

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

**Методические указания**  
**для практических занятий по теме:**  
**«ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.**  
**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ».**

по курсам «Теория электрических и электронных цепей» и  
«Электричество и магнетизм»  
для студентов АП факультета

Харьков  
НТУ «ХПИ»  
2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

**Методические указания**  
**для практических занятий по теме:**  
**«ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.**  
**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ».**

по курсам «Теория электрических и электронных цепей» и  
«Электричество и магнетизм»  
для студентов АП факультета

Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета,  
протокол №

Харьков  
НТУ «ХПИ»  
2015

Методические указания для практических занятий по теме: «Частотный метод анализа электрических цепей. Интегральное преобразование Фурье» по курсам «Теория электрических и электронных цепей» и «Электричество и магнетизм» : для студентов АП ф-та / сост.: М. М. Резинкина, О. Л. Резинкин, Е. В. Сосина. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2015. – 24 с.

Составители: Резинкина М.М., Резинкин О.Л., Сосина Е.В.

Рецензент      Б.И. Кубрик, канд.техн.наук, доц. каф. ТОЭ

Кафедра теоретических основ электротехники

## Введение

Одним из методов описания электрических процессов в линейных цепях является спектральный метод, предполагающий разложение сигнала на гармонические функции (гармоники), имеющие различную частоту, амплитуду и начальные фазы. Набор таких функций может образовывать непрерывный или дискретный частотный спектр. В первом случае для получения частотного спектра исходного сигнала используется интегральное преобразование Фурье.

**Частотным спектром сигнала** называют совокупность всех гармоник, которые в сумме дают исходный сигнал.

**Сигналом** называется изменяющаяся во времени физическая величина, с помощью которой передается некоторое сообщение. В роли электрического сигнала может выступать ток, напряжение, а также векторы электромагнитного поля.

Спектр единичного сигнала является сплошным. При этом частоты колебаний, на которые он может быть разложен, следуют друг за другом непрерывно, а амплитуда каждой гармоники бесконечно мала. Такое разложение сигнала производится с помощью **интегрального преобразования Фурье**.

Спектр сигналов описывают графически путем построения **амплитудно-частотного (АЧС)** и **фазочастотного (ФЧС)** спектров. Для сплошного спектра АЧС представляет собой зависимость от частоты ( $\omega$  или  $f$ ) модуля спектральной плотности. ФЧС представляет собой зависимость от частоты аргумента спектральной плотности.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

### 1.1. Частотный спектр непериодического сигнала (непрерывный спектр)

Рассмотрим одиночный импульс прямоугольной формы, полагая, что ноль оси времени совпадает с серединой импульса (рис. 1).

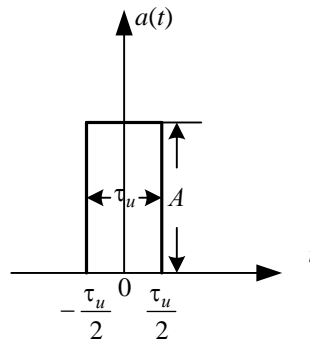


Рис. 1 – Одиночный прямоугольный импульс

Такой импульс можно рассматривать как периодическую последовательность импульсов с бесконечно большим периодом ( $T \rightarrow \infty$ ).

Тогда  $\Omega = 2\pi F = 2\pi \frac{1}{T} \rightarrow 0$  (где  $F$  - частота следования импульсов,  $k \cdot \Omega$  - частоты гармоник, в виде суммы которых представляется периодическая последовательность импульсов,  $k=1,2,\dots$ ). Разность частот соседних гармоник также будет стремиться к нулю:  $(k+1) \cdot \Omega - k\Omega = \Omega \rightarrow 0$ . Таким образом, набор частот спектра одиночного импульса является не дискретным, а сплошным и представляет собой все множество точек на оси частот. Т.е. дискретные частоты гармоник  $k\Omega$  переходят в непрерывную переменную частоту  $\omega$ .

Для определения частотного спектра непериодического сигнала используется так называемая **спектральная плотность** -  $S(j\omega)$ , выражения для которой соответствует прямому интегральному преобразованию Фурье:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

Спектральная плотность является комплексной функцией и может быть представлена в показательной форме:

$$S(j\omega) = S(\omega)e^{j\psi(\omega)},$$

где  $S(\omega) = |S(j\omega)|$  (модуль спектральной плотности) определяет амплитудно-частотный спектр (**АЧС**);  $\psi(\omega) = \arg\{S(j\omega)\}$  (фаза спектральной плотности) определяет фазочастотный спектр (**ФЧС**).

Графики АЧС и ФЧС представляют собой зависимости модуля и аргумента спектральной плотности от частоты  $\omega$  в  $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$  или  $f$  в Гц, кГц или МГц. Функция  $S(j\omega)$  рассчитывается с помощью (1). При этом для того, чтобы интеграл в правой части сходился, сигнал  $a(t)$  должен быть конечным.

Применяя обратное интегральное преобразование Фурье, по частотному спектру сигнала можно получить его временную развертку:

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

В случае дискретного частотного спектра аналогичное выражение имеет вид:

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_{mk} e^{j \text{sign} k \cdot \psi_k} e^{jk\Omega t}.$$

где  $S_{mk}$ ,  $\psi_k$  – амплитуда и фаза  $k$ -ой гармоники.

На практике удобнее работать не с рядами, а с интегралами. Поэтому частотный спектр периодической последовательности импульсов проще получить при использовании выражения для спектральной плотности одиночного импульса (1). Из сравнения (1) с выражением для амплитуды  $k$ -ой гармоники при разложении сигнала в ряд Фурье:

$$S_{mk} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t)e^{-jk\Omega t} dt \quad (3)$$

видно, что (1) отличается от (3) наличием множителя  $1/T$  и записью частоты

в виде  $k\Omega$ , а не  $\omega$ . Отсюда следует, что для периодической последовательности импульсов комплексная амплитуда ее  $k$ -ой гармоники может быть получена из выражения для спектральной плотности для такого же одиночного импульса путем деления ее на  $T$  (период импульсов в периодической последовательности) и замены  $\omega$  на  $k\Omega$ :

$$\mathcal{S}_{mk} \rightarrow \frac{1}{T} S(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow k\Omega}. \quad (4)$$

Возможен и обратный переход:

$$S(j\omega) \rightarrow T \mathcal{S}_{mk} \Big|_{k\Omega \rightarrow \omega}. \quad (5)$$

