

В. В. ЗАМАРУЕВ, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПИ».

ОГРАНИЧЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КОТЕЛЬНИКОВА-ШЕННОНА О ВЫБОРКАХ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СИЛОВЫМИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Введение. Расширение функциональных возможностей электронных устройств, применяемых во всех отраслях промышленности и бытовых электрических устройствах, и повышение эффективности их работы неразрывно связано с применением цифровых систем управления (ЦСУ), использующих цифровую обработку сигналов (ЦОС).

Одной из основных теорем, лежащих в основе ЦОС и построения ЦСУ, является теорема Котельникова. Обычно, под термином «теорема Котельникова» имеют ввиду вторую из семи теорем работы [1] – «Любую функцию $f(t)$, состоящую из частот от 0 до f_c , можно непрерывно передавать с любой точностью при помощи чисел, следующих друг за другом через $1/(2f_c)$ секунд». Аналогичная теорема была сформулирована Шенноном [2]: «Theorem 1: If a function $f(t)$ contains no frequencies higher than W cps, it is completely determined by giving its ordinates at a series of points spaced $1/(2W)$ seconds apart».

В настоящее время эти теоремы известны под названиями теорем Котельникова, Котельникова–Шеннона, Найквиста–Шеннона либо Котельникова–Найквиста–Шеннона. В статье будет использоваться название «теорема Котельникова–Шеннона».

Теорема Котельникова–Шеннона была сформулирована применительно к передаче информации на расстояние – коммуникационным услугам. В этом случае пользователей интересует амплитуда передаваемого сигнала, что обычно и демонстрируется при графическом пояснении теоремы Котельникова–Шеннона [3] (Рис. 1). В этом случае фазный сдвиг выборок относительно передаваемого сигнала равен нулю.

Широкое применение ЦОС – от анализа видеоизображения до ЦСУ бытовыми приборами и интернета вещей (Internet of Things, IoT) показало, что применение теоремы Котельникова–Шеннона в ряде случаев имеет ограничения [4, 5], что связано с неопределенностью фазы последовательности выборок относительно высших гармоник и т.д. Разработчики стараются обеспечить минимальную частоту дискретизации входных сигналов, что снижает требования к аппаратной части ЦСУ. При этом желательно получить максимально возможную ширину спектра обрабатываемых гармоник и высокую скорость их идентификации, для чего используют идентификацию всех гармоник вплоть до составляющих с максимальной частотой f_c в соответствии с теоремой Котельникова–Шеннона с временем идентификации – один период. Однако при идентификации и восстановлении составляющих с частотой f_c возникают проблемы, связанные с работой на максимальной – критической частоте, которая совпадает с частотой Найквиста.

Постановка задачи. В этой статье рассматриваются ограничения, накладываемые на применение теоремы Котельникова–Шеннона применительно к идентификации и восстановлению гармоник с частотой f_c с произвольной фазой последовательности выборок относительно сигнала. Предполагается идентификация сигнала за один период его повторения. Данные ограничения должны быть учтены при разработке цифровых систем управления силовыми преобразователями, активными фильтрами и др.

Идентификация и восстановление сигнала. Передача сигнала при помощи выборок. Рассмотрим передачу сигнала $G(t)$. Последовательность выборок значений сигнала следует с частотой f_s и нулевым фазным сдвигом относительно начала координат (Рис. 2 а). Максимальная частота гармоник (частотных составляющих) f_c передаваемого сигнала $G(t)$ удовлетворяет требованиям теоремы Котельникова–Шеннона (1).

$$f_c \leq 0.5 \cdot f_s, \quad (1)$$

где f_s – частота дискретизации.

Рассмотрим передачу сигнала на критической частоте. Предположим, что сигнал $G(t)$ – гармонический сигнал с частотой f_c

$$f_c = 0.5 \cdot f_s, \quad (2)$$

$$G(t) = A \cos(2\pi f_c t + \varphi). \quad (3)$$

где A – амплитуда сигнала, φ – фазный сдвиг относительно начала координат.

