УДК 539.3

А.А.ЗОЛОЧЕВСКИЙ, докт.техн.наук; Норвежский ин-т науки и техники;
С.Н.СКЛЕПУС, канд.физ.-мат.наук; ИПМаш НАН Украины

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В статті розглянута варіаційне формулювання задачі повзучості при великих деформаціях. На базі матеріального підходу Лагранжа, принципу віртуальної роботи а також тензорів швидкостей деформацій Гріна-Лагранжа та швидкостей напружень Піола-Кірхгоффа отримано варіаційний принцип в формі Лагранжа. Рівняннями Ейлера для функціонала Лагранжа є лінеаризовані рівняння рівноваги тіла та статичні граничні умови, записані відносно швидкостей переміщень.

A variational formulation for creep problem under conditions of large strains is considered. On the base of material Lagrangian formulation, principle of virtual work and Green-Lagrange strain rate tensor and symmetric Piola-Kirhgoff stress rate tensor variational principle in the form of Lagrange have been formulated. The linearized equilibrium equations and static boundary conditions in terms of rates of displasements are the Eulerian's equations for Lagrange functional.

Прикладные задачи, возникающие при рассмотрении различных технологических процессов, а также широкое применение в современной технике пластмасс, полимеров, композитных материалов различной структуры часто приводят к физически и геометрически нелинейным задачам ползучести. Современный математический аппарат не позволяет получить точное решение подобных задач, что требует создания новых математических моделей, эффективных методов линеаризации и решения линеаризованных задач. Для получения обобщенного решения краевых задач в механике деформируемого твердого тела широкое распространение получили вариационные формулировки краевых задач [1-5]. Различные формулировки для инкрементальной теории пластичности и ползучести приведены в работах [6-11]. К преимуществу вариационных формулировок можно отнести возможность понижения порядка производных в дифференциальных операторах краевой задачи, что позволяет расширить класс функций, в котором отыскивается приближенное решение задачи. Важнейшим этапом применения вариационного подхода является построение функционала, уравнениями Эйлера которого являются все или часть уравнений исходной краевой задачи. При этом на решении краевой задачи функционал принимает стационарное значение. Методы определения функций, доставляющих функционалу стационарное значение, достаточно математически обоснованы и описаны в литературе [12]. Общий подход к построению функционалов для нелинейных задач механики сплошной среды в настоящее время отсутствует. В частности, в литературе недостаточно представлены вариационные формулировки для задач ползучести при конечных деформациях, пригодные для решения широкого круга прикладных задач с достаточной практической точностью.

Целью данной статьи является построение вариационной формулировки в форме Лагранжа для задачи ползучести с учетом конечных деформаций.

Для исследования ползучести тел произвольной геометрической формы будем использовать материальный (лагранжев) подход. При этом положение каждой материальной частицы тела, в произвольный момент времени $t \neq 0$, в актуальной (деформированной) и в отсчетной (недеформированной) конфигурациях по отношению к системе отсчета определяется радиус-векторами:

$$\mathbf{r} = X_i\left(x_1, x_2, x_3,\ t\right)\mathbf{k}_i\ ,\ \mathbf{r}_0 = x_i\mathbf{k}_i,\quad \left(i = \overline{1,3}\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{k}_i$ – базисные векторы единой для всех конфигураций прямоугольной декартовой системы координат $0x_10x_20x_3$.

Вектор перемещений вводится следующим образом

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0} = u_i\mathbf{k}_i\ , \tag{2}$$

где $u_i(x_1, x_2, x_3, t) = (X_i - x_i)$ – перемещения точек тела вдоль осей $0x_1, 0x_2, 0x_3$ соответственно. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Транспонированный градиент места в актуальной конфигурации называется градиентом деформации и обычно обозначается как F [13]:

$$F = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right] = \left[\delta_{ij} + u_{i,j}\right],\ \left(i, j = \overline{1,3}\right)\ , \tag{3}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Отметим соотношение

$$FF_0 = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right]\left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = [I], \tag{4}$$

где $[I]$ – единичная матрица.