## 1.2 Основные теоремы преобразования Фурье

Соответствие между  $S(j\omega)$  - изображением по Фурье сигнала  $a(t)$  - будем обозначать символом  $\xrightarrow{F}$

$$a(t) \xrightarrow{F} S(j\omega). \quad (6)$$

### Теорема аддитивности

Изображением суммы оригиналов является сумма их изображений:

$$\sum_{i=1}^n a_i(t) \xrightarrow{F} \sum_{i=1}^n S_i(j\omega). \quad (7)$$

### Теорема однородности

Изображением произведения оригинала и постоянного множителя является произведение изображения оригинала и постоянного множителя:

$$c \cdot a(t) \xrightarrow{F} c \cdot S(j\omega). \quad (8)$$

### Теорема дифференцирования

Операция дифференцирования оригинала соответствует умножению его изображения на  $j\omega$ :

$$a'(t) \xrightarrow{F} j\omega \cdot S(j\omega). \quad (9)$$

Для доказательства (9) следует взять по частям интеграл, представляющий собой изображение по Фурье функции  $a'(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} a'(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = a(t) \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-j\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= [a(\infty) - a(-\infty)] \cdot e^{-j\omega t} + j\omega \cdot S(j\omega) = j\omega \cdot S(j\omega),$$

так как  $a(\infty) = a(-\infty) = 0$  (условие конечности функции  $a(t)$  и сходимости интеграла Фурье).

### Теорема интегрирования

Операция интегрирования оригинала соответствует делению его изображения на  $j\omega$ :

$$\int_{-\infty}^t a(t) dt \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} \cdot S(j\omega). \quad (10)$$

Теорема интегрирования может рассматриваться как обратная теореме дифференцирования.

### Теорема запаздывания

Сдвигу оригинала во времени на  $t_0$  соответствует умножение спектральной плотности на множитель  $e^{j\omega t_0}$ . Сдвиг вправо соответствует множителю  $e^{-j\omega t_0}$  (функция  $a(t - t_0)$ ), сдвиг влево - множителю  $e^{j\omega t_0}$  (функция  $a(t + t_0)$ ). При таких сдвигах модуль спектральной плотности (АЧС) не меняется, а к ее аргументу (ФЧС) добавляется слагаемое  $\mu \omega t_0 = \mu 2\pi t_0 f$ :

$$a(t \pm t_0) \xrightarrow{F} S(j\omega) \cdot e^{\pm j\omega t_0}. \quad (11)$$

Доказательство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t \pm t_0) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} a(t \pm t_0) \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{\pm j\omega t_0} \cdot e^{\mp j\omega t_0} dt = e^{\pm j\omega t_0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} a(t \pm t_0) \cdot e^{-j\omega(t \mp t_0)} dt = e^{\pm j\omega t_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) \cdot e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{\pm j\omega t_0} \cdot S(j\omega).$$

При доказательстве использована замена  $t \pm t_0 = \tau$  и  $dt = d\tau$ .

### Теорема смещения

Умножению оригинала на  $e^{\pm j\omega_0 t}$  соответствует смещение изображения по



оси частот на  $\mu \omega_0$ :

$$a(t) \cdot e^{\pm j\omega_0 t} \xrightarrow{F} S[j(\omega \mu \omega_0)]. \quad (12)$$

Доказательство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega_0 t} a(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot e^{-j(\omega \mu \omega_0)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot e^{-j\omega' t} dt = S(j\omega') = S[j(\omega \mu \omega_0)].$$

Это означает, что при умножении оригинала на  $e^{\pm j\omega_0 t}$  спектр сигнала, не меняясь, смещается по оси абсцисс относительно ее нулевой точки на  $\omega_0$  вправо ( $\omega' = \omega - \omega_0 = 0$  при  $\omega = \omega_0$ ) или влево ( $\omega' = \omega + \omega_0 = 0$  при  $\omega = -\omega_0$ ).

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

### 2.1 Частотные спектры дельта-функции и единичной функции

Единичная функция  $1(t)$  определяется следующим образом:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

Дельта-функция Дирака определяется через единичную функцию:

$$\delta(t) = 1'(t);$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

Площадь дельта-функции по бесконечному интервалу определяется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} 1'(t) dt = 1(t) \Big|_{-0}^{+0} = 1 - 0 = 1. \quad (13)$$

При сдвиге фронта единичной функции относительно нулевой точки оси времени единичная функция называется запаздывающей и обозначается  $1(t - t_0)$  (сдвиг вправо на  $t_0$ ) или  $1(t + t_0)$  (сдвиг влево на  $t_0$ ):

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \\ 1 & \text{при } t > t_0 \end{cases} \quad 1(t + t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -t_0 \\ 1 & \text{при } t > -t_0 \end{cases}$$

Аналогично вводится понятие запаздывающей дельта-функции  $\delta(t - t_0) = 1'(t - t_0)$  и  $\delta(t + t_0) = 1'(t + t_0)$ :

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \\ \infty & \text{при } t = t_0 \\ 0 & \text{при } t > t_0 \end{cases} \quad \delta(t + t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -t_0 \\ \infty & \text{при } t = -t_0 \\ 0 & \text{при } t > -t_0 \end{cases}$$

Для запаздывающих функций имеет место выражение, аналогичное (13),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t \pm t_0) dt = \int_{\mu t_0 - 0}^{\mu t_0 + 0} \delta(t \pm t_0) dt = 1. \quad (14)$$

### Фильтрующее свойство дельта-функции

Фильтрующее свойство дельта-функции заключается в том, что интеграл от любой функции  $f(t)$ , умноженной на  $\delta(t \pm t_0)$  и взятый в любых пределах, внутри которых находится  $\pm t_0$ , равен  $f(\pm t_0)$ :

$$\int_A^B f(t) \cdot \delta(t \pm t_0) dt = \int_{\pm t_0 - 0}^{\pm t_0 + 0} f(\pm t_0) \cdot \delta(t \pm t_0) dt = f(\pm t_0) \cdot \int_{\pm t_0 - 0}^{\pm t_0 + 0} \delta(t \pm t_0) dt = f(\pm t_0). \quad (15)$$

Доказательство этого свойства основано на том обстоятельстве, что  $\delta(t \pm t_0)$  равно нулю при всех аргументах, кроме  $t = \pm t_0$ . Поэтому подынтегральное выражение отлично от нуля только при  $t = \pm t_0$ . Вынеся константу  $f(\pm t_0)$  из-под знака интеграла и учтя (14), получим (15).

