор которого определяет качество процессов управления в системе.

Подставив зависимость (8) в выражение (6), получим следующий алгоритм управления

$$U = -\frac{g}{M_n} \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i p^{i-n-1} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i p^i \right) \eta_1. \quad (10)$$

Алгоритм управления (10) формирует для объекта (1) n -кратно дифференцируемую траекторию движения и является одним из вариантов решения задачи синтеза замкнутой системы при помощи методов модального управления.

Раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых позволяет представить алгоритм (10) в виде

$$U = -\frac{g}{M_n} \left(\frac{a_1}{p^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-i} a_j \gamma_{n-i+1}}{p^i} + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} \gamma_{n-i+1} + \sum_{i=1}^{n-2} p^i \left(\gamma_i + \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{j+1} \gamma_{n-j+i} \right) + \gamma_{n-1} p^{n-1} y_1 \right) \eta_1. \quad (11)$$

Алгоритм (11) содержит n интегралов и $n-1$ производную от отклонения регулируемой переменной, поэтому можно утверждать, что он имеет размерность $2n-1$ и позволяет управлять преобразованным n -мерным объектом, динамика которого описывается уравнениями в форме Бруновского (7) и может рассматриваться как обобщение известных алгоритмов, приведенных в [2]. Причем путем введения нелинейных активационных функций [7] алгоритм (11) может быть обобщен на класс алгоритмов управления вида

$$U = -f \left[\frac{g}{M_n} \left(\frac{a_1}{p^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-i} a_j \gamma_{n-i+1}}{p^i} + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} \gamma_{n-i+1} + \sum_{i=1}^{n-2} p^i \left(\gamma_i + \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{j+1} \gamma_{n-j+i} \right) + \gamma_{n-1} p^{n-1} \gamma_1 \right) \eta_1 \right], \quad (12)$$

где $f(\cdot)$ – нечетная активационная функция.

2. Восстановление функции Ляпунова

В силу основного функционального уравнения Беллмана между управляющим воздействием, которое формируется в замкнутой системе, и функцией Ляпунова, определяющей избыточную энергию, накопленную этой системой, существует однозначная взаимосвязь [2]

$$U = -\frac{\partial V}{\partial \eta_n} = -\sum v_{i-1n} \eta_i, \quad (13)$$

где

$$\eta_n = p^{n-1} \eta_1, \quad (14)$$

V – функция Ляпунова, определенная в классе квадратичных форм вида

$$V = \sum v_{ij} \eta_i \eta_j, \quad v_{ij} = v_{ji}. \quad (15)$$

В силу соотношения (13) функция Ляпунова (15) может быть восстановлена путем интегрирования управляющего воздействия (11)

$$V = -\int U d \eta_n + F(\eta_i, \eta_j), \quad i, j \in [1, n-1]. \quad (16)$$

Сопоставление управляющих воздействий (11) и (13) позволяет представить функцию Ляпунова (16) в виде суммы трех слагаемых, которые определяют интегральные, пропорциональные и дифференциальные составляющие алгоритма (11) соответственно

$$V = \sum_{i,j=-n}^{-1} v_{ij}^- \frac{\eta_i}{p^i} \frac{\eta_j}{p^j} + \sum_{i=-n}^{n-1} v_{0i} \eta_i p^i \eta_1 + \sum_{i,j=1}^{n-1} v_{ij}^+ p^i \eta_i p^j \eta_1. \quad (17)$$

Коэффициенты v_{in} функции Ляпунова (17) в силу алгоритма (11) определяются выражениями

$$\begin{cases} v_{0n} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} \gamma_{n-i+1}; & v_{nn}^- = a_1; & v_{(n-1)n}^+ = \gamma_{n-1}; \\ v_{in}^- = a_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-i} a_j \gamma_{n-j+1} & \text{если} & -n < i < 0; \\ v_{in}^+ = \gamma_i + \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{j+1} \gamma_{n-j+i} & \text{если} & 0 < i < n-1. \end{cases} \quad (18)$$

Остальные коэффициенты функции (17) подчинены известным соотношениям [2]

$$v_{ij}^- = v_{in}^- v_{jn}^-; \quad v_{0i} = v_{0n} v_{in}^+; \quad v_{ij}^+ = v_{in}^+ v_{jn}^+. \quad (19)$$

Выражения (18) позволяют упростить алгоритм (11) следующим образом

$$U = -\frac{g}{M_n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{v_{in}^-}{p^i} + v_{0n} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{in}^+ p^i \right) \eta_1 \quad (20)$$

и утверждать, что использование функции Ляпунова (17) гарантирует динамическому объекту (1) устойчивость, если таковую обеспечивает выбранное желаемое распределение корней. Справедливо и обратное – если назначить коэффициенты функции (17) таким образом, чтобы выполнялась теорема Ляпунова об устойчивости движения [2], то из выражений (18) могут быть найдены коэффициенты желаемого характеристического полинома. Таким образом, соотношения (18) являются связующими между методами модального управления и методами теории оптимального управления и могут использоваться для формулирования условий асимптотической устойчивости системы управления объектом (1), в которой реализуется алгоритм (11). Эти условия однозначно следуют из выражений (18) и (20) и могут быть сформулированы следующим образом: для асимптотической устойчивости замкнутой системы с алгоритмом (20) достаточно, чтобы коэффициенты γ_i характеристического уравнения (9) обеспечивали отрицательность и вещественность его корней. Сказанное выше относится и к системам, в которых реализуется алгоритм (12), поскольку их можно рассматривать как системы управления с переменным коэффициентом усиления регулятора g , который не влияет на устойчивость замкнутой системы.