Сигнал, соответствующий (2) и (3), удовлетворяет требованиям (1) и является наиболее высокочастотным сигналом, который может быть передан в соответствии с теоремой Котельникова–Шеннона при данной частоте дискретизации.

Как видно из (2) и (3), значения выборок – отсчетов J_n (Рис. 2 б) могут быть получены из выражения

$$J_n = G(t_n) = A \cos(n\pi + \varphi), \quad (4)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер выборки.

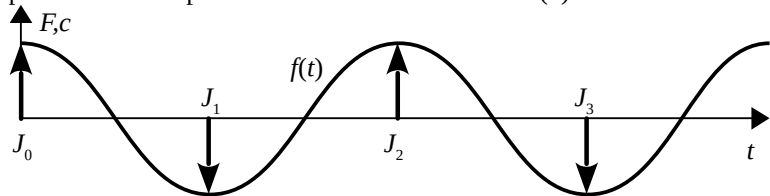


Рис. 1 Классическое графическое представление теоремы Котельникова–Шеннона

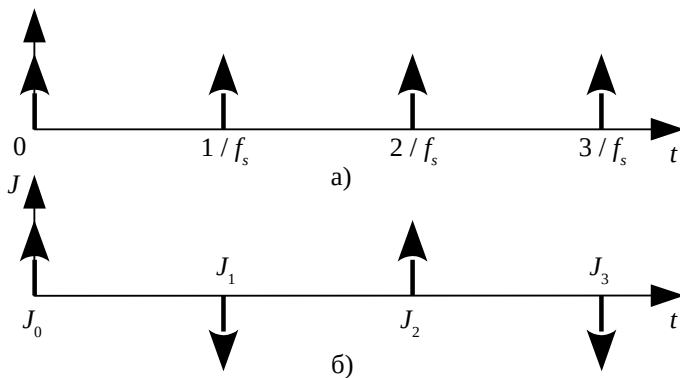


Рис. 2 а) последовательность выборок; б) значения выборок

которая является недоопределенной и имеет бесконечное количество решений – соответствующих пар значений A и φ .

Следовательно, рассмотренная система уравнений, полученная в предположении, что выполняется условие (2), не может быть использована для получения однозначного определения функции $G(t)$ последовательностью значений J_n . Заданной последовательности значений J_n соответствует бесконечное количество функций $G_n(t)$ со своими амплитудами и фазами (Рис. 3 а). С другой стороны, заданной функции $G(t)$ может соответствовать бесконечное количество значений выборок J_{mn} при изменении фазы последовательности выборок сигнала (Рис. 3 б). Характер значений выборок J_n может изменяться от нулевых значений $J_n = 0$ при фазном сдвиге $\varphi = \pi/2$, до значений $J_n = A$ при $\varphi = 0$.

Для получения значений J_n , однозначно характеризующих функцию $G(t)$, в выражении (4) необходимо «избавиться» от второй переменной – зафиксировать ее значение. Это сводит систему уравнений к одному уравнению с одной неизвестной. Поскольку, как правило, пользователя интересует амплитуда неизвестного сигнала, то целесообразно зафиксировать момент измерения его мгновенного значения $\varphi = 0$ (сигнал $G_1(t)$ на рис. 3 а, выборки J_{1n} на рис. 3 б). Что соответствует классическому представлению теоремы (Рис. 1)

Однако, для однозначной передачи сигнала достаточно знать величину фазного сдвига $\varphi = \varphi_1$ и учитывать это значение при вычислении амплитуды сигнала (выборки J_{2n} на рис. 3 б).

