

УДК 681.511.4:661.333(075)

**Бобух Анатолій Олексійович**, канд. техн. наук, доцент, професор кафедри автоматизації технологічних систем і екологічного моніторингу. Тел. +38-096-233-47-96. E-mail: [aabobukh@ukr.net](mailto:aabobukh@ukr.net) ([orcid.org/0000-0002-3405-386X](https://orcid.org/0000-0002-3405-386X))

**Переверзева Алевтина Миколаївна**, аспірант кафедри автоматизації технологічних систем і екологічного моніторингу. Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків, Україна. Вул. Кирпичова, 2, м. Харків, Україна, 61002. Тел. +38-068-867-30-09. E-mail: [pereverzieva\\_alya@ukr.net](mailto:pereverzieva_alya@ukr.net) ([orcid.org/0000-0003-2072-2521](https://orcid.org/0000-0003-2072-2521))

## РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕХНОЛОГІЇ РЕГЕНЕРАЦІЇ ГАЗІВ ІЗ РОЗЧИНІВ ВИРОБНИЦТВА КАЛЬЦИНОВАНОЇ СОДИ

*У статті розглянуті теоретичні підстави для розробки математичної моделі регенерації газів із розчинів виробництва кальцинованої соди за аміачним способом (ВКС) та алгоритми математичної статистики для розробки цієї моделі за одним із методів регресійного аналізу. Отримана математична модель може бути використана для розробки комп'ютерно-інтегрованої технології регенерації газів із розчинів ВКС на базі сучасних мікропроцесорних контролерів, буде сприяти ефективному функціонуванню та підвищенню енергозбереження в цілому ВКС.*

**Ключові слова:** математична модель, метод найменших квадратів, пасивний експеримент, комп'ютерно-інтегрована технологія, статистичний критерій злагоди.

**Бобух Анатолий Алексеевич**, канд. техн. наук, доцент, професор кафедри автоматизации технологических систем и экологического мониторинга. Тел. +38-096-233-47-96. E-mail: [aabobukh@ukr.net](mailto:aabobukh@ukr.net) ([orcid.org/0000-0002-3405-386X](https://orcid.org/0000-0002-3405-386X))

**Переверзева Алевтина Николаевна**, аспирант кафедры автоматизации технологических систем и экологического мониторинга. Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков, Украина. Ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002. Тел. +38-068-867-30-09. E-mail: [pereverzieva\\_alya@ukr.net](mailto:pereverzieva_alya@ukr.net) ([orcid.org/0000-0003-2072-2521](https://orcid.org/0000-0003-2072-2521))

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕХНОЛОГИИ РЕГЕНЕРАЦИИ ГАЗОВ ИЗ РАСТВОРОВ ПРОИЗВОДСТВА КАЛЬЦИНИРОВАННОЙ СОДЫ

*В статье рассмотрены теоретические основы для разработки математической модели регенерации газов из растворов производства кальцинированной соды по аммиачному способу (ПКС) и алгоритмы математической статистики для разработки этой модели по одному из методов регрессионного анализа. Полученная математическая модель может быть использована для разработки компьютерно-интегрированной технологии регенерации газов из растворов ПКС на базе современных микропроцессорных контроллеров, будет способствовать эффективному функционированию и повышению энергосбережения в целом ПКС.*

**Ключевые слова:** математическая модель, метод наименьших квадратов, пассивный эксперимент, компьютерно-интегрированная технология, статистический критерий согласия.

**Bobukh Anatoly Alekseevich**, Ph.D., associate professor, professor of department of automation of the technological systems and ecological monitoring. Тел. +38-096-233-47-96. E-mail: [aabobukh@ukr.net](mailto:aabobukh@ukr.net) ([orcid.org/0000-0002-3405-386X](https://orcid.org/0000-0002-3405-386X))

**Pereverzieva Alevtyna Mykolayivna**, post-graduate student of department of automation of

the technological systems and ecological monitoring. The National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Kharkov, Ukraine. Str. Kirpicheva, 2, Kharkov, Ukraine, 61002. Tel. + 38-068-867-30-09. E - mail: [pereverzieva\\_alya@ukr.net](mailto:pereverzieva_alya@ukr.net) ([orcid.org/0000-0003-2072-2521](https://orcid.org/0000-0003-2072-2521))

## **DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE TECHNOLOGY OF REGENERATION OF GASES FROM SOLUTIONS OF PRODUCTION OF CALCIUM SODA**