3. Определение коэффициента усиления регулятора

Необходимо отметить, что сказанное выше является справедливым только в том случае, когда регулятор с алгоритмом (20) работает на ненасыщенном участке. При вхождении регулятора в насыщение все рассмотренные преобразования не выполняются. Поэтому вызывает интерес определение коэффициента g , при котором управляющее воздействие на выходе регулятора не превышает ограничения U_{max} .

В силу алгоритма (20) выражение для определения искомого коэффициента усиления очевидно

$$g = M_n \left| \frac{U_{max}}{\sum_{i=1}^n v_{in}^- \left(\frac{\eta_1}{p} \right)_{max} + v_{0n} \eta_{1max} + \sum_{i=1}^{n-1} v_{in}^+ \left(\eta_1 p^i \right)_{max}} \right|, \quad (21)$$

где η_{1max} , $(\eta_1 p^i)_{max}$, $(\eta_1/p^i)_{max}$ – максимальное значение отклонения, его i -ой производной и i -го интеграла.

Из условия обеспечения асимптотической устойчивости в системе максимальное значение интегральных составляющих выражения (21) определяется их значениями в установившемся режиме и может быть найдено путем анализа соответствующей передаточной функции. Максимальные значения отклонения регулируемой величины и ее производных могут быть найдены на основании известных параметров задающего сигнала.

В случае использования алгоритма (12) коэффициент усиления (21) является максимальным значением коэффициента усиления регулятора, исходя из значения которого следует выбрать параметры активационной функции.

Выводы. Приведенные в работе выкладки позволяют сделать следующие выводы:

1. Совместное использование модального управления и принципа симметрии позволяет построить систему управления, которая эквивалентна апериодическому звену желаемого порядка.
2. Алгоритм управления и функция Ляпунова, составленная для замкнутой системы, содержат три слагаемые, которые образуют интегральные, пропорциональные и дифференциальные составляющие, формирующие траектории движения замкнутой системы.
3. Порядок преобразованного объекта равен числу интегральных составляющих в алгоритме управления и на единицу больше числа дифференциальных составляющих.
4. Использование принципа симметрии САУ позволяет преобразовывать траектории движения исходного линейного динамического объекта к форме Бруновского без использования сложных методов дифференциальной геометрии.

Список литературы: 1. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. I [Текст] / А.М. Летов // Автоматика и телемеханика том 21, выпуск 4, 1960.- С.436-441. 2. Садовой А.В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами [Текст] / А.В.Садовой, Б.В.Сухинин, Ю.В.Сохина – К.: ИСИМО, 1996. – 298с. 3. Ловчаков В.И. Оптимальное управление электротехническими объектами [Текст] / В.И.Ловчаков, Б.И.Сухинин, В.В.Сурков - Тула: Изд-во ТулГУ, 2004.-149с. 4. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: Механические и электромеханические системы [Текст] / А.А.Колесников, Г.Е.Веселов, А.Н.Попов, Ал.А.Колесников, Б.В.Топчиев, А.С.Мушенко, В.А.Кобзев -М.:Книжный дом «Либроком», 2013.-304с. 5. Сергиенко С.А. Особенности одноконтурной системы стабилизации скорости с нелинейной интегральной связью [Текст] / С.А.Сергиенко -Проблемы создания новых машин и технологий. Сб.научных трудов КГПУ: Выпуск 1/2001(10).- Кременчуг:КГПУ, 2001.-С.39-44. 6. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства [Текст] / Н.Т.Кузовков.-М.:Машиностроение, 1976.-184с. 7. Волянский Р.С. Синтез оптимальной системы управления с нелинейной активационной функцией [Текст] / Р.С.Волянский, А.В.Садовой // Электротехнические и компьютерные системы №15 (91), 2014. – С.69-71.

Bibliography (transliterated): 1. Letov A.M. Analiticheskoe konstruirovaniye reguljatorov. I [Teskt] / A.M. Letov //Avtomatika i telemehanika tom 21, vypusk 4, 1960.- S.436-441. 2. Sadovoi A.V. Sistemy optimal'nogo upravlenija precizionnymi jelektroprivodami [Tekst] / A.V.Sadovoj, B.V.Sukhinin, Ju.V.Sokhina – K.: ISIMO, 1996. – 298s. 3. Lovchakov V.I. Optimal'noe upravlenie jelektrotehnicheskimi ob'ektami [Tekst] / V.I.Lovchakov, B.I.Sukhinin, V.V.Surkov - Tula: Izd-vo TulGU, 2004.-149s. 4. Kolesnikov A.A. Sinergeticheskie metody upravlenija slozhnymi sistemami: Mehanicheskie i jelektromehaniicheskie sistemy [Tekst] / A.A.Kolesnikov, G.E.Veselov, A.N.Popov, Al.A.Kolesnikov, B.V.Topchiev, A.S.Mushenko, V.A.Kobzev -M.:Knizhnyj dom «Librokom», 2013.-304s. 5. Sergienko S.A. Osobennosti odnokonturnoj ssitemy stabilizacii skorosti s nelinejnoj integral'noj svjaz'ju [Tekst] / S.A.Sergienko -Problemy sozdaniya novyh mashin i tehnologij. Sb.nauchnyh trudov KGPU: Vypusk 1/2001(10).- Kremenuchug: KGPU, 2001.-S.39-44. 6. Kuzovkov N.T. Modal'noe upravlenie i nabljudajushhie ustrojstva [Tekst] / N.T.Kuzovkov.- M.:Mashinostroenie, 1976.-184s. 7. Voljanskiy R.S. Sintez optimal'noj sistemy upravlenija s nelinejnoj aktivacionnoj funkciej [Tekst] / R.S.Voljanskiy, A.V.Sadovoi// Jelektrotehnicheskije i komp'juternye sistemy №15 (91), 2014. – S.69-71.

Поступила 21.05.2017