Применив к  $\delta$ -функции преобразование Фурье, получим выражение для ее спектральной плотности:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-0}^0 \delta(t) \cdot e^{-j\omega \cdot 0} \cdot dt = \int_{-0}^0 \delta(t) \cdot 1 \cdot dt = 1. \quad (16)$$

Амплитудно-частотный спектр  $\delta$ -функции:

$$S(\omega) = 1.$$

Фазочастотный спектр  $\delta$ -функции:

$$\varphi(\omega) = 0.$$

Частотный спектр запаздывающей дельта-функции  $\delta(t \pm t_0)$  может быть получен по теореме запаздывания (см. (11)):

$$\delta(t \mu t_0) \xrightarrow{F} 1 \cdot e^{\pm j\omega t_0} = e^{\pm j\omega t_0}.$$

АЧС при запаздывании остается неизменным:  $S(\omega) = 1$ , а ФЧС меняется прямо пропорционально частоте с коэффициентом пропорциональности  $\mu \arctg t_0$  (см. рис. 3):

$$\varphi(\omega) = \mu t_0 \omega = \mu 2\pi t_0 f. \quad (17)$$

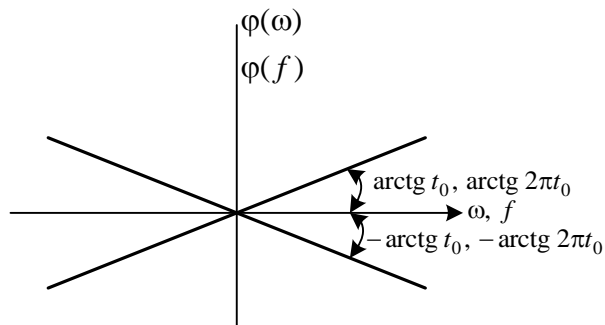


Рис. 2 – ФЧС запаздывающей дельта-функции.

Учтя, что  $\delta(t) = 1'(t)$ , а, значит,  $1(t) = \int \delta(t) dt$ , применяя теорему интегрирования (см. (10)), по спектру дельта-функции (16) можно получить спектральную плотность единичной функции  $1(t)$ :

$$S(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega}. \quad (18)$$

Тогда АЧС единичной функции  $1(t)$ :

$$S(\omega) = \frac{1}{|\omega|}, \quad (19)$$

а ФЧС единичной функции  $1(t)$ :

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{при } \omega > 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{при } \omega < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Графики АЧС и ФЧС единичной функции  $1(t)$  приведены на рис. 3.

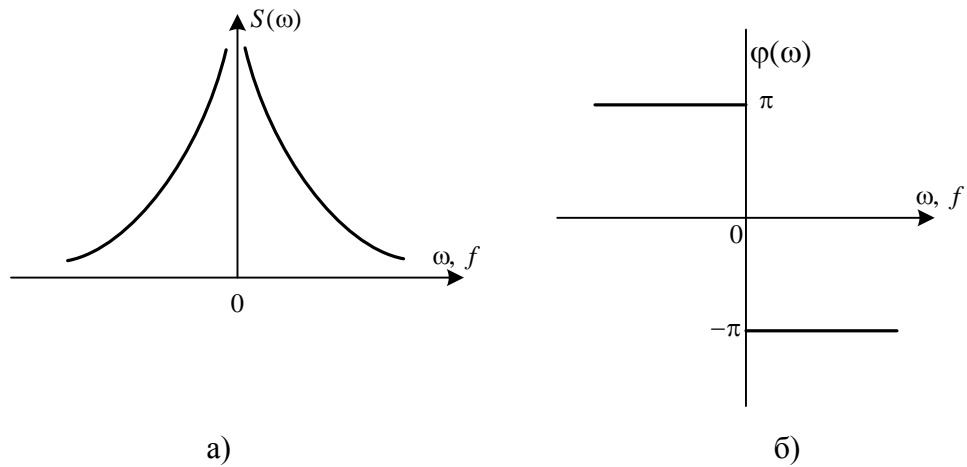


Рис. 3 – АЧС (а) и ФЧС (б) единичной функции.

**Функцией включения** называют единичную функцию, умноженную на постоянный множитель:  $A \cdot 1(t)$ . По теореме однородности (см. (8)) спектральная плотность функции включения имеет вид:

$$S(j\omega) = A \frac{1}{j\omega} = -j \frac{A}{\omega}. \quad (21)$$

При сдвиге единичной функции (и функции включения) вправо на  $(-t_0)$  или влево на  $(+t_0)$  ее АЧС не меняется, а к ФЧС добавляется слагаемое  $(-\omega t_0)$  или  $(+\omega t_0)$ . В первом случае в области положительных частот  $\varphi(\omega) = -\pi/2 - \omega t_0$  ( $\omega > 0$ ), а в области отрицательных частот  $\varphi(\omega) = \pi/2 + \omega t_0$  ( $\omega < 0$ ). Во втором случае соответственно:  $\varphi(\omega) = -\pi/2 + \omega t_0$  ( $\omega > 0$ ) и  $\varphi(\omega) = +\pi/2 - \omega t_0$  ( $\omega < 0$ ). (см. рис. 4)

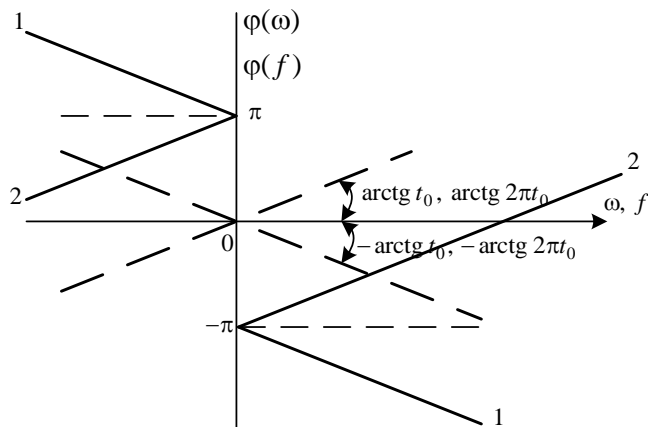


Рис. 4 – ФЧС запаздывающей единичной функции и запаздывающей функции включения: 1 – для  $1(t - t_0)$ , 2 – для  $1(t + t_0)$

## 2.2 Спектр одиночного прямоугольного импульса

Представим прямоугольный импульс  $a(t)$ , имеющий высоту  $A$  и длительность  $\tau_u$ , как разность двух функций включения (рис. 5):

$$a(t) = A \cdot 1\left(t + \frac{\tau_u}{2}\right) - A \cdot 1\left(t - \frac{\tau_u}{2}\right). \quad (22)$$