Из (4) следует, что градиент места в отсчетной конфигурации может быть найден следующим образом:

$$F_0 = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right] = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right]^{-1}. \tag{5}$$

Пусть рассматриваемое тело в естественном (ненапряженном и недеформированном) состоянии занимает область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Координаты $\mathbf{x} = (x_i)$ примем за лагранжевы материальные координаты точек тела. Данная система отсчета не зависит от времени и служит для фиксации начальной конфигурации сплошной среды. Тело закреплено на части поверхности S_u и нагружено поверхностными силами на части поверхности S_p, объемные силы отсутствуют. Обозначим через $\mathbf{P} = P_i(x_1,x_2,x_3,t)\mathbf{k}_i$ вектор поверхностной нагрузки, которая приложена к единице площади поверхности тела. Функция $\mathbf{P}$ зависит от времени и лагранжевых координат и предполагается непрерывно дифференцируемой по всем аргументам

Предположим, что упругие деформации в процессе ползучести остаются малыми и выполняется аддитивное разложение компонентов тензора скоростей полных деформаций, которое в отсчетной и актуальной конфигурациях имеет соответственно следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{p}_{ij}, \tag{6}$$

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}^e_{ij} + \dot{e}^c_{ij}, \tag{7}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей конечных деформаций Грина-Лагранжа, $\dot{\varepsilon}^e_{ij}, \dot{e}^e_{ij}, \dot{p}_{ij}, \dot{e}^c_{ij}$ – компоненты тензоров скоростей упругих деформаций и деформаций ползучести в отсчетной и актуальной конфигурациях. Здесь и далее точка над символом означает полную (материальную) производную по времени. Компоненты тензоров скоростей полных деформаций в отсчетной и актуальной конфигурациях определяются по формулам:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = 0{,}5\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + u_{k,i}\dot{u}_{k,j} + u_{k,j}\dot{u}_{k,i}\right), \left(i, j, k = \overline{1{,}3}\right). \tag{8}$$

$$\dot{e}_{ij} = 0{,}5\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i}\right). \tag{9}$$

Связь между $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и $\dot{e}_{ij}$ имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_l}{\partial x_j}\dot{e}_{kl}, \tag{10}$$

или в обратной форме

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_l}{\partial X_j}\dot{\varepsilon}_{kl}. \tag{11}$$

Пусть деформирование тела происходит либо адиабатически, либо изотермически. Распределения напряжений и перемещений в начальный момент времени считаются заданными. В этом случае напряженно-деформированное состояние в теле при заданной внешней нагрузке, в произвольный момент времени $t \neq 0$, однозначно определяется тремя группами уравнений. Первая группа – уравнения связи между скоростями полных деформаций, скоростями перемещений и перемещениями (8). Компоненты симметричного тензора конечных деформаций Грина-Лагранжа $\underline{\varepsilon}$ связаны с перемещениями нелинейными соотношениями [13]

$$\varepsilon_{ij} = 0{,}5\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right). \tag{12}$$

Вторая – представляет собой уравнения состояния:

$$\dot{\tau}_{ij} = \dot{\tau}_{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{kl};\, \dot{p}_{kl}\right), \left(i, j, k, l = \overline{1{,}3}\right). \tag{13}$$

Рассматривая $\dot{p}_{kl}$ как параметры, уравнения (13) запишем в виде

$$\dot{\tau}_{ij} = \dot{\tau}_{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}\right) = \dot{\tau}_{ij}\left(\dot{\varepsilon}^e_{kl}\right).$$

Здесь $\underline{\tau} = \tau_{ij}$ – симметричный тензор напряжений Пиола-Кирхгоффа; $\underline{\sigma} = \sigma_{ij}$ – тензор истинных напряжений Коши. Тензор $\underline{\tau}$ вводится через тензор напряжений Коши $\underline{\sigma}$ следующим образом [2,13]:

$$\tau_{ij} = J\sigma_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial X_k}\frac{\partial x_j}{\partial X_l}, \left(i, j, k, l = \overline{1{,}3}\right), \tag{14}$$

$$\sigma_{ij} = J^{-1} \tau_{kl} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l}, \quad (15)$$

где величина J представляет собой отношение объема элемента тела после деформации к его объему до деформации и определяется по формуле [2,13]: $J = \det F$.