*The theoretical bases for development of mathematical model of gas regeneration from solutions of production of soda ash by ammonia method (PCS) and algorithms of mathematical statistics for development of this model by one of regression analysis methods are considered in the article. The resulting mathematical model can be used to develop a computer-integrated technology for gas regeneration from PCS solutions based on modern microprocessor controllers, will contribute to the efficient operation and increase of energy saving in the whole PCS.*

**Keywords:** *mathematical model, least squares method, passive experiment, computer-integrated technology, statistical criterion of consent.*

### **Вступ**

Для розробки комп'ютерно-інтегрованих технологій хімічних виробництв перешкодами є відсутність або недостовірність існуючих математичних моделей, що може призвести до зниження ефективності експлуатації при впровадженні таких виробництв, тому необхідно розробити математичні моделі комп'ютерно-інтегрованих технологій конкретних хімічних виробництв, які повинні використовувати або перетворювати певним чином не один відповідний параметр, а сукупність параметрів, при цьому характер змінювання кожного із них наперед повністю визначити неможливо. Таким виробництвом є виробництво кальцинованої соди за аміачним способом (ВКС). Хіміко-технологічні процеси цього виробництва відносяться до класу технологій, у яких технологічні процеси переробки сировини, яка знаходиться у неперервному контакті з апаратами різного технологічного призначення, змінюють свої хімічні склади [1, 2]. До складу ВКС входять основні та допоміжні технології, серед яких дуже важливе місце належить технологічним процесам технології регенерації газів із розчинів ВКС. Саме для цієї технології буде розроблена математична модель за методом найменших квадратів [3–7].

### **Мета роботи**

Розглянуті теоретичні підстави розробки математичної моделі регенерації газів із розчинів виробництва кальцинованої соди за аміачним способом та алгоритми математичної статистики для розробки цієї моделі за одним із методів регресійного аналізу.

### **Основна частина**

Основним призначенням технології регенерації газів із розчинів ВКС є практично повна регенерація аміаку та вуглекислого газу із фільтрової рідини і коденсатів, формування безперервного матеріального потоку парогазової суміші, що спрямовується на технологію насичення газами очищеного розсолу ВКС. Технологія регенерація газів із розчинів ВКС складається: з конденсатора-холодильнику газу дистиляції (КХДС), теплообмінника дистиляції (ТДС), дистилера (ДС), змішувача (реактора з мішалкою) (ЗМ), випарників і пароструйного ежектора [1].

Для розробки математичних моделей необхідна обробка масива даних, отриманих при проведенні пасивного експерименту, при цьому використовуються методи регресійного аналізу: найменших квадратів, множинної регресії, кореляційного авналізу тощо. Серед них найбільш часто використовується метод найменших квадратів для отримання детермінованої математичної моделі.

При застосуванні методу найменших квадратів (МНК) використовуються прості багатопараметричні регресійні моделі, які описуються рівнянням [3–7]:

$$Y_j = \sum_{i=1}^k a_i X_i + b_j, \quad (1)$$

де  $Y_j$  – залежні (управляємі) параметри,  $j = \overline{1, m}$ , при цьому  $m < k$ ;  
 $X_i$  – незалежні (управляючі або збурюючі) параметри (фактори),  $i = \overline{1, k}$ ;  
 $a_i$  – коефіцієнти, відповідно до кожного вхідного (незалежного, управляючого, або збурюючого) параметра (фактора)  $X_i$ ;  
 $b_j$  – постійні величини,

при цьому для знаходження залежного параметра  $Y_j$ , який найкращим чином відповідає емпіричним даним, сума квадратів відхилень емпіричних крапок від теоретичної лінії регресії повинна бути величиною мінімальною.

Для визначення залежного значення параметра  $Y_j$  необхідно розрахувати систему умовних рівнянь:

$$a_i(X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+k}) - (Y_j - b_j) = 0. \quad (2)$$

Для лінійних рівнянь отримуємо:

$$\bar{Y}_j = a_{1,i} \bar{X}_i + a_{1,i+1} \bar{X}_{i+1} + \dots + a_{1,k} \bar{X}_k + b_j. \quad (3)$$

Вимога мінімуму суми квадратів відхилень приводе до системи нормальних лінійних рівнянь:

$$[a_1^2] \bar{X}_i + [a_1, a_2] \bar{X}_{i+1} + \dots + [a_1, a_k] \bar{X}_k = [a_1(Y - b)], \quad (4)$$

$$\text{де } [a_1^2] = \sum_{i=1}^k a_{1,i}^2, \quad [a_1, a_2] = \sum_{i=1}^k a_{1,i} a_{2,i}, \quad [a_1(Y - b)] = \sum_{i=1}^k a_{1,i} (Y_j - b_j). \quad (5)$$

Оскільки МНК є одним із найбільш вживаних методів для розробки математичних моделей за результатами пасивного експериментального дослідження роботи об'єкта управління, то вибір параметрів для подання в регресійні рівняння здійснюється на основі статистичних критеріїв злагоди Фішера ( $F$ ) та  $t$ -критерія Стьюдента.