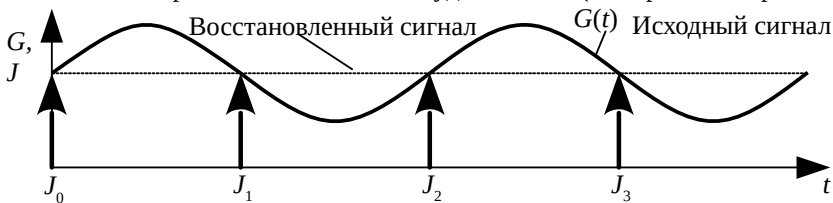


Рис. 4 Эффект неоднозначности определения функции $G(t)$.

что не соответствует действительности с математической точки зрения. В действительности наблюдается эффект, вызванный неоднозначностью определения функции $G(t)$.

Таким образом, можно сделать вывод, что однозначная передача произвольного сигнала при помощи выборок, следующих с частотой равной удвоенной максимальной частоте составляющих (гармоник) сигнала, возможна лишь при выполнении дополнительного условия – известном фазном сдвиге передаваемого сигнала относительно точек измерения. В противном случае, однозначная передача сигнала – невозможна.

Восстановление сигнала, переданного при помощи выборок. При восстановлении сигнала по его дискретным отсчетам в большинстве случаев используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [6].

Для получения однозначного определения функции $G(t)$ необходимо использовать две последовательные выборки J_n и J_{n+1} .

$$A \cos(n\pi + \varphi) = J_n \quad (5)$$

$$A \cos((n+1)\pi + \varphi) = J_{n+1} \quad (6)$$

Из-за сдвига на угол π выборок J_n в базисе функции $G(t)$ решение системы уравнений (5) и (6) приводит к равенству

$$J_n = -J_{n+1} \quad (7)$$

при любых значениях амплитуды и фазы сигнала $G(t)$. Система уравнений (5) и (6) приводится к

$$A \cos(n\pi + \varphi) = J_n \quad (8)$$

$$-A \cos(n\pi + \varphi) = -J_n \quad (9)$$

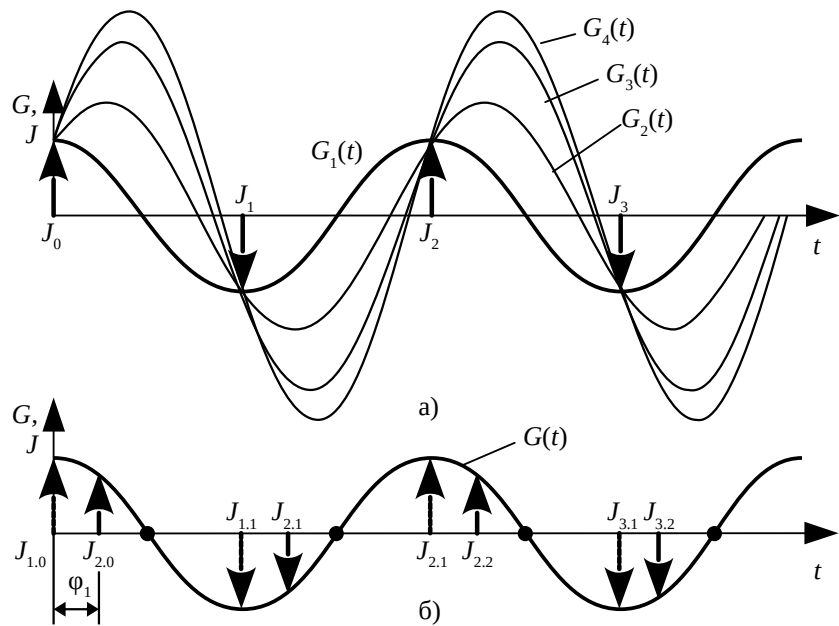


Рис. 3 Примеры бесконечного множества решений. а) пары значений A, φ б) значения выборок J_{mn} при изменении фазы выборок

Граничным случаем значений выборок является $J_n = \text{const}$, в частном случае $J_n = 0$. В этом случае выборки гармонического сигнала идентичны выборкам сигнала с нулевой частотой (Рис. 4). В литературе [3] делается попытка объяснить этот феномен эффектом наложения спектра,

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi nm}{N}} \quad (10)$$

или, переходя к тригонометрической форме,

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\cos \frac{2\pi nm}{N} - j \sin \frac{2\pi nm}{N} \right) \quad (11)$$

(приведенные выражения не содержат нормирующий множитель).