И наконец третья группа – это уравнения равновесия и граничные условия, записанные для скоростей [2]:

$$\frac{d}{dt}\left[\tau_{kj}\left(\delta_{ik} + u_{i,k}\right)\right]_{,j} =$$
$$= \left(\delta_{ij} + u_{i,j}\right)\dot{\tau}_{kj,k} + u_{i,jk}\dot{\tau}_{kj} + \tau_{kj}\dot{u}_{i,jk} + \tau_{kj,k}\dot{u}_{i,j} = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{\Omega}; \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\tau_{kj}\left(\delta_{ik} + u_{i,k}\right)\right] n_j =$$
$$= \left[\dot{\tau}_{kj}\left(\delta_{ik} + u_{i,k}\right) + \tau_{kj}\dot{u}_{i,k}\right] n_j = \dot{P}_i, \mathbf{x} \in S_p, \quad (17)$$

где n_j – компоненты единичного вектора **n**, направленного по внешней нормали к поверхности тела $\partial\Omega$ в рассматриваемой ее точке.

Если связь между скоростями напряжений и деформаций является тензорно линейной, то уравнения (16), (17) оказываются линеаризованными. Здесь перемещения и напряжения считаются заданными.

Вариационные принципы теории ползучести основываются на принципе виртуальной работы и введении потенциального представления скоростей напряжений. Принцип виртуальной работы для квазистатических задач записывается в виде [2]:

$$\iiint_{\Omega}\left[\dot{\tau}_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \tau_{ij}\dot{u}_{k,i}\delta\dot{u}_{k,j}\right]d\Omega - \iint_{S_p}\dot{P}_i\delta\dot{u}_i dS = 0, \quad (18)$$

где скорости перемещений $\dot{u}_i \left(i = \overline{1,3}\right)$ удовлетворяют кинематическим граничным условиям на S_u. Предполагается, что тело находится в равновесии и удовлетворяются соотношения (8). Принцип виртуальной работы выполняется безотносительно к конкретному виду соотношений напряжения–деформации.

Полагаем, что связь между скоростями упругих деформаций и скоростями напряжений задана в виде линейной формы:

$$\dot{\tau}_{ij} = A_{ijkl}\dot{\varepsilon}^e_{kl}, \quad (19)$$

или

$$\dot{\varepsilon}^e_{ij} = A^{-1}_{ijkl}\dot{\tau}_{kl}. \quad (20)$$

Здесь коэффициенты $A_{ijkl}, A^{-1}_{ijkl}, \left(i, j, k, l = \overline{1,3}\right)$ являются функционалами напряженно-деформированного состояния.

Уравнения (19), с учетом (6), запишутся в виде

$$\dot{\tau}_{ij} = A_{ijkl}\dot{\varepsilon}^e_{kl} = A_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}\right). \quad (21)$$

Если $A_{ijkl} = A_{klij}$, то соотношения (21) удовлетворяют условиям:

$\frac{\partial \dot{\tau}_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}^e_{kl}} = \frac{\partial \dot{\tau}_{kl}}{\partial \dot{\varepsilon}^e_{ij}}$, откуда следует, что $dU^e = \dot{\tau}_{ij} d\dot{\varepsilon}^e_{ij}$ есть полный дифференциал и существует функция состояния

$$U^e\left(\dot{\varepsilon}^e_{ij}\right) = \frac{1}{2}\dot{\tau}_{ij}\dot{\varepsilon}^e_{ij} = \frac{1}{2}A_{ijkl}\dot{\varepsilon}^e_{ij}\dot{\varepsilon}^e_{kl}. \qquad (22)$$

Квадратичная форма (22) должна быть положительно определенной.

Далее перейдем к определению коэффициентов A_{ijkl} в уравнениях состояния (19). Соотношения (19) сформулированы относительно скоростей напряжений Пиола-Кирхгоффа, а определяющие соотношения для упругих деформаций обычно формулируются с применением тензора истинных напряжений Коши. Материальная производная тензора напряжений Коши $\dot{\underline{\sigma}}$ не удовлетворяет свойству индифферентности по отношению к жестким движениям среды [13]. В связи с этим, в геометрически нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела получили распространение относительные скорости изменения тензоров напряжений, позволяющие исключить изменение последних, обусловленное движениями среды как жесткого целого [13-16].

