

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
“ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ”

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам

«Символьные вычисления и дифференциальные уравнения в системе MathCAD»

из раздела «Использование программ в среде Windows»

дисциплины «Основы программирования

и информационных технологий»

для студентов направления подготовки

6.050801 «Микро- и нанoeлектроника»

Методические указания к лабораторным работам «Символьные вычисления и дифференциальные уравнения в системе MathCAD» из раздела «Использование программ в среде Windows» дисциплины «Основы программирования и информационных технологий» для студентов направления подготовки 6.050801 «Микро- и наноэлектроника» / Состав.: Р.В. Зайцев, Е.А. Лукьянов, М.В. Кириченко. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2014. – 59 с.

Составители: Р.В. Зайцев
Е.А. Лукьянов
М.В. Кириченко

Рецензент доц. И.В. Федорин

Кафедра физического материаловедения для электроники и гелио-энергетики

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к лабораторным работам по разделу «Использование программ в среде Windows» дисциплины «Основы программирования и информационных технологий» касаются двух лабораторных работ: «Символьные вычисления в системе MathCAD» и «Решение дифференциальных уравнений».

Универсальная математическая система MathCAD является одной из лучших систем для научно-технических вычислений. В среде Mathcad доступны более сотни операторов и логических функций, предназначенных для численного и символьного решения технических проблем различной сложности. Она имеет мощные средства для реализации численных методов расчета, возможность выполнения многих операций символьной математики. Исходные данные и результаты вычислений представляются в естественном математическом виде.

Mathcad содержит:

- обширную библиотеку встроенных математических функций;
- инструменты построения графиков различных типов;
- средства создания текстовых комментариев и оформления отчетов;
- конструкции, подобные программным конструкциям языков программирования, позволяющие писать программы для решения задач, которые невозможно или очень сложно решить стандартными инструментами пакета;
- удобно организованную интерактивную систему получения справки и оперативной подсказки.

Программные средства такого рода называют универсальными математическими пакетами, системами или средами. Как в электронных таблицах, любое изменение содержимого рабочего документа MathCAD вызывает обновление всех зависимых результатов и перерисовку графиков. Объединяя в одном рабочем листе текст, графику и математические выкладки, Mathcad облегчает понимание самых сложных технических вычислений.

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ MathCAD

Цель работы – Научиться работать с программой MathCAD. Проводить символьные вычисления с использованием программы MathCAD.

1.1 Общие сведения

1.1.1 Символьные вычисления с использованием программы MathCAD. Команды меню Symbolics

Возможности символьного процессора **MathCAD**. Системы компьютерной алгебры снабжаются специальным процессором для выполнения аналитических (символьных) вычислений. Его основой является ядро, хранящее всю совокупность формул и формульных преобразований, с помощью которых производятся аналитические вычисления. Символьные вычисления в **MathCAD** могут быть реализованы тремя способами:

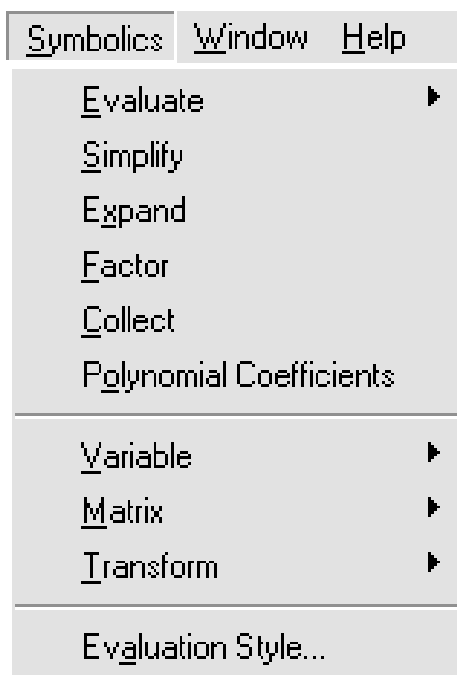


Рисунок 1.1 – Команды меню **Symbolics**

- С использованием команд подменю позиции **Symbolics** (**Символика**) главного меню, приведенного на рис 3.1.
- С использованием команд панели **Symbolic**, включаемой кнопкой на математической панели инструментов.
- С использованием команды **Optimization** главного меню **Math**.

Команды меню **Symbolics**:

- Для символьных вычислений выражения необходимо указывать явно. Недопустимо вводить некоторую функцию пользователя $F(x)$ и пытаться найти ее производные или интеграл. Это существенное ограничение, о котором надо всегда помнить. Однако оно преодолимо при выполнении вычислений с помощью функций системы **SmartMath**. Для вывода сим-

вольных вычислений в этом случае используется оператор \rightarrow (**Ctrl + . – Ctrl_Point**).

