

УДК 621.314

doi:10.20998/2413-4295.2018.16.15

ШВИДКЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є МОДУЛЬОВАНИХ СИГНАЛІВ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ РЯДОМ ФУР'Є ДВОХ ЗМІННИХ

С. В. ВЕРБИЦЬКИЙ

кафедра промислової електроніки, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, УКРАЇНА
email: verbitskiy@bigmir.net

АНОТАЦІЯ У статті описано принцип представлення модульованих сигналів на основі ряду Фур'є двох змінних. Показано переваги незалежного опису несучої і модулюючої функцій. Наведено формули розрахунку спектральних складових і гармонік на основі ряду Фур'є двох змінних. Отримано дискретизовані формули для розрахунку спектру на основі ряду Фур'є однієї та двох змінних. Показано доцільність використання формул швидкого перетворення Фур'є для зменшення обсягу математичних розрахунків. Проведено адаптацію методики швидкого перетворення Фур'є для розрахунку спектру модульованих сигналів на основі ряду Фур'є двох змінних, для чого додатково здійснюється процедура сумування та перегрупування гармонік за номером. Проведено аналіз трудомісткості розрахунків за запропонованою методикою розрахунку спектру та показано в скільки разів вона зменшується у порівнянні з безпосереднім розрахунком спектру за початковими формулами.

Ключові слова: ряд Фур'є двох змінних; швидке перетворення Фур'є; модульований сигнал

A FAST FOURIER TRANSFORM OF MODULATED SIGNALS BASED ON DOUBLE FOURIER SERIES

I. VERBYTSKYI

Department of Industrial Electronics, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, UKRAINE

ABSTRACT Pulse modulated signals is useful to represent based on double Fourier series. The article describes the principle of representation of modulated signals based on double Fourier series. The advantages of an independent description of carrier and modulating functions are shown. The expediency of using the double Fourier series to analyze the spectrum of modulated signals, where the modulation multiplicity does not have an integer value, or the law of modulation or carrier functions change is parametric, which may cause the appearance of subharmonic oscillations, is shown. The formulas for calculating the spectral components and harmonics on the basis of the Fourier series of two variables are given. The discrete formulas for calculating the spectrum based on Fourier series of one and two variables are obtained. It is shown the expediency of using Fourier transforms to reduce the amount of mathematical calculations. The adaptation of the Fast Fourier Transform method to the calculation of the spectrum of modulated signals based on the double Fourier series is carried out, in addition, the procedure of summation and rearrangement of harmonics by the number is carried out. The number of the function discrete values for given number of spectrum harmonics based on Kotelnikov theorem are estimated. An analysis of the complexity of calculations according to the proposed method for calculating the spectrum and shows how many times it decreases in comparison with the direct calculation of the spectrum by the initial formulas. The recommendations for spectrum calculation proposed based on proposed procedure depend on discrete values of primary function are given.

Keywords: double Fourier series; fast Fourier transform; modulated signal

Вступ

Сигнали з імпульсною модуляцією можуть бути описані у компактній формі на основі ряду Фур'є двох змінних [1-3]. Одна зміна ряду описує несучу функцію закону модуляції, а інша – модулюючу функцію. Завдяки незалежному опису модулюючої і несучої функцій, аналітичний запис модульованого сигналу на основі ряду Фур'є двох змінних описує набір модульованих сигналів з кратністю модуляції P , що лежить в межах від нуля до нескінченності, $P \in [0..∞]$. Тому вказану форму опису модульованих сигналів доцільно використовувати для аналізу спектру модульованих сигналів, де параметр P має не ціле значення або

закон зміни модулюючої або несучої функцій є параметричним, що може спричинити виникнення субгармонічних коливань [4-9].

Коефіцієнти ряду Фур'є двох змінних C_{mn} , які є спектральними складовими сигналу з кратністю m відносно частоти несучої функції і кратністю n відносно частоти модулюючої функції, розраховують за формулою [10,11]:

$$C_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi b_2(y)} \int_{b_1(y)} f(x,y) e^{j(mx+ny)} dx dy, \quad (1)$$

де $f(x,y)$ – функція, спектр якої розраховується,

$b_1(y), b_2(y)$ – аналітичні вирази від функції y у межах інтегрування за змінною x .