Для двухточечного ДПФ $N=2$ и $x(0) = -x(1)$ (7).

Комплексное значение гармоники ДПФ

$$X(1) = 2 \cdot x(0) - j0 \quad (12)$$

Ее фазный сдвиг равен

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{0}{2 \cdot x(0)} \right) \quad (13)$$

и для любых $x(0)$, $x(1)$ его значение равно нулю $\varphi = 0$. Амплитуда гармоники, с учетом совпадения комплексно-сопряженных частот, равна 1.

Оценим относительную погрешность восстановления амплитуды гармоники с критической частотой по отношению к действительному значению ее амплитуды. При использовании ДПФ (11) и произвольном фазном сдвиге сигнала относительная погрешность минимальна при $\varphi = 0$ и стремится к 100% при $\varphi = \pi/2$ (Рис. 5).

Таким образом, можно сделать вывод, что для любого реального сигнала (Рис. 3 а), при использовании двухточечного ДПФ, корректное восстановление сигнала производится лишь при условии нулевого фазного сдвига $\varphi = 0$ сигнала и выборки.

Простейшее решение [7], обеспечивающее однозначность передачи сигнала – преобразование требования (1) к виду $f_c < 0.5f_s$ или

$$k \cdot 2f_c < f_s, \quad (14)$$

где $k > 1$.

Рассмотрим случай $1 < k < 2$. Частный случай последовательности выборок значений $G(t)$ приведен на рис. 6. С учетом (14) значения последовательных выборок

$$A \cdot \cos(\varphi) = J_0, \quad (15)$$

$$A \cdot \cos(\pi/k + \varphi) = J_1. \quad (16)$$

Видно, что система уравнений (15), (16) определена и может быть использована для однозначной передачи сигнала. Однако, некрatное соотношение частот сигнала f_c и выборок f_s вызывает появление биений (Рис. 7). Частота биений зависит от значения коэффициента k в выражении (14). При восстановлении сигнала по его дискретным отсчетам, наличие биений приводит к отличию спектрального состава восстанавливаемого сигнала от исходного (растеканию спектра), его зависимости от частоты выборок и параметров преобразования Фурье. Таким образом, увеличение частоты выборок в соответствии с (14) при $1 < k < 2$ не приводит к возможности однозначного восстановления исходного сигнала.

Определение минимальной частоты выборки. Для определения минимальной частоты выборок, обеспечивающей однозначное восстановление сигнала и его однозначную передачу, воспользуемся методом определения утечки спектра ДПФ. Утечка спектра отсутствует, если интервал дискретизации (две или более выборки) содержит целое число периодов входной последовательности или, говоря другим языком, входная последовательность содержит энергию только на аналитических частотах [6, 8].

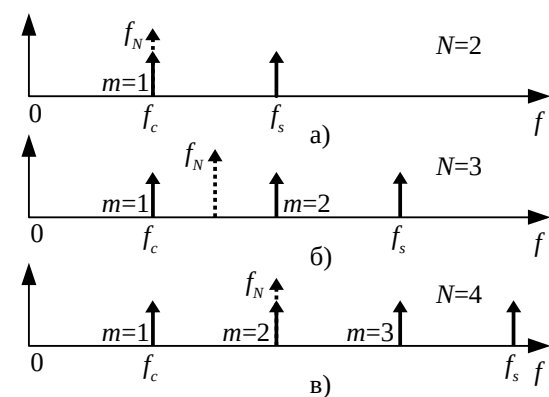


Рис. 8 Частоты сигнала и аналитические частоты Компоненты дискретного преобразования Фурье