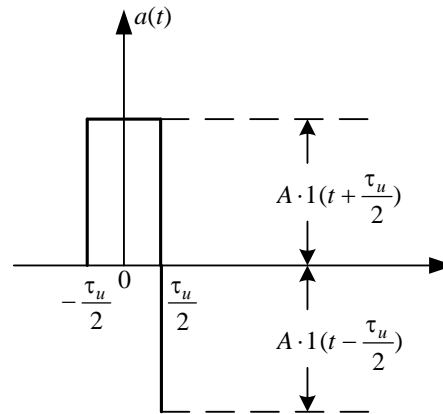


Рис. 5 – Прямоугольный импульс как разность двух функций включения

Тогда  $a(t)$  можно представить в виде:

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -\tau_u/2 \\ A \cdot 1\left(t + \frac{\tau_u}{2}\right) & \text{при } -\tau_u/2 < t < \tau_u/2 \\ 0 & \text{при } t > \tau_u/2 \end{cases}$$

Для получения спектральной плотности прямоугольного импульса используем выражение (21) для спектральной плотности функции включения и теорему запаздывания (см. (11)). Спектральная плотность функции включения, сдвинутая влево на  $\tau_u/2$ , равна  $\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega\tau_u/2}$ , а сдвинутая вправо

на  $\tau_u/2$  равна  $\frac{A}{j\omega} e^{j\omega\tau_u/2}$ :

$$a(t) \xrightarrow{f} \frac{A}{j\omega} e^{j\omega\tau_u/2} - \frac{A}{j\omega} e^{-j\omega\tau_u/2} = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\tau_u/2} - e^{-j\omega\tau_u/2}) = \frac{A}{j\omega} \cdot j2 \cdot \sin \omega \frac{\tau_u}{2}.$$

Сократив на  $j$  и домножив числитель и знаменатель последнего выражения на  $\tau_u$ , окончательно получим:

$$a(t) \xrightarrow{f} \frac{A\tau_u}{2} \frac{\sin \frac{\omega\tau_u}{2}}{\frac{\omega\tau_u}{2}}. \quad (23 \text{ а})$$

Обозначив  $\omega\tau_u/2 = x$ , запишем выражение для спектральной плотности прямоугольного импульса в виде:

$$S(j\omega) = A\tau_u \frac{\sin x}{x}, \quad (23 \text{ б})$$

где  $x = \omega\tau_u/2$ ;  $A\tau_u$  – площадь импульса.

Построим график функции  $\sin x/x$ , учтя, что неопределенность типа  $0/0$ , получаемая при  $x \rightarrow 0$  ( $\sin x/x|_{x=0} \rightarrow 0/0$ ), может быть раскрыта по правилу Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Функция  $\sin x/x$  равна нулю при  $\sin x = 0$  (за исключением точки  $x=0$ ), что соответствует  $x_0 = n\pi$ , где  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Таким образом, график данной функции, начиная с  $x = \pi$ , представляет собой синусоиду с амплитудой, уменьшающейся по мере роста  $x$  как  $\frac{1}{x}$  (см. рис. 6).

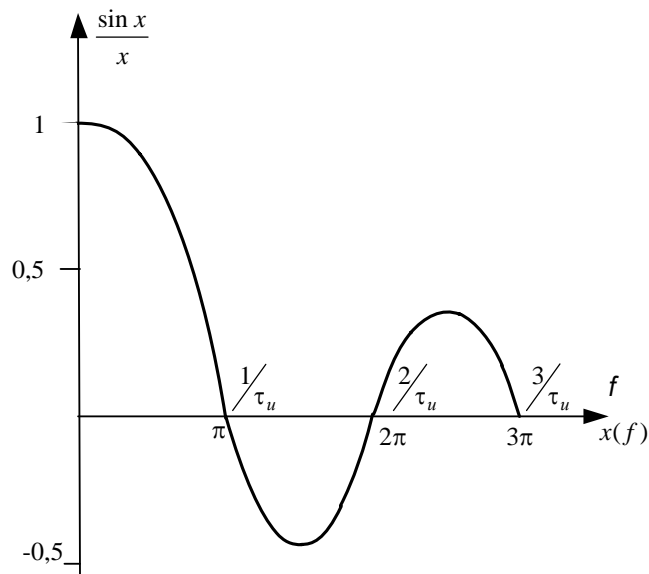


Рис. 6 – График функции  $\frac{\sin x}{x}$

Первая нулевая точка функции соответствует частоте  $f_{01}$ , которая определяется из условия:  $\omega_{01}\tau_u / 2 = 2\pi f_{01}\tau_u / 2 = \pi$ , откуда  $f_{01} = 1/\tau_u$ . Частоты следующих нулевых точек:  $f_{02} = 2/\tau_u$ ,  $f_{03} = 3/\tau_u$  и т.д.

**Лепестком спектра** называют участок спектра, ограниченный двумя соседними нулевыми точками, за исключением первого лепестка, левой границей которого является не нулевая точка, а начало оси частот. Первый лепесток имеет границы по частоте от 0 до  $1/\tau_u$ , второй – от  $1/\tau_u$  до  $2/\tau_u$ , третий – от  $2/\tau_u$  до  $3/\tau_u$  и т.д.

АЧС прямоугольного импульса:

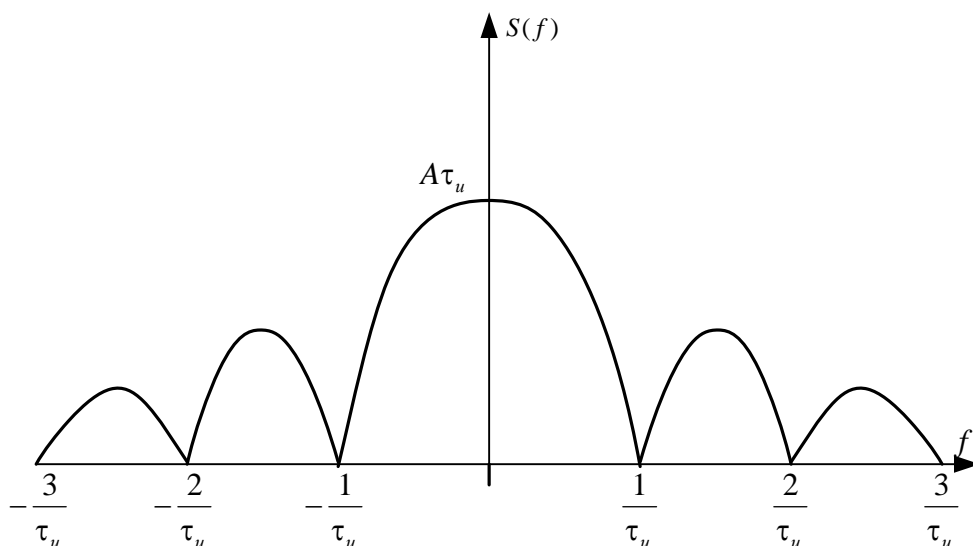
$$S(\omega) = A\tau_u \cdot \frac{|\sin x|}{x}, \quad (24)$$

ФЧС прямоугольного импульса:

$$\varphi(\omega) = (n-1)\pi, \quad (25)$$

где  $n$  – номер лепестка, причем слагаемое  $2\pi n$  отбрасывается, а в области отрицательных частот  $n < 0$ .