Очевидно, що подвійний ряд (1) утворено штучно для зручного опису впливу несучої і модулючої функцій на сигнал однієї змінної. При цьому особливістю подвійного ряду (1) є залежність зовнішнього інтегралу за змінною y від внутрішнього за змінною x .

Застосування ряду Фур'є двох змінних дає можливість розрахувати спектральну характеристику модульованого сигналу в аналітичній формі. Формула для розрахунку амплітуди гармоніки k вихідної напруги C_k на основі ряду Фур'є двох змінних є такою [12]:

$$C_k = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m(k-mP)}. \quad (2)$$

Згідно з формулою (2) лише частина спектральних складових C_{mn} (1) використовується для розрахунку модульованого сигналу.

При чисельному розрахунку спектру інтеграл (1) дискретизується і з нього утворюється ряд. Для зменшення обсягу математичних операцій при розрахунку спектру у дискретній формі часто використовують швидке перетворення Фур'є для функцій однієї або декількох змінних [13,14]. В даному випадку коефіцієнти інтегралу (1) використовуються для обчислення ряду (2), при цьому для цього потрібно порахувати лише незначну частину коефіцієнтів C_{mn} . У статті пропонується методика розрахунку параметрів C_{mn} і C_k з мінімальною кількістю математичних операцій.

Мета статті

У статті описуються особливості розрахунку спектру модульованих сигналів на основі ряду Фур'є двох змінних та показуються переваги опису модульованого сигналу як функції двох змінних: перша змінна описує модулюючу функцію, друга змінна описує несучу функцію. Аналізується можливість використання алгоритмів швидкого перетворення Фур'є для зменшення трудомісткості розрахунків при використанні ряду Фур'є двох змінних та оцінюється кількість математичних операцій при використанні швидкого перетворення Фур'є.

Основні теоретичні положення

При обчисленні подвійного інтегралу (1) можливі варіанти, коли внутрішній інтеграл виразу (1) може бути розраховано аналітично. Для цього необхідно:

1) можливість розділення функції двох змінних $f(x,y)$ на добуток двох функцій однієї змінної $f_1(x), f_2(y)$:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y); \quad (3)$$

2) існування аналітичного інтегралу функції:

$$F_1(x) = \int_{b_1(y)}^{b_2(y)} f_1(x)e^{jmx} dx. \quad (4)$$

У цьому випадку спектральні компоненти C_{mn} розраховуються через інтеграл однієї змінної:

$$C_{mn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} f_2(y)e^{jny} \times (F_1(m, b_2(y)) - F_1(m, b_1(y))) dy. \quad (5)$$

Тому для пришвидшеного розрахунку спектрального складу модульованого сигналу за формулою (2) доцільно розробити методики для двох випадків представлення спектральних компонент C_{mn} у виді (1) та (5). Якщо дискретизувати ці інтеграли і підставити до формули (2), отримаємо:

$$C_k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} f(i\Delta x, l\Delta y) e^{j(mi\Delta x + (k-mP)l\Delta y)} \Delta x \Delta y; \quad (6)$$

$$C_k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_y} f_2(l\Delta y) e^{j(k-mP)l\Delta y} \times (F_1(m, b_2(l\Delta y)) - F_1(m, b_1(l\Delta y))) \Delta y. \quad (7)$$

Внутрішні суми в формулах (6) і (7) є дискретними формулами перетворення Фур'є для розрахунку спектру. Формула (6) – для функції двох змінних, (7) – для однієї змінної. Відмінністю між класичними формулами дискретного перетворення Фур'є і аналізованими є те, що в даних формулах у показнику ступеня за змінною y замість значення k використовується вираз $(k-mP)$, тому після використання формули швидкого перетворення Фур'є необхідно змінити індексацію розрахованих гармонік. Також необхідно враховувати сумування за параметром m . Для точного розрахунку значення гармонік за формулами (6) і (7) до N_{\max} включно значення параметра m повинно змінюватись від нуля до значення M_{\max} :