Статистичний критерій злагоди Фішера ( $F$ ) застосовується для порівняння точності двох рядів вимірювання перевірки усталеного (тривалого) технологічного процесу. Він визначає: чи є отримані математичні моделі адекватними експериментальним даним, тобто, чи є взаємозв'язок поміж залежним та незалежними параметрами випадковим або ні.

Перевірка гіпотез про адекватність математичних моделей (стаціонарності процесу) по критерію Фішера ( $F_{розр.}$ ) визначається відношенням двох дисперсій:

$$F_{розр.} = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_Y^2}, \quad (6)$$

$$\text{де } \sigma_S^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_j); \quad (7)$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_{ij} - Y_j)}{i}; \quad (8)$$

$$Y_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2}{n}, \quad (9)$$

$i$  – кількість серій дослідження,  $i = \overline{1, n}$ ;

$j$  – кількість досліджень в кожній серії,  $j = \overline{1, m}$ .

Розраховане за формулою (9) значення функції Фішера  $F_{розр.}$  порівнюється із табличним  $F_{табл}$  при кількості ступеней свободи ( $f$ ), необхідних для знаходження значення критерію Фішера в статистичній таблиці, та номінальному рівні значимості  $\alpha = 5\%$ . При цьому обов'язково необхідне виконання умови, що  $F_{розр.} > F_{табл.}$

Статистичний критерій злагоди Стьюдента ( $t$ -критерій) є законом розподілення несподіваних параметрів. Припустимо, що випадкові параметри  $u$  та  $v$  незалежні один від другого, окрім того  $u$  розподілений нормально, а  $v$  –  $\chi^2$ -квадрат ( $\chi^2$ ) із  $k$  ступенями свободи. Тоді величина ( $t_v$ ) дорівнює:

$$t_v = \frac{u}{\sqrt{\frac{v}{k}}}, \quad (10)$$

та має наступну щільність розподілення (11), яка відома як «закон Стьюдента»:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)}, \quad (11)$$

де  $\Gamma\left(\frac{\kappa+1}{2}\right)$  та  $\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right)$  – функції Гамма, тобто:  $\Gamma(\kappa+1) = \kappa\Gamma(\kappa)$ . (12)

Із цієї властивості витікає, що якщо значення функції  $\Gamma(\kappa)$  відомі для усіх  $\kappa$  поміж будь-якими слідуючими одно за другим цілими числами, то значення цієї функції ( $\Gamma(\kappa)$ ) для любого позитивного значення  $\kappa$  може бути знайдено шляхом послідовного застосування (12).

Для сукупності  $x$ , розподіленої з відхиленням  $\frac{\sigma_0^2}{n}$  від її середньої  $\bar{X}$ , маємо так званий  $t$ -критерій Стьюдента:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\sigma_0} \sqrt{n} \quad (13)$$

Оскільки  $(n-1)\frac{\sigma^2}{\sigma_0}$  має розподілення по закону  $\chi^2$ -квадрат ( $\chi^2$ ) із  $(n-1)$  ступенями свободи, то із (10) отримуємо:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{n}. \quad (14)$$

Таким чином,  $t$ -критерій Стьюдента є відношення відхилення середньої  $\bar{x}$  даної сукупності, що має  $n$  значень, від істинного значення  $\bar{X}$  усієї сукупності, до стандартного відхилення  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Значення  $t$ -критерій Стьюдента використовуються для визначення значимості кожного параметра ( $X$ ) в отриманих математичних моделях та дозволяють виконувати ранжування відповідних параметрів за величиною їх впливу на ці моделі в цілому. Розраховані значення  $t$ -критерійів Стьюдента порівнюються з табличними при відповідній кількості ступеней свободи ( $f$ ) та номінальному рівні значимості  $\alpha = 5\%$ .