На рис. 7 показаны АЧС и ФЧС прямоугольного импульса, середина которого совпадает с нулевой точкой оси времени.



а)

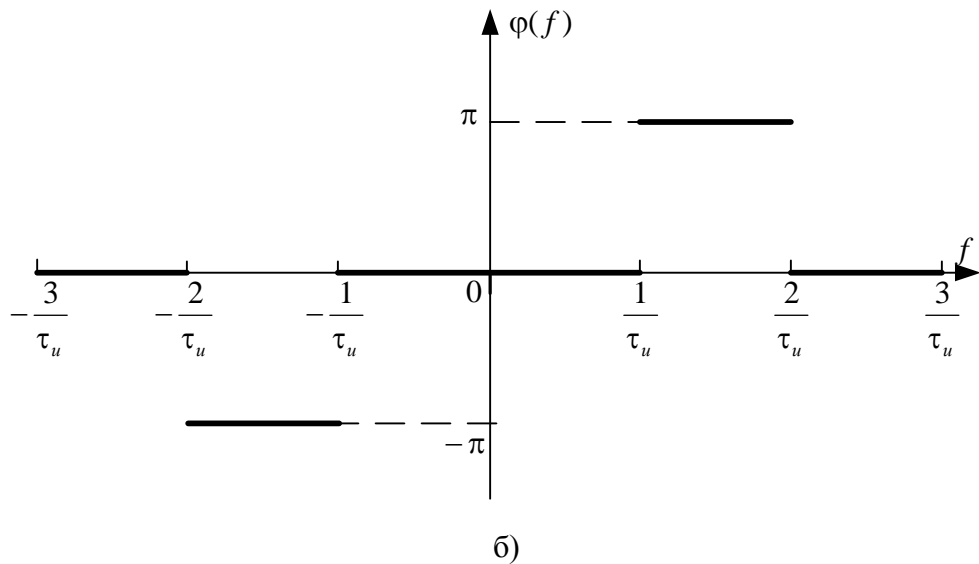


Рис. 7 – АЧС (а) и ФЧС(б) прямоугольного импульса.

Для прямоугольного импульса  $a(t-t_0)$ , когда импульс  $a(t)$  сдвинут вправо на  $t_0$  (см. рис. 8), его АЧС не меняется, а к ФЧС прибавляется слагаемое  $(-\omega t_0)$ :

$$\varphi(\omega) = (n-1)\pi - \omega t_0. \quad (26 \text{ а})$$

При сдвиге импульса влево второе слагаемое в (26 а) имеет знак плюс:

$$\varphi(\omega) = (n-1)\pi + \omega t_0. \quad (26 \text{ б})$$

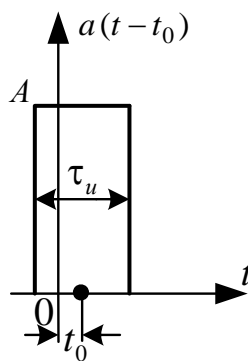


Рис. 8 – Прямоугольный импульс, сдвинутый вправо на  $t_0$

На рис. 9 показаны ФЧС для импульса  $a(t-t_0)$  - 1-1 и импульса  $a(t+t_0)$  - 2-2.  
- 2-2.



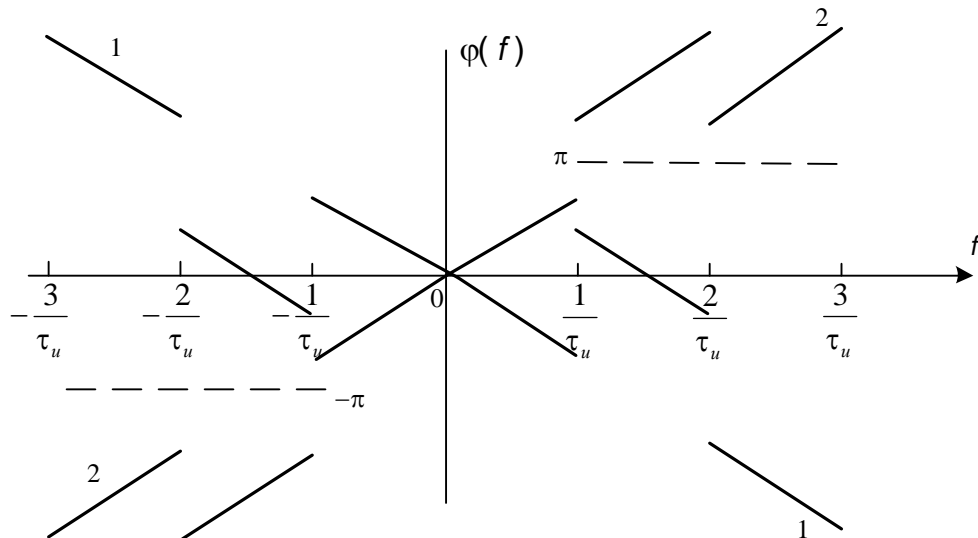


Рис. 9 – ФЧС прямоугольного импульса, сдвинутого вправо (1-1) или влево (2-2)

Построение графиков ФЧС (см. (26 а, б)) происходит следующим образом. При нечетных  $n$  (промежутки на оси  $f$  от 0 до  $1/\tau_u$ , от  $2/\tau_u$  до  $3/\tau_u$  и т.д.) из-за того, что слагаемое  $2\pi n$  отбрасывается,  $\varphi(\omega)$  имеет вид  $\varphi(\omega) = \mu\omega t_0$ . При четных  $n$  (промежутки на оси  $f$  от  $1/\tau_u$  до  $2/\tau_u$ , от  $3/\tau_u$  до  $4/\tau_u$  и т.д.) из-за того, что слагаемое  $2\pi n$  отбрасывается,  $\varphi(\omega)$  имеет вид  $\varphi(\omega) = \text{sign}(\omega) \cdot \pi \mu\omega t_0$  (где  $\text{sign}(\omega)$  – знак частоты), т.е. соответствующие участки прямой  $\varphi(\omega) = \mu\omega t_0$  в этих диапазонах частоты оказываются смещенными вниз или вверх на величину  $\pi$ .

### ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

#### 3.1 Ширина сплошного частотного спектра

Для оценки энергетических параметров непериодического сигнала со сплошным спектром, в отличие от периодического сигнала, используется не мощность, а энергия. Ширина спектра такого сигнала определяется как область частот, в которой сосредоточено 90 % или 95 % энергии сигнала. Выражение для энергии сигнала получают с помощью теоремы Релея – равенства Ляпунова-Парсеваля для интеграла Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} |S(jf)|^2 df. \quad (27)$$

Зависимость  $|S(jf)|^2 = S^2(f)$  или  $|S(j\omega)|^2 = S^2(\omega)$  называют **энергетическим спектром сигнала**. Для получения ширины спектра сигнала  $f_1$ , соответствующей определенной части энергии сигнала, проинтегрируем (27) не до  $\infty$ , а до  $f_1$ . Обозначим через  $\mathcal{E}\%$  отношение этой энергии к полной энергии сигнала. Тогда:

$$\mathcal{E}\% = \frac{\int_0^{f_1} S^2(f) df}{\int_0^{\infty} S^2(f) df}. \quad (28)$$

Запишем  $S^2(f)$  для прямоугольного импульса высотой  $A$  и длительностью  $\tau_u$ , используя его АЧС (см. (24)):

$$S^2(f) = (A\tau_u)^2 \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad (29)$$

где  $x = \frac{\omega\tau_u}{2} = \frac{2\pi f\tau_u}{2} = \pi \frac{f}{f_{01}}, \quad f_{01} = \frac{1}{\tau_u}.$

На рис. рис. 10 показана зависимость, построенная при подстановке (29) в (28).

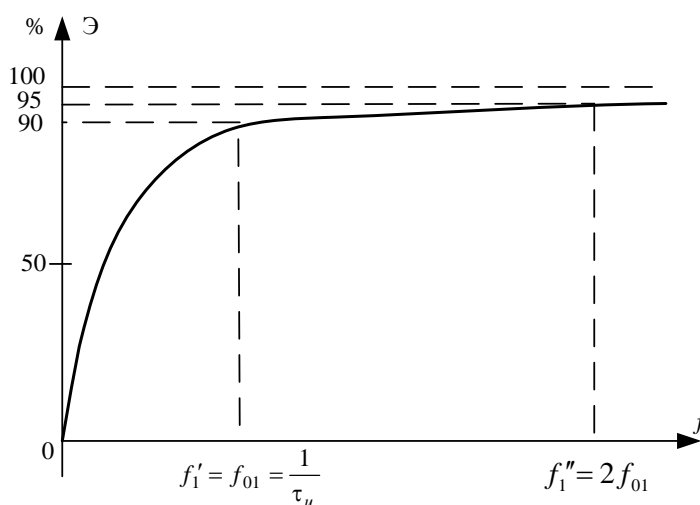


Рис. 10 – Энергетический спектр прямоугольного импульса

С помощью (28) и (29) можно показать, что для прямоугольного импульса 90.2 % энергии всего сигнала сосредоточено в пределах первого лепестка:

$$f_1' = 1/\tau_u = f_{01}, \quad (30)$$

в пределах первого и второго лепестков сосредоточено 95 % энергии сигнала:

$$f_1'' = 2/\tau_u. \quad (31)$$

Как видно из (30), (31), чем больше длительность импульса, тем меньше ширина его спектра и наоборот. Так, спектр дельта-функции, у которой  $\tau_u \rightarrow 0$ , имеет бесконечную ширину  $\Delta f_c \rightarrow \infty$ .

### 3.2 Понятие о неискажающей цепи

При прохождении сигнала через электрическую цепь его форма может меняться во времени, возможно также, что сигнал будет проходить без искажения (сохранять форму). Считается, что сигнал проходит без искажения, если он затухает (или усиливается) и отстает во времени, но его длительность не меняется, а изменение всех ординат временного графика происходит в одно и то же число раз ( $k_0$ ). **Неискажающей цепью** называется цепь, через которую сигнал проходит без искажений.

На рис. 11 представлены входной  $x(t)$  и выходной  $y(t)$  сигналы в случае неискажающей цепи (затухание  $k_0 \sim 0.8$ , отставание равно  $t_0$ ).

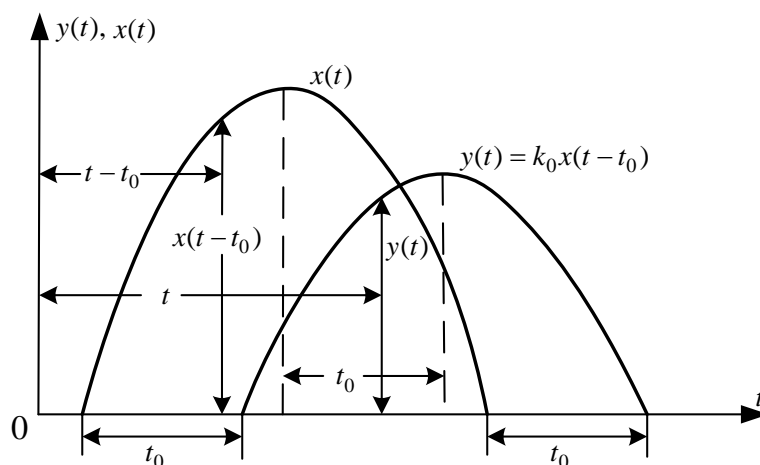


Рис. 11 – Прохождение сигнала через неискажающую цепь

При этом связь между входным и выходным сигналом имеет вид:

$$y(t) = \kappa_0 \cdot x(t - t_0). \quad (32)$$

При переходе от выходного  $y(t)$  и входного  $x(t - t_0)$  сигналов (см. (32)) к их изображениям по Фурье используем теорему запаздывания (см. (11)):

$$y(t) \xrightarrow{F} k_0 \cdot x(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0} = k_0 \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot x(j\omega), \quad (33)$$

Из выражения, связывающего выходной и входной сигнал:

$$Y(j\omega) = K(j\omega) \cdot X(j\omega), \quad (34)$$

следует, что комплексная передаточная функция  $K(j\omega)$  в данном случае определяется как

$$K(j\omega) = \kappa_0 e^{-j\omega t_0}. \quad (35)$$

Т.е. АЧХ для неискажающей цепи имеет вид:

$$K(\omega) = \kappa_0, \quad (36)$$

а ее ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \omega t_0. \quad (37)$$

Графики АЧХ и ФЧХ для данного случая показаны на рис. 12.