$$M_{\max} = \left\lceil \frac{2N_{\max}}{P} \right\rceil + 1. \quad (8)$$

Крок дискретизації Δx і Δy розраховується згідно з теоремою Котельникова. Максимально можливе значення кроку визначається з найвищої гармоніки, значення якої розраховується N_{\max} . Для ряду Фур'є однієї змінної (7) максимальний крок Δy_{\max} розраховується за формулою:

$$\Delta y_{\max} = \frac{\pi}{N_{\max}}, \quad (9)$$

для ряду Фур'є двох змінних (6):

$$\Delta x_{\max} = \frac{\pi}{M_{\max}}; \Delta y_{\max} = \frac{\pi}{N_{\max}}. \quad (10)$$

Для забезпечення необхідної точності кроки Δx і Δy доцільно брати на порядок меншими, ніж кроки Δx_{\max} і Δy_{\max} :

$$\Delta x = \frac{\pi}{10M_{\max}}; \Delta y = \frac{\pi}{10N_{\max}}. \quad (11)$$

Кроки інтегрування Δx і Δy , розраховані за формулою (11) є наближеними і залежно від необхідної похибки розрахунків можуть бути, як більше так і менше, ніж розраховані за формулою (11).

Принцип розрахунку спектру модульованого сигналу на основі швидкого перетворення Фур'є

При безпосередньому використанні алгоритму швидкого перетворення Фур'є використовуються формули:

$$C_{k,m}^* = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} f(i\Delta x, l\Delta y) e^{j(mi\Delta x + l\Delta y)} \Delta x \Delta y; \quad (12)$$

$$C_{k,m}^* = \sum_{l=1}^{N_y} f_2(l\Delta y) e^{jkl\Delta y} \times (F_1(m, b_2(l\Delta y)) - F_1(m, b_1(l\Delta y))) \Delta y. \quad (13)$$

Для подальшого обчислення значення гармонік за формулами (6) і (7) потрібно здійснити сумування по змінній m та перегрупування гармонік за номером, оскільки в формулах (12) і (13) номер гармоніки відповідає значенню k , а в формулах (6) і (7) – $(k - mP)$.

$$C_k = \sum_{m=0}^{M_{\max}} C_{k-mP,m}^*. \quad (14)$$

Отже, розрахунок спектру є двоетапним: спочатку використовуються формули для швидкого перетворення Фур'є, потім здійснюється сумування гармонік з перегрупуванням за формулою (14).

Аналіз трудомісткості розрахунків

Існуючі методи розрахунку спектру швидкого перетворення Фур'є [15] для функції однієї змінної мають трудомісткість $O_{III}(N \log(N))$, де N – кількість розрахованих гармонік. При розрахунку трудомісткості беруться до уваги лише операції

множення, оскільки час їх розрахунку значно більше ніж операцій додавання.

Якщо для функції двох змінних $f(x,y)$ за змінною x необхідно розрахувати N_1 гармонік, а за змінною y – N_2 , сумарна кількість спектральних компонент C_{mn} складає $N = N_1 \cdot N_2$. Трудомісткість розрахунку O спектральних компонент C_{mn} функції двох змінних $f(x,y)$ у загальному випадку є такою ж як і для функції однієї змінної – $O_{III}(N \log(N))$. Оскільки сумування гармонік з перегрупуванням за формулою (14) не потребує додаткових операцій множення, то трудомісткість алгоритму залишається такою ж.

За умови розрахунку спектру безпосередньо за формулами (6) і (7) трудомісткість розрахунків складає $O(N^2)$, де $N = N_1 \cdot N_2 \cdot M_{\max}$. Отже зменшення трудомісткості розрахунків за умови використання швидкого перетворення Фур'є складає:

$$\frac{O}{O_{III}} = \frac{M_{\max}^2 N_1 N_2}{\log(N_1 N_2)}. \quad (15)$$

Згідно з формулою (15) доцільність формули зростає зі збільшенням кількості гармонік, що розраховується, та зі збільшенням значення параметра M_{\max} .