Одной из производных, индифферентных к жестким движениям среды является производная Трусделла [2,13-16]. Производная Трусделла тензора напряжений Коши связана с субстанциональной производной тензора Пиола–Кирхгоффа соотношением, аналогичным соотношению (14) [2,13]:

$$\dot{\tau}_{ij} = J\sigma^{Tr}_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial X_k}\frac{\partial x_j}{\partial X_l}, \left(i,j,k,l=\overline{1,3}\right), \qquad (23)$$

где

$$\sigma^{Tr}_{ij} = J^{-1}\dot{\tau}_{kl}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial X_j}{\partial x_l} =$$

$$= \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_r}\sigma_{rj} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_r}\sigma_{ir} + \left(\frac{\partial \dot{u}_s}{\partial X_s}\right)\sigma_{ij}, \quad \left(i,j,k,l,r,s=\overline{1,3}\right). \qquad (24)$$

Производная Трусделла связана с другой часто используемой производной Яуманна-Нолла, соотношением [2,14,15]:

$$\sigma^{Tr} = \sigma^J - \sigma_{ik}\dot{e}_{jk} - \sigma_{jk}\dot{e}_{ik} + \sigma_{ij}\left(\dot{e}_{kk}\right), \qquad (25)$$

где $\sigma^J = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ir}\dot{\omega}_{rj} - \sigma_{jr}\dot{\omega}_{ri}$, $\dot{\omega}_{ij} = 0{,}5\left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} - \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j}\right)$.

Для конкретизации уравнений (19) постулируем связь между σ^{Tr}_{kl} и $\dot{e}^e_{ij}$ в виде

$$\sigma^{Tr}_{kl} = A^*_{klrs}\left(\dot{e}_{rs} - \dot{e}^c_{rs}\right), \qquad (26)$$

где A^*_{klrs} –симметричный тензор упругих постоянных. В случае изотропного материала тензор A^*_{klrs} может быть представлен в виде

$$A^*_{klrs} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\left(\delta_{kr}\delta_{ls} + \delta_{ks}\delta_{lr}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{kl}\delta_{rs}\right]. \qquad (27)$$

Подставляя (26) в (23) и учитывая (11) получим

$$\dot{\tau}_{ij} = A_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}\right), \tag{28}$$

где

$$A_{ijkl} = JA^{*}_{mnrs}\frac{\partial x_i}{\partial X_m}\frac{\partial x_j}{\partial X_n}\frac{\partial x_k}{\partial X_r}\frac{\partial x_l}{\partial X_s}. \tag{29}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $A_{ijkl} = A_{klij}$ и тем самым существование функции состояния (22) гарантируется.

Если функция состояния (22) существует и скорости внешних нагрузок не зависят от скоростей перемещений, то принцип виртуальных перемещений может быть приведен к вариационным формулировкам.

При формулировке принципа Лагранжа предполагаются, что выполняются кинематические граничные условия на S_u: $\dot{u}_i = \dot{g}_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right)$, уравнения связи скоростей деформаций и перемещений (8) и уравнения состояния (21). Тогда из принципа виртуальной работы будем иметь:

$$\delta\Lambda\left(\dot{u}_i\right) = 0, \tag{30}$$

где

$$\Lambda\left(\dot{u}_i\right) = 0{,}5\iiint\limits_{\Omega}\left[A_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{p}_{ij}\right)\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}\right) + \tau_{ij}\dot{u}_{k,i}\dot{u}_{k,j}\right]d\Omega - \iint\limits_{S_p}\dot{P}_i\dot{u}_i dS. \tag{31}$$

Вариационное уравнение (30) выражает экстремальные свойства мгновенного значения поля скоростей перемещений. Обращение в нуль первой вариации функционала эквивалентно выполнению линеаризованных уравнений равновесия и статических граничных условий, записанных относительно скоростей перемещений. Здесь компоненты тензора скоростей деформации ползучести $\dot{p}^{c}_{ij}$ и напряжения τ_{ij} рассматриваются как параметры, не подлежащие варьированию. Основные неизвестные задачи ползучести (перемещения, деформации, напряжения) могут быть найдены с помощью процедуры интегрирования полей скоростей.