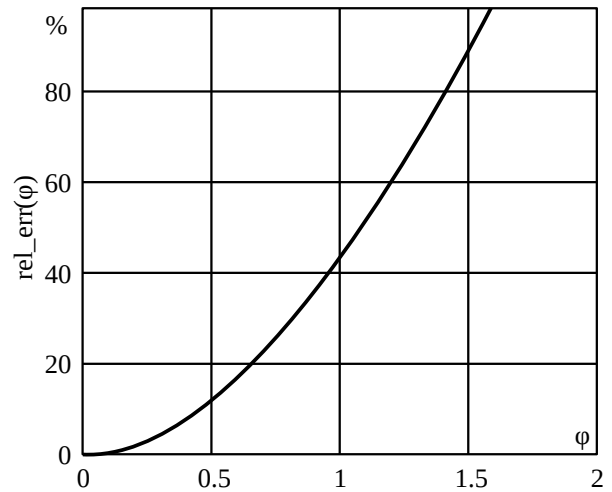


Рис. 5 Относительная ошибка восстановления амплитуды наивысшей гармоники.

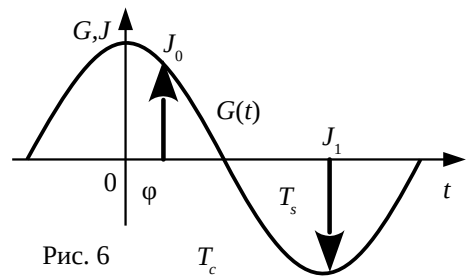


Рис. 6

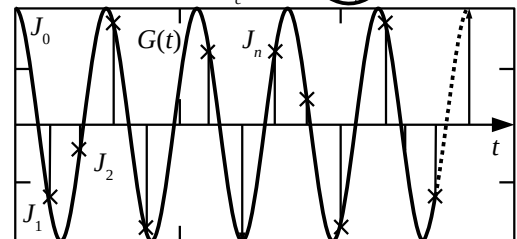


Рис. 7 Биения при значении $k = 1.1$

Для определения минимальной частоты выборок, обеспечивающей однозначное восстановление сигнала и его однозначную передачу, воспользуемся методом определения утечки спектра ДПФ. Утечка спектра отсутствует, если интервал дискретизации (две или более выборки) содержит целое число периодов входной последовательности или, говоря другим языком, входная последовательность содержит энергию только на аналитических частотах [6, 8].

$$f_{analysis}(m) = \frac{f_s \cdot m}{N}, \quad (17)$$

где N – количество точек ДПФ, $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Для определения необходимого номера составляющей ДПФ m и количества точек дискретизации на периоде сигнала N можно приравнять аналитическую частоту $f_{analysis}$ из (17) частоте сигнала f_c

$$f_c = \frac{f_s \cdot m}{N}. \quad (18)$$

Возможные варианты использования различных комбинаций m и N приведены на рис. 8. Количество выборок на периоде сигнала может быть как четным, так и нечетным [8]. При использовании двухточечного ДПФ ($m = 1$ и $N = 2$) получаем граничное условие теоремы Котельникова–Шеннона (2) (рис. 8, а). В этом случае частота Найквиста f_N совпадает с критической частотой входного сигнала. Утечки спектра нет, но определение сигнала, как показано выше, неоднозначно при $N = 2$. Переход к нечетному количеству выборок на периоде сигнала $N = 3$ соответствует увеличению частоты дискретизации в 1,5 раза. Частота Найквиста не совпадает ни с одной из частот ДПФ (рис. 8, б). При применении четырехточечного ДПФ, используется $m = 1$ и $N = 4$ при увеличении частоты дискретизации в 2 раза (рис. 8, в). Частота Найквиста не совпадает с частотой входного сигнала. Применение более высокочастотной составляющей ДПФ ($m = 2$ и $N = 4$) приводит в результате к двухточечному ДПФ с удвоенной частотой сигнала аналогично (рис. 8, а).