Висновки

В статті показано можливість використання функції двох змінних для опису модульованих сигналів, де перша змінна описує модульовану, а друга несучу функцію сигналу, що доцільно використовувати для аналізу спектру модульованих сигналів з довільним значенням кратності модуляції або параметричного закону зміни модулюючої або несучої функції, що може спричинити виникнення субгармонічних коливань.

Запропоновано методику використання швидкого перетворення Фур'є для розрахунку спектру модульованих сигналів, що додатково містить операції сумування гармонік з їх подальшим перегрупуванням. Проаналізовано зменшення обсягу математичних операцій у порівнянні з безпосереднім використанням формул для розрахунку спектру і показано, що доцільність запропонованої методики розрахунку спектру зростає зі збільшенням кількості гармонік, що розраховується, та зі збільшенням значення параметра m .

Список літератури

1. **Holmes, D. Grahame.** Pulse width modulation for power converters. Principles and practice / **D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo** // *IEEE Press Series on Power Engineering*, 2003, 724 p. – doi: 10.1109/9780470546284.
2. **Vasca, F.** Dynamics and Control of Switched Electronic Systems: Advanced Perspectives for Modeling, Simulation and Control of Power Converters (Advances in Industrial Control) / **F. Vasca, L. Iannelli** // *Springer-Verlag London*, 2012, 493 p. – doi: 10.1007/978-1-4471-2885-4.

3. **McGrath, Brendan Peter.** Natural Capacitor Voltage Balancing for a Flying Capacitor Converter Induction Motor Drive / **Brendan Peter McGrath, Donald Grahame Holmes** // *IEEE Transactions on Power Electronics*. – 2009. – Vol. 24, Issue: 6. – P. 1554-1561. – doi: 10.1109/TPEL.2009.2016567.
4. **Cortés, J.** Accurate Analysis of Subharmonic Oscillations of V^2 and V^2I_c Controls Applied to Buck Converter // **J. Cortés, V. Šviković, P. Alou, J. Oliver, J. Cobos, R. Wisniewski** // *IEEE Transactions on Power Electronics*. – 2015. – Vol. 30, Issue 2. – P. 1005-1018. – doi: 10.1109/TPEL.2014.2308015.
5. **Giaouris, D.** Application of Filippov method for the analysis of subharmonic instability in dc–dc converters / **D. Giaouris, S. Maity, S. Banerjee, V. Pickert, B. Zahawi** // *International Journal of Circuit Theory and Applications*. – 2009. – Vol. 37, Issue 8. – P. 899-919. – doi: 10.1002/cta.505.
6. **Bierhoff, Michael H.** DC-Link Harmonics of Three-Phase Voltage-Source Converters Influenced by the Pulsewidth-Modulation Strategy—An Analysis / **Michael H. Bierhoff, Friedrich Wilhelm Fuchs** // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2008. – Vol. 55, Issue 5. – Pp. 2085 – 2092. – doi: 10.1109/TIE.2008.921203.
7. **Jiang, S. Z.** Spectral analysis of a new six-phase pole-changing induction motor drive for electric vehicles / **S. Z. Jiang, K. T. Chau, C. C. Chan** // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. – 2003. – Vol. 50, Issue 1. – P. 123-131. – doi: 10.1109/TIE.2002.807662.
8. **Li, Binbin.** Analysis of the Phase-Shifted Carrier Modulation for Modular Multilevel Converters / **Binbin Li, Rongfeng Yang, Dandan Xu, Gaolin Wang, Wei Wang, Dianguo Xu** // *IEEE Transactions on Power Electronics*. – 2015. – Vol. 30, Issue 1. – P. 297-310. – doi: 10.1109/TPEL.2014.2299802.
9. **Zhuiko, V. J.** Kotelnikov double series of modulating signals with limited spectrum / **V. J. Zhuiko, I. V. Verbitskyi and A. G. Kyselova** // *2014 IEEE International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS)*. Kyiv. – 2014. – P. 18-20. – doi: 10.1109/IEPS.2014.6874177.
10. **Вербицкий, Е. В.** Использование двойного ряда Фурье для расчета спектра модулированных сигналов / **Е. В. Вербицкий** // *Технічна електродинаміка*. – 2014. – № 4. – с. 96-98.
11. **Verbytskyi, I.** Spectrum calculation of frequency pulse modulation voltage using double Fourier series / **I. Verbytskyi** // *IEEE 3rd Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering (AIEEE)*, Riga. – 2015. – p. 1-4. – doi: 10.1109/AIEEE.2015.7367287.
12. **Bing, Z.** Frequency-Domain Modeling of Multipulse Converters by Double-Fourier Series Method / **Z. Bing, J. Sun** // *IEEE Transactions on Power Electronics*. – 2011. – Vol. 26, Issue 12. – P. 3804-3809. – doi: 10.1109/TPEL.2011.2105504.
13. **Rokhlin, Vladimir.** Fast Algorithms for spherical harmonic expansions / **Vladimir Rokhlin, Mark Tygert** // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2006. – Vol. 27, No. 6. – P. 1903–1928. – doi: 10.1137/050623073.
14. **Rockmore, Daniel N.** Recent Progress and Applications in Group FFTs / **Daniel N. Rockmore, Jim Byrnes** // *Computational Noncommutative Algebra and Applications*. *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*. Springer Netherlands. – 2004. – Vol. 136. – P. 227-254. – doi:10.1007/1-4020-2307-3_9.
15. **Liu, Q. H.** An accurate algorithm for nonuniform fast Fourier transforms (NUFFT's) / **Q. H. Liu, N. Nguyen** // *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*. – 1998. – Vol. 8, Issue 1. – P. 18-20. – doi: 10.1109/75.650975.