Скорости деформаций ползучести зависят от напряжений, температуры и некоторого числа параметров состояния q_i и не зависят от скоростей напряжений и деформаций. Общая форма записи определяющих соотношений для деформаций ползучести была предложена в работе [3]:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}, \tag{32}$$

где $\Phi = \Phi\left(\tau_{ij}, q_1, q_2, \ldots, q_N, T\right)$ – потенциальная функция, зависящая от компонентов тензора напряжений, параметров состояния q_k и температуры T. Уравнения течения (32) должны быть дополнены кинетическими уравнениями для параметров состояния вида

$$\dot{q}_k = f_k\left(q_k, \tau_{ij}, p_{ij}, t, T\right), \left(k = \overline{1,N}\right). \tag{33}$$

Как правило, для большинства материалов, определяющие соотношения для деформаций ползучести существенно нелинейны по отношению к напряжениям, параметрам состояния и температуре.

Следует заметить, что в современной литературе практически отсутствуют, необходимые для построения определяющих соотношений теории ползучести, экспериментальные данные о реологических свойствах материалов при больших деформациях. Поэтому проблема построения определяющих соотношений теории ползучести при больших деформациях требует дополнительного рассмотрения.

Список литературы: **1.** *Бердичевский В.Л.*. Вариационные принципы механики сплошной среды – М: Наука, 1983. – 448 с. **2.**. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности.– М.: Мир, 1987.– 542 с. **3.** *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. **4.** *Койтер В.Т.* Общие теоремы теории упругопластических сред. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 80 с. **5.** *Одэн Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с. **6.** *Kleiber M.* Lagrangian and eulerian finite element formulation for large strain elasto-plasticity // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn. 1975. – Vol. 23. № 3. – P. 109-126. **7.** *Bathe K.-J, Ozdemir H.* Elastic-plastic large deformation. Static and dynamic analysis // Computers & Structures. 1976. – Vol. 6. – P. 81-92. **8.***Christman T, Needleman A., Suresh S.* An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites // Acta metall. 1989. – Vol. 37. № 11. – P. 2029-3050. **9.** *Sorensen N.* A planar model study of creep in metal matrix composites with misaligned short fibres // The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics (DCAMM). Report No. 449. October 1992. – 18 p. **10.** *Brünig M.* Numerical analysis and large strain elastic-viscoplastic behavior of hydrostatic stress-sensitive metals // Int. Journal of Solids and Structures. 2001. – 38. – P. 635-656. **11.** *Voyiadjis G.Z., Kim D.* Finite element analysis of the piezocone test in cohesive soils using an elastoplastic-viscoplastic model and updated Lagrangian formulation // Int. Journal of Plasticity. 2003. – 19. – P. 253-280. **12.** *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с. **13.** *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упруго-пластические деформации. – М.: Наука, 1986. – 232 с. **14.** *Prager, W.* An elementary discussion of definitions of stress rate // Quaterly of Applied Mathematics. 1960. Vol.XVIII. P. 403–407. **15.** *Hibbitt, H.D., Marcal, P.V., Rice, J.R.* A finite element formulation of large strain and large displacement // Int. J. Solids Structures. 1970. – Vol.6. – P. 1069-1086. **16.** *Gadala, M.S., Dokanish, M.A., Oravas, G.A.* Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems // Int. J. for Num. Meth. in Engineering, 1984. – Vol.20. – P. 887-914.

Поступила в редколлегию 28.05.04

УДК 621. 833.01

А.Ф.КИРИЧЕНКО, докт.техн.наук; ***В.А.БЕРЕЖНОЙ***; НТУ «ХПИ»

ПЕРСПЕКТИВЫ УЛУЧШЕНИЯ РАБОТЫ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ПРЯМОЗУБЫХ ПЕРЕДАЧ

Розглядається пружно-деформований стан прямозубих коліс. Виконується розрахунок об'ємного пружно-деформованого стану методом скінченних елементів. Приведені результати розрахунків модифікованих прямозубих коліс з отвором уздовж осьової лінії зуба.

Stress strain states of spur gears are studied. Gear tooth calculation of volumetric stress strain state by method of finite element is performed. The calculation results of modification spur gears with by orifice along tooth axis.