Использование как двух выборок на периоде сигнала, так и трех или четырех выборок не приводит к утечке спектра ДПФ.

Проверим, можно ли однозначно определить входной сигнал по трем (четырем) выборкам на периоде. При передаче сигнала с использованием частоты выборок $f_s = 3f_c$, формируется три последовательных значения выборок (рис. 9, а)

$$J_0 = A \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 0}{3} + \varphi\right) = A \cdot \cos(\varphi) \quad (19)$$

$$J_1 = A \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + \varphi\right) = -\frac{A}{2} \cdot (\cos(\varphi) + \sqrt{3} \sin(\varphi)) \quad (20)$$

$$J_2 = A \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot 2}{3} + \varphi\right) = -\frac{A}{2} \cdot (\cos(\varphi) - \sqrt{3} \sin(\varphi)) \quad (21)$$

Система уравнений (19) ÷ (21) является переопределенной системой, которая сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными и однозначно определяет исходный сигнал. Аналогичные вычисления можно провести для частоты выборок $f_s = 4f_c$ (рис. 9, б). Так само легко убедиться, что трех- и четырехточечное ДПФ позволяют однозначно восстановить сигнал по данным, полученным за один его период.

Экспериментальные исследования.

Рассмотрим управление силовым активным фильтром (САФ), обеспечивающим заданное качество электрической энергии [9]. Особенностью работы САФ в системах электропитания является подавление составляющих токов / напряжений с предопределенными частотами – гармоник основной частоты напряжения системы питания. Фазный сдвиг высших гармоник как относительно первой, так и между собой – произвольный [10]. ЦСУ на основе выборок J_n идентифицируют подавляемые гармоники и восстанавливает идентифицированный сигнал ДПФ J_n , формируют управляющее воздействие силовым преобразователем (ПР), который производит соответствующее масштабирование и формирование требуемого фазного сдвига. Схема простейшего САФ приведена на рис. 10.

Рассмотрим сигнал $G(t)$, который содержит первую $G_1(t)$ и десятую $G_{10}(t)$ гармоники (Рис. 11, а). Сигнал оцифровывается с частотой, которая равна удвоенной частоте высшей гармоники. Результаты оцифровки – дискретные последовательности $J(n)$, $J_1(n)$ и $J_{10}(n)$ показаны на рисунках рис. 11, б. Фазовый сдвиг первой и высшей гармоник равен $\varphi = 0$, $\varphi = 45$ и $\varphi = 90$ (Рис. 11 ряд 1, 2, 3 соответственно). Фаза последовательности выборок неизменна и синхронизирована с первой гармоникой. Значения выборок, соответствующих высшей гармонике, изменяются от истинного значения при $\varphi = 0$ до нулевого – при $\varphi = 90$.

Предположим, что $M(t) = G(t) - (DFT G(t))$ для каждой гармоники. Для восстановления сигнала по его дискретам воспользуемся ДПФ в форме (11). Результаты работы САФ при $\varphi = 0$, 45 и 90 приведены на рис 11, в. Видно, что, как и ожидалось, компенсация высшей гармоники составляет 100% при $\varphi = 0$. При $\varphi = 90$ высшая гармоника не компенсируется. При $\varphi = 45$ полной компенсации высшей гармоники не происходит.

Рассмотрим результат оцифровки сигнала с частотой следования выборок $f_s = 3f_c$. Результат оцифровки – дискретная последовательность выборок $J_{10}(n)$, представлен на рис. 11, г. Диаграммы высшей входной гармоники $G_{10}(t)$ и гармоники, которая была восстановлена при помощи ДПФ представлены на рис. 11, д. Постоянная составляющая сигнала равна нулю. Спектр восстановленного сигнала не имеет утечки. Как видно, амплитуда и фаза восстановленных гармоник равны амплитуде и фазе входных гармоник при любом фазном сдвиге.