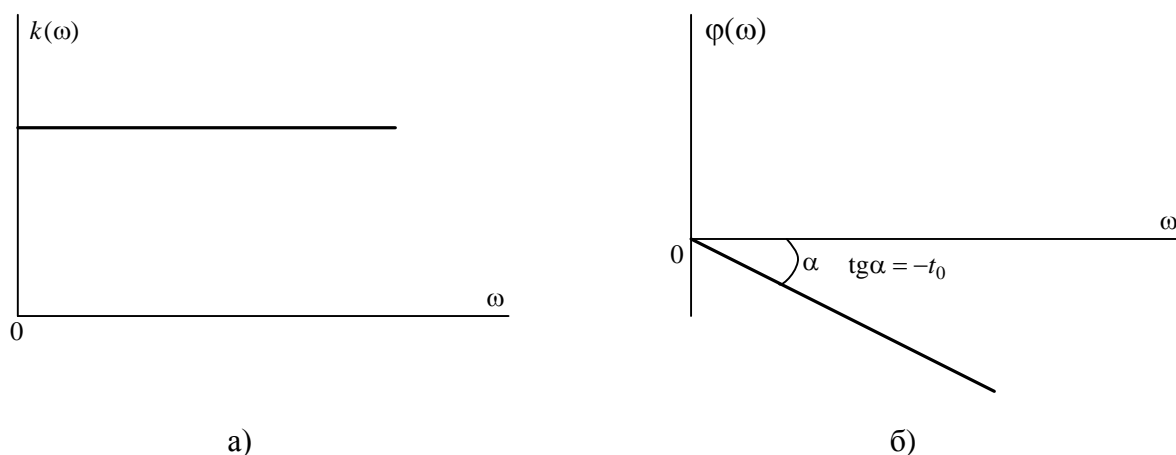


Рис. 12 – АЧХ (а) и ФЧХ (б) неискажающей цепи

Примером неискажающей цепи может служить любое усилительное звено, в частности омический делитель напряжения. Если входной сигнал подается на последовательно соединенные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , а выходной сигнал снимается с одного из сопротивлений (например,  $R_1$ ), то

АЧХ и ФЧХ имеют вид:

$$K(\omega) = \kappa_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2};$$

$$\varphi(\omega) = 0, \text{ (поскольку } t_0 = 0 \text{)}.$$

В реальных условиях неискажающая цепь должна иметь АЧХ и ФЧХ, соответствующие соотношениям (36), (37) и рис. 12, только в пределах ширины спектра.

### ЗАДАЧИ.

#### Задача 1.

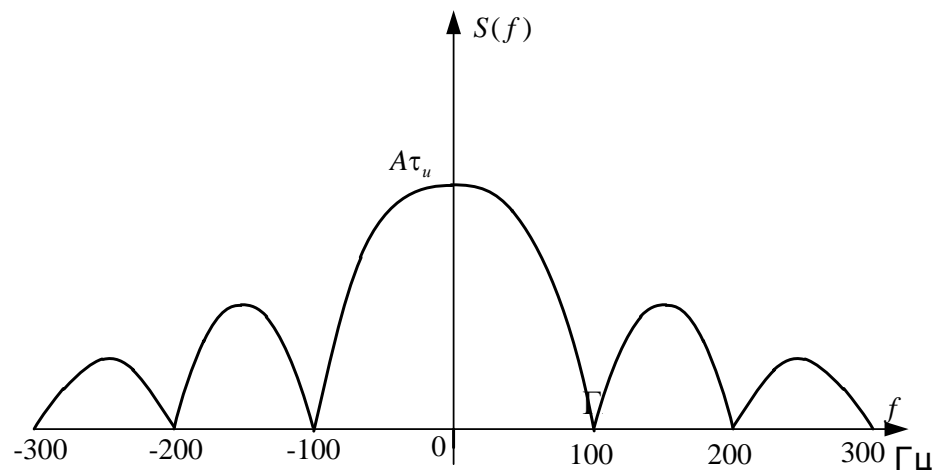
Построить амплитудно-частотный (АЧС) и фазочастотный (ФЧС) спектры прямоугольного импульса тока, у которого высота импульса:  $A=10\text{А}$ , ширина:  $\tau_u = 10\text{мкс}$ , а середина импульса совпадает с точкой  $t=0$  ( $t_0=0$ ).

#### Решение.

$$S(\omega) = A\tau_u \cdot \frac{|\sin x|}{x}, \quad \varphi(\omega) = (n-1)\pi, \quad x = \frac{\omega\tau_u}{2}, \quad A\tau_u = 10^{-4}\text{А}\cdot\text{с}.$$

Граница первого лепестка (ширина лепестка):

$$f_{01} = \frac{1}{\tau_u} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}} = 10^5 \text{Гц} = 100 \text{кГц}.$$



a)

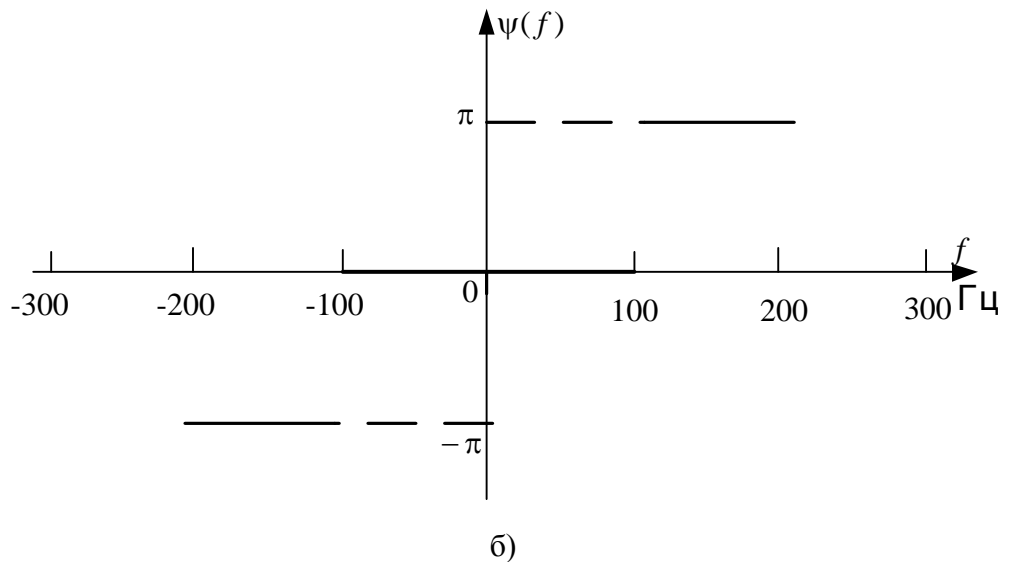


Рис. 13 – АЧС (а) и ФЧС (б) прямоугольного импульса при  $t_0=0$

### Задача 2.

Найти частотный спектр одиночного прямоугольного импульса при  $A=10$  В,  $\tau_u=50$  мкс,  $t_0=20$  мкс.