Необхідно пам'ятати, що при використанні МНК треба оцінювати якість отриманих експериментальних даних. При цьому із розгляду необхідно вилучати значення параметрів для яких виконується відношення:

$$\zeta = \frac{X_i^{\max} - X_i^{\min}}{\Delta X} < 7, \quad (15)$$

де  $X_i^{\max}$  та  $X_i^{\min}$  – відповідно максимальне та мінімальне значення незалежного параметра в експериментальних даних:

$$\Delta X = \frac{a_X A_X}{50\sqrt{3}}; \quad (16)$$

$a_X$  – відносна похибка вимірювального приладу, що контролює параметри  $X_i$ ;

$A_X$  – верхня межа вимірювання приладу.

Окрім того, при аналізі експериментальних даних розраховується середньоквадратичне відхилення результату вимірювання  $\sigma$  (17) та абсолютне значення відхилення поточного параметра від його середнього значення  $\delta$  (18):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X}_i)^2}{N}}, \quad (17)$$

$$\delta = \bar{X}_i - X_i. \quad (18)$$

де  $X_i$  – поточне абсолютне значення значення параметра;

$\bar{X}_i$  – середнє значення цього параметра;

$N$  – кількість вимірів при експерименті.

При цьому експериментальні дані за правилом «трьох сігм», значення  $\sigma$  яких перевищує вираз  $\sigma > 3\delta$ , вилучаються із розгляду, а дані, котрі залишились, будуть відповідати нормальному закону розподілення з ймовірністю не менше як 95%.

За приведеною методикою та при застосуванні формул (3) – (18), при використанні комп'ютерних пакетів (зокрема MATLAB) для статистичної обробки даних, отриманих в ході пасивного експерименту за 300 дослідженнями (через 15 хвилин, за більше ніж 3,13 доби), розрахована багатопараметрична математична модель: залежність витрати фільтрової рідини  $Y$  ( $F$ ) в КХДС, як ведучого потоку об'єкта дистиляції (упрвляемий параметр), ( $m^3/год.$ ), від кожного із трьох незалежних параметрів:  $X_1$  ( $T_1$ ) – температура рідини із КХДС в ТДС, ( $^{\circ}C$ );  $X_2$  ( $F_2$ ) – витрата пари в ДС, ( $m/год.$ );  $X_3$  ( $F_3$ ) – витрата вапняного молока (гашеного вапняку) в ЗМ, ( $m^3/год.$ ), які були оброблені за МНК та отримані наступні середні значення цих автоматично контрольованих параметрів (табл. 1).

Таблиця 1 – Середні значення контрольованих параметрів

$F$	$T_1$	$F_2$	$F_3$
$m^3/год.$	$^{\circ}C$	$m/год.$	$m^3/год.$
$Y$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
180,58	75,37	53,62	95,49

Багатопараметрична математична модель відповідно формули (3) за методом МНК:

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + b. \quad (22)$$

В результаті розрахунків отримали багатопараметричну математичну модель, яка має вигляд:

$$Y = 12,03 + 0,579 X_1 + 0,737 X_2 + 0,895 X_3 \quad (23)$$

Для перевірки гіпотези про адекватність отриманої математичної моделі (стаціонарності процесу) (23), при одній серії досліджень та 300 дослідженнями в ній, розраховане значення критерія Фішера ( $F_{розр.}$ ) за формулою (8):  $F_{розр.}=18,5$ , яке порівняли із табличним –  $F_{табл}$  при відповідній кількості ступеней свободи ( $f$ ):  $F_{табл.} = 10,13$ .

Аналіз цих значень критерія Фішера показує, що умова  $F_{розр.} > F_{табл.}$  виконується, а тому отримана багатопараметрична математична модель (23) адекватна експериментальним даним. а взаємозв'язок поміж залежним та незалежними параметрами не є випадковим.

Розрахунок значень критерієв Стюдента для визначення значимості відповідних параметрів отриманої багатопараметричної математичної моделі (23), виконаний за формулою (14) із урахуванням формул (10–13). Розраховані значення  $t$ -критеріїв Стюдента для параметрів математичної моделі (22) представлені в табл. 2, в якій приведено також табличне значення  $t$ -критерія Стюдента при відповідній кількості ступеней свободи ( $f$ ).

Таблиця 2 – Розраховані значення  $t$ -критеріїв Стюдента для параметрів математичної моделі (20)

$T_1$	$F_2$	$F_3$	$t$ -критерій табличний
$^{\circ}C$	$m/год.$	$m^3/год.$	–
$X_1$	$X_2$	$X_3$	–
5,28	2,79	2,41	2,35

Аналіз отриманих розрахованих значень  $t$ -критеріїв Стюдента для трьох параметрів математичної моделі показує, що всі вони більші за табличний  $t$ -критерій Стюдента, а тому значимі в отриманій математичній моделі (23) та характеризують ранжування відповідних параметрів за величиною їх впливу на цю модель в цілому.