Использование полученных результатов оцифровки сигнала $G(t)$ при $f_s = 3f_c$ для восстановления параметров высшей гармоники при помощи ДПФ в работе активного фильтра (Рис. 10), позволяет получить полное подавление высшей гармоники при любом фазном сдвиге последовательности выборок относительно высшей гармоники.

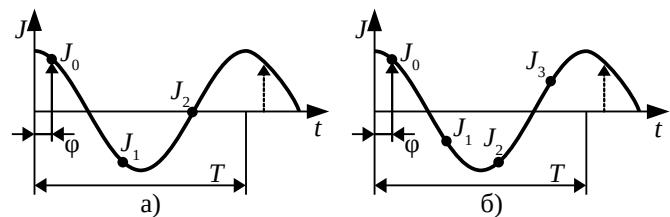


Рис. 9 Примеры трех (а) и четырех (б) выборок на периоде сигнала.



Рис. 10 Простейший параллельный активный силовой фильтр.

АЦП – блок аналогово-цифрового преобразования;

ДПФ – блок выполняющий дискретное преобразование

Фурье и восстанавливающий идентифицированный сигнал.

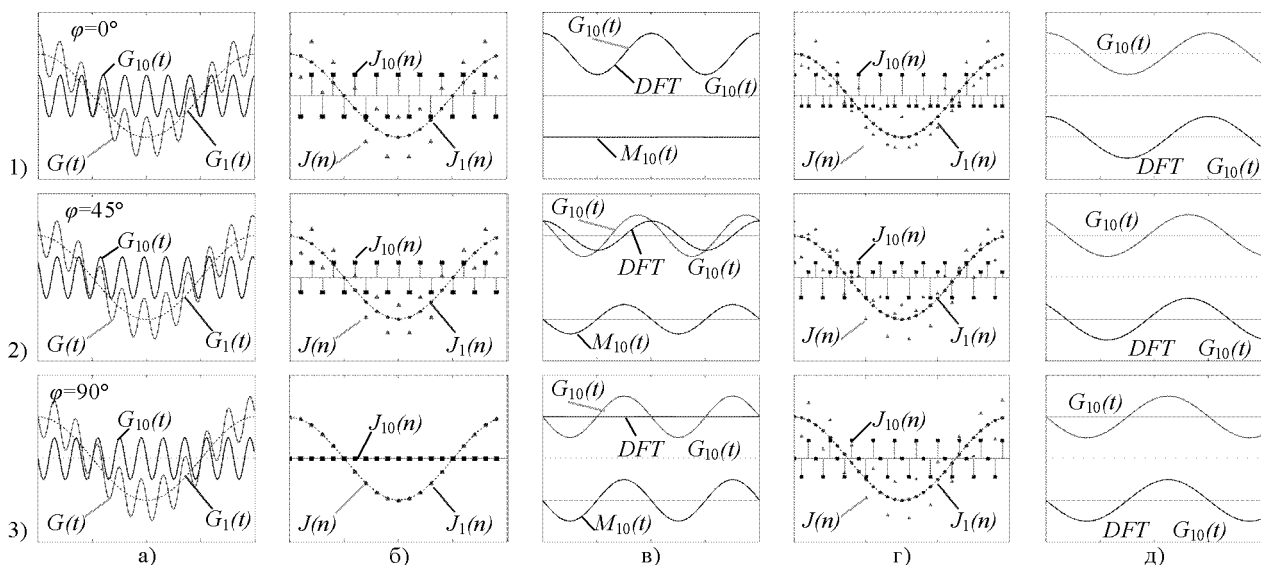


Рис. 11 Экспериментальные результаты.