Bibliography (transliterated)

1. **Holmes, D. Grahame, Lipo, Thomas A.** Pulse width modulation for power converters. Principles and practice. *IEEE Press Series on Power Engineering*, 2003, 724 p., doi: 10.1109/9780470546284.
2. **Vasca, F., Iannelli, L.** Dynamics and Control of Switched Electronic Systems: Advanced Perspectives for Modeling, Simulation and Control of Power Converters (Advances in Industrial Control). *Springer-Verlag London*, 2012, 493 p., doi: 10.1007/978-1-4471-2885-4.
3. **McGrath, Brendan Peter, Holmes, Donald Grahame.** Natural Capacitor Voltage Balancing for a Flying Capacitor Converter Induction Motor Drive. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2009, 24, 6, 1554-1561, doi: 10.1109/TPEL.2009.2016567.
4. **Cortés, J., Šviković, V., Alou, P., Oliver, J., Cobos, J., Wisniewski, R.** Accurate Analysis of Subharmonic Oscillations of V^2 and V^2I_c Controls Applied to Buck Converter. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2015, 30, 2, 1005-1018, doi: 10.1109/TPEL.2014.2308015.
5. **Giaouris, D., Maity, S., Banerjee, S., Pickert, V., Zahawi, B.** Application of Filippov method for the analysis of subharmonic instability in dc–dc converters. *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2009, 37, 8, 899-919, doi: 10.1002/cta.505.
6. **Bierhoff, Michael H., Fuchs, Friedrich Wilhelm.** DC-Link Harmonics of Three-Phase Voltage-Source Converters Influenced by the Pulsewidth-Modulation Strategy—An Analysis *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, 55, 5, 2085 – 2092, doi: 10.1109/TIE.2008.921203.
7. **Jiang, S. Z., Chau, K. T., Chan, C. C.** Spectral analysis of a new six-phase pole-changing induction motor drive for electric vehicles. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2003, 50, 1, 123-131, doi: 10.1109/TIE.2002.807662.
8. **Li, Binbin, Yang, Rongfeng, Xu, Dandan, Wang, Gaolin, Wang, Wei, Xu, Dianguo.** Analysis of the Phase-Shifted Carrier Modulation for Modular Multilevel Converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2015, 30, 1, 297-310, doi: 10.1109/TPEL.2014.2299802.
9. **Zhuiko, V. J., Verbitskyi, I. V., Kyselova, A. G.** Kotelnikov double series of modulating signals with limited spectrum *2014 IEEE International Conference on Intelligent Energy and Power Systems (IEPS)*. Kyiv, 2014, 18-20, doi: 10.1109/IEPS.2014.6874177.
10. **Verbytskyi, Ye. V.** Ispol'zovaniye dvoynogo ryada Fur'ye dlya rascheta spektra modulirovannykh signalov [Double Fourier series using for calculating modulating signals spectrum]. *Tekhnichna elektrodynamika [Technical electrodynamic]*, 4, 2014, 96-98.
11. **Verbytskyi, I.** Spectrum calculation of frequency pulse modulation voltage using double Fourier series. *IEEE 3rd Workshop on Advances in Information, Electronic and Electrical Engineering (AIEEE)*, Riga, 2015, 1-4, doi: 10.1109/AIEEE.2015.7367287.
12. **Bing, Z., Sun, J.** Frequency-Domain Modeling of Multipulse Converters by Double-Fourier Series Method. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 2011, 26, 12, 3804-3809, doi: 10.1109/TPEL.2011.2105504.