### Решение.

В данном случае АЧС равен:

$$S(\omega) = A\tau_u \cdot \frac{|\sin x|}{x},$$

где  $A\tau_u = 10 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-4}$  В·с.

Правая граница первого лепестка (первая нулевая точка):

$$f_{01} = \frac{1}{\tau_u} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^4 \text{ Гц} = 20 \text{ кГц}$$

равна ширине лепестка.

ФЧС записывается в виде:

$$\varphi(\omega) = (n-1)\pi - \omega t_0: \varphi(\omega) = (n-1)\pi - 2\pi f \cdot 20 \cdot 10^{-6} = (n-1)\pi - 4\pi \cdot 10^{-5} f,$$

где  $f$  [Гц]

или

$$\varphi(\omega) = (n-1)\pi - 4\pi \cdot 10^{-2} f,$$

где  $f$  [кГц].

Второе слагаемое последнего выражения является уравнением прямой, проходящей через начало координат. Эту прямую можно построить по двум точкам. Одна точка:  $\varphi=0$  при  $f=0$ , вторая – например, значение фазы в первой нулевой точке зависимости  $S(j\omega)$ :  $\varphi=\pi$  при  $f=1/\tau_u=20\text{кГц}$ .

Графики АЧС и ФЧС представлены на рис. 14. Построение графика ФЧС происходит следующим образом. При нечетных  $n$  (промежутки на оси  $f$  от 0 до  $1/\tau_u$ , от  $2/\tau_u$  до  $3/\tau_u$  и т.д.) из-за того, что слагаемое  $2\pi n$  отбрасывается,  $\varphi(\omega)$  имеет вид  $\varphi(\omega)=-\omega t_0$ . При четных  $n$  (промежутки на оси  $f$  от  $1/\tau_u$  до  $2/\tau_u$ , от  $3/\tau_u$  до  $4/\tau_u$  и т.д.) из-за того, что слагаемое  $2\pi n$  отбрасывается,  $\varphi(\omega)$  имеет вид  $\varphi(\omega)=\text{sign}(\omega)\cdot\pi-\omega t_0$  (где  $\text{sign}(\omega)$  – знак частоты), т.е. соответствующие участки прямой  $\varphi(\omega)=-\omega t_0$  в этих диапазонах частоты оказываются смещенными вверх (для положительных частот) или вниз (для отрицательных частот) на величину  $\pi$ .

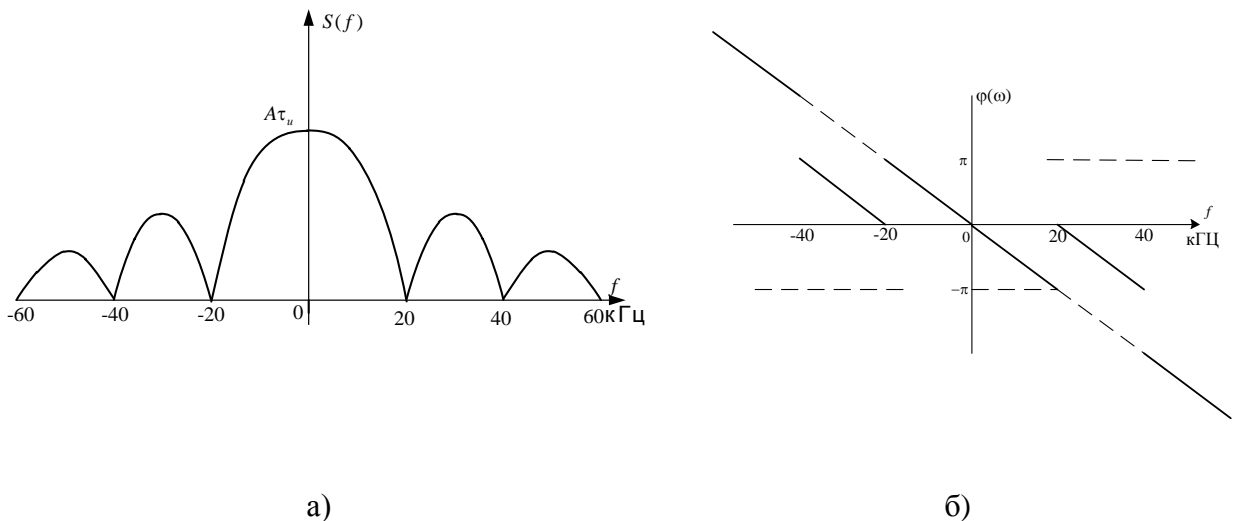


Рис. 14 – ФЧС прямоугольного импульса, сдвинутого вправо

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Ч. 1. – М.: Энергия, 1975. – 536 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи. – М.: Высшая школа, 1984. – 559 с.
3. Колобков Д.С. Частотные спектры сигналов. Учебное пособие. Харьков, УЗПИ, 1985, 103 с.
4. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1988.
5. Васильев Д.В. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1982. - 528 с.
6. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. - М.: Мир, 1983.
7. Глебович Г.В. Переходные процессы и основы синтеза линейных радиотехнических цепей. Лекции по курсу "Основы теории цепей". Горький – 1968.



## СОДЕРЖАНИЕ:

Введение.....	3
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1.....	4
1.1 Частотный спектр непериодического сигнала (непрерывный спектр).....	4
1.2 Основные теоремы преобразования Фурье. ....	6
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2.....	8
2.1 Частотные спектры дельта-функции и единичной функции.....	8
2.2 Спектр одиночного прямоугольного импульса.....	12
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3.....	16
3.1 Ширина сплошного частотного спектра.....	16
3.2 Понятие о неискажающей цепи.....	18
ЗАДАЧИ.....	20
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	23

Навчальне видання

Методичні вказівки

для практичних занять за темою:

«ЧАСТОТНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ. ІНТЕГРАЛЬНЕ  
ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є».

за курсами «Теорія електричних та електронних кіл» та

«Электрика і магнетизм»

для студентів АП факультету

Російською мовою

Укладачі: Резинкіна М.М., Резинкін О.Л., Сосіна О.В.

Відповідальний за випуск: Сосіна О.В.

Роботу до видання рекомендував А.М. Борисенко

В авторській редакції

План 2015р, поз.1

Підп. До друку 2015р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.

Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк арк. Наклад 55 прим.

Зам № . Ціна договірна.

---

Віддруковано ФОП Андреев К.В.

61166, Харків, просп. Леніна, 14, тел. 757-63-27

Свідоцтво про державну реєстрацію №24800170000045020 від 30.05.2003