Выводы:

1. Вывод теоремы Котельникова–Шеннона о полном определении сигнала частотой f_c серией выборок с частотой $f_s = 2f_c$ верен лишь для частного случая передачи сигнала с известным фазным сдвигом последовательности выборок относительно сигнала. Предполагается нулевой сдвиг для сигнала вида $f(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t)$.
2. Для полного определения сигнала вида $f(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t + \varphi)$ необходимо использовать частоту выборок выше, чем определяется теоремой Котельникова–Шеннона – $f_s > 2 \cdot f_c$.
3. Для исключения явления растекания спектра, для полного определения сигнала с частотой f_c и неизвестным фазным сдвигом, минимальная частота последовательности выборок превышает частоту рекомендуемую теоремой Котельникова–Шеннона и составляет $f_s = 3f_c$ при допущении нечетного числа выборок на периоде либо $f_s = 4f_c$ при четном числе выборок.

Список литературы: 1. Котельников, В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи/ В. А. Котельников. – Всесоюзный энергетический комитет. // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По радиосекции. М.: Управление связи РККА, 1933 с1-19. Репринт статьи в журнале УФН, т.176, №7, 2006, с.762–770. Доступно: https://ufn.ru/ufn06/ufn06_7/Russian/r067f.pdf (URL). 2. Shannon, C. E. Communication in the presence of noise/ C. E. Shannon //Proc. Institute of Radio Engineers, vol. 37, no. 1, pp. 10–21, Jan. 1949. Reprint as classic paper in: Proc. IEEE, vol. 86, no. 2, (Feb. 1998). Доступно: <http://www.stanford.edu/class/ee104/shannonpaper.pdf> (URL). 3. Orfanidis, S. J. Introduction To Signal Processing / S.J. Orfanidis// Prentice Hall, p.795 1996. Available: www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/intro2sp/orfanidis-i2sp.pdf (URL). 4. Wescott, T. Sampling: What Nyquist Didn't Say, and What to Do About It/ T. Wescott// Wescott Design Services, p. 27, 2016. Available: <http://www.wescottdesign.com/articles/Sampling/sampling.pdf> (URL). 5. Noland, K. C. High Frame Rate Television: Sampling Theory, the Human Visual System, and Why the Nyquist–Shannon Theorem Does Not Apply/ K. C. Noland// in SMPTE Motion Imaging Journal, vol. 125, no. 3, pp. 46-52, April 2016. 6. Lyons, R. G. Understanding Digital Signal Processing/ R. G. Lyons// 2nd ed. Prentice Hall, p. 665, 2004. 7. Зиятдинов, С. И. Восстановление сигнала по его выборкам на основе теоремы отсчетов Котельникова/ С.И. Зиятдинов// Известия вузов. Приборостроение. – 2010. – Т.53, №5 – С. 44–47. 8. Harris, F. J. On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform/ F. J. Harris// Proceedings of the IEEE. – 1978. – Vol. 66 (1). – p. 51–83. Available: <https://www.utdallas.edu/~cpb021000/EE%204361/Great%20DSP%20Papers/Harris%20on%20Windows.pdf> (URL). 9. Rashid, M. H. Power Electronics Handbook: Devices, Circuits, and Applications Handbook/ Rashid, M. H.// 3rd ed. Elsevier. p. 1362, 2011. 10. IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions // in IEEE Std 1459-2010 (Revision of IEEE Std 1459-2000), pp.1-50, March 19 2010.

Bibliography (transliterated): 1. Kotelnikov, V.A. On the transmission capacity of the 'ether' and of cables in electrical communications/ V.A. Kotelnikov// English translation. Available: <http://ict.open.ac.uk/classics/1.pdf> (URL). 7. Ziatdinov, S. I. "Vosstanovleniye signala po yego vyborkam na osnove teoremy otschetov Kotel'nikova." *Izvestiya vuzov. Priborostroyeniye*. 53.5 (2010): 44-47. Print.

Поступила 26.06.2017