13. **Rokhlin, Vladimir, Tygert, Mark.** Fast Algorithms for spherical harmonic expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2006, **27**, 6, 1903–1928, doi: 10.1137/050623073.
14. **Rockmore, Daniel N., Byrnes, Jim.** Recent Progress and Applications in Group FFTs. *Computational Noncommutative Algebra and Applications. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. Springer Netherlands*, 2004, **136**, 227-254, doi:10.1007/1-4020-2307-3_9.
15. **Liu, Q. H., Nguyen, N.** An accurate algorithm for nonuniform fast Fourier transforms (NUFFT's). *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 1998, **8**, 1, 18-20, doi: 10.1109/75.650975.

Відомості про авторів (About authors)

Вербицький Євген Володимирович – кандидат технічних наук, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», доцент кафедри промислової електроніки; м. Київ, Україна; e-mail: verbitskiy@bigmir.net.

Ievgen Verbitskiy – Ph. D., asociated professor, Department of Industrial Electronics, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine; e-mail: verbitskiy@bigmir.net.

Будь ласка, посилайтеся на цю статтю наступним чином:

Вербицький, Є. В. Швидке перетворення Фур'є модульованих сигналів, представлених рядом Фур'є двох змінних / **Є. В. Вербицький** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях.* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2018. – № 16 (1292). – С. 102-106. – doi:10.20998/2413-4295.2018.16.15.

Please cite this article as:

Verbitskiy, I. A fast Fourier transform of modulated signals based on double Fourier series. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies.* – Kharkiv: NTU "KhPI", 2018, **16** (1292), 102-106, doi:10.20998/2413-4295.2018.16.15.

Пожалуйста, ссылайтесь на эту статью следующим образом:

Вербицкий, Е. В. Быстрое преобразование Фурье модулированных сигналов, представленных рядом Фурье двух переменных / **Е. В. Вербицкий** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серія: Новые решения в современных технологиях.* – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2018. – № 16 (1292). – С. 102-106. – doi:10.20998/2413-4295.2018.16.15.

АННОТАЦИЯ В статье описан принцип представления модулированных сигналов на основе ряда Фурье двух переменных. Показаны преимущества независимого описания несущей и модулирующей функций. Приведены формулы расчета спектральных составляющих и гармоник на основе ряда Фурье двух переменных. Получены дискретизированные формулы для расчета спектра на основе ряда Фурье одной и двух переменных. Показана целесообразность использования формул быстрого преобразования Фурье для уменьшения объема математических расчетов. Проведено адаптацию методики быстрого преобразования Фурье к для расчета спектра модулированных сигналов на основе ряда Фурье двух переменных, для чего дополнительно осуществляется процедура суммирования и перегруппировки гармоник по номеру. Проведен анализ трудоемкости расчетов по предлагаемой методике расчета спектра и показано в сколько раз она уменьшается по сравнению с непосредственным расчетом спектра по начальным формулами.

Ключевые слова: ряд Фурье двух переменных быстрое преобразование Фурье; модулированный сигнал.

Надійшла (received) 01.05.2018