### Висновок

В результаті досліджень розглянуті теоретичні підстави розробки математичної моделі регенерації газів із розчинів ВКС та алгоритми математичної статистики для розробки цієї моделі за одним із методів регресійного аналізу. Показано, що одним із найбільш вживаних методів для розробки математичних моделей за результатами пасивного дослідження роботи цієї технології є метод найменших квадратів, а вибір параметрів для подання в регресійні рівняння здійснюється на основі статистичних критеріїв злагоди Фішера ( $F$ ) та  $t$ -критерія

Стьюдента. Отримана математична модель може бути використана для розробки комп'ютерно–інтегрованої технології регенерації газів із розчинів ВКС на базі сучасних мікропроцесорних контролерів, буде сприяти ефективному функціонуванню та підвищенню енергозбереження в цілому ВКС.

#### Список використаної літератури:

1. Зайцев И. Д. Производство соды [Текст] / И. Д. Зайцев, Г. А. Ткач, Н. Д. Стоев. – М. : Химия. 1984. – 312 с.
2. Бобух А. А. Выбор и оптимизация критерия управления объектом абсорбции-десорбции производства кальцинированной соды [Текст] / А. А. Бобух, А. М. Дзевочко, А. Н. Переверзева // Щоквартальний науково-практичний журнал «Інтегровані технології та енергозбереження». Видавничий центр НТУ «ХПІ». – 2015. № 4. – С. 72–81.
3. Бобух А. А. Компьютерно-интегрированная система автоматизации технологических объектов управления централизованным теплоснабжением : монография [Текст] / А. А. Бобух, Д. А. Ковалев; под общ. ред. А. А. Бобух. – Х. : ХНУГХ им. А.Н. Бекетова. – 2013. – 226 с.
4. Советов Б. Я. Математическое моделирование / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М. : Высшая школа, 2001. – 343 с.
5. Елисеева И. И. Статистика / И. И. Елисеева. – М. : ТК Велби, 2005. – 448 с
6. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников [Текст] / А. И. Кобзарь. – М.:ФИЗМАЛИТ, 2006. – 816с.
7. Крушель Е. Г. Обработка экспериментальной информации. Лабораторный практикум [Текст]: учеб. пособие / Е. Г. Крушель, А. Э. Панфилов, И. В. Степанченко. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2014. – 55с.

#### References

1. Zaytsev I. D. (1984) Production of soda [Proizvodstvo sodyi]. / I. D. Zaytsev, G. A. Tkach, N. D. Stoev. – М.: Khimiya, 312 p.
2. Bobukh A. A. (2015) Selection and optimization of the criterion for controlling the absorption-desorption object of the production of soda ash [Vyibor i optimizatsiya kriteriya upravleniya ob'ektom absorptsii-desorbtsii proizvodstva kaltsinirovannoy sodyi]. / A. A. Bobukh, A.M. Dzevochko A. N. Pereverzeva // Schokvartalnyi naukovopraktichnyi zhurnal «Integrovani tehnologiyi ta energozberezhennya». Vidavnichiy tsentr NTU «HPI». – No 4, p.72-81.
3. Bobukh A. A. (2013) Computer-integrated system of automation of technological objects of control centralized heat-supply [Kompyuterno-integrirovannaya sistema avtomatizatsii tehnologicheskikh ob'ektov upravleniya tsentralizovannyim teplosnabzheniem]. / A. A. Bobukh, D. A. Kovalev. HNUGH them. A.N. Beketova, Kharkiv, 226 p.
4. Sovetov B. Ya. (2001) Mathematical modeling [Matematicheskoe modelirovanie]. / B. Ya. Sovetov, S. A. Yakovlev. М.: Vysshaya shkola, 343 p.
5. Yeliseyeva I. I. (2005) Statistics [Statistika]. / I. I. Yeliseyeva. М.:TK Velby, 448 p.
6. Kobzar A. I. (2006) Applied mathematical statistics. For engineers and scientists [Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov]. / A. I.Kobzar. М.: FIZMALIT, 816 p.
7. Krushel E. G. (2014) Processing of experimental information. Laboratory Practice [Obrabotka eksperimentalnoy informatsii. Laboratorniy praktikum]. / ucheb. posobie / E. G. Krushel, A. E. Panfilov, I. V. Stepanchenko. Volgograd: IUNL VolgGTU, 55 p.