- Если операция невыполнима - система выводит сообщение об ошибке или просто повторяет выделенное выражение (без изменений)
- В качестве минуса при работе с командами меню **Symbolics** следует отметить не очень наглядную визуализацию процесса вычислений. Хотя при установке определенных параметров стиля эволюции выражений можно вывести некоторые комментарии.

Символьные операции разбиты на четыре характерных раздела. Первыми идут наиболее часто используемые операции. Они могут выполняться с выражениями, содержащими комплексные числа или имеющими решения в комплексном виде.

Основные символьные операции приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 1.1 - Основные символьные операции MathCAD

<i>Оператор</i>	<i>Назначение оператора</i>
Evaluate (Вычислить)	преобразовать выражение с выбором вида преобразований из подменю
Simplify (Упростить)	упростить выделенное выражение с выполнением таких операций, как сокращение подобных слагаемых, приведение к общему знаменателю, использование основных тригонометрических тождеств и т. д.
Expand (Разложить по степеням)	раскрыть выражение [например, для $(X + Y) \cdot (X - Y)$ получаем $X^2 - Y^2$]
Factor (Разложить на множители)	разложить число или выражение на множители. Например, $X^2 - Y^2$ даст $(X + Y) \cdot (X - Y)$
Collect (Разложить по подвыражению)	собрать слагаемые, подобные выделенному выражению, которое может быть отдельной переменной или функцией со своим аргументом (результатом будет выражение, полиномиальное относительно выбранного выражения)
Polynomial Coefficients (Полиномиальные коэффициенты)	найти коэффициенты полинома по заданной переменной, приближающего выражение, в котором эта переменная использована

Команды выполняются следующим образом. Выделяется необходимое выражение и в меню **Symbolics** выбирается необходимая команда. Если операция выполнима, то рядом, или ниже выделенного выражения появляется результат выполнения операции.

Evaluate (Вычислить)

Эта операция содержит подменю со следующими командами:

- **Evaluate Symbolically [Shift+F9] (Вычислить в символах)** — выполнить символьное вычисление выражения;
- **Floating Point Evaluation... (С плавающей точкой)** — выполнить арифметические операции в выражении с результатом в форме числа с плавающей точкой;
- **Complex Evaluation (В комплексном виде)** — выполнить преобразование с представлением в комплексном виде.

Команда **Evaluate Symbolically** наиболее важная. Назначение других команд очевидно: они нужны, если результат требуется получить в форме комплексного или действительного числа. К примеру, если вы хотите вместо числа π получить 3.141..., используйте команду **Floating Point Evaluation**.

Символьная операция **Evaluate Symbolically [Shift+F9] (Вычислить)** обеспечивает работу с математическими выражениями, содержащими встроенные в систему функции и представленными в различном виде: полиномиальном, дробно-рациональном, в виде сумм и произведений, производных и интегралов и т. д. Операция стремится произвести все возможные численные вычисления и представить выражение в наиболее простом виде. Она возможна над матрицами с символьными элементами. Производные и определенные интегралы, символьные значения которых вычисляются, должны быть представлены в своей естественной форме. Особо следует отметить возможность выполнения численных вычислений с повышенной точностью — 20 знаков после запятой. Для перехода в такой режим вычислений нужно числовые константы в вычисляемых объектах задавать с обязательным указанием десятичной точки, например 10.0 или 3.0, а не 10 или 3. Этот признак является указанием на проведение вычислений такого типа.

$$\sum n^2 \quad \frac{1}{3} \cdot n^3 - \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$
$$\frac{d^2}{dx^2} \tan(x) \quad 2 \cdot \tan(x) \cdot \{1 + \tan(x)^2\}$$
$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{Si}(x)$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x + 2 \cdot y & y + 2 \cdot x \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y & 3 \cdot y + 4 \cdot x \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.2 – Типичные примеры символьных вычислений

Ниже, на рис. 1.2, показаны типичные примеры действия операции **Evaluate Symbolically**.

Здесь слева показаны исходные выражения, подвергаемые символьным преобразованиям, а справа — результат этих преобразований. Так представлены и другие примеры, приведенные в этом разделе.

Команда **Упростить (Simplify)** — означает замену более сложных фрагментов выражений на более простые. Приоритет тут отдается простоте функций. К примеру, функция **tan(x)** считается более

сложной, чем функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$. Поэтому $\tan(x)$ упрощается так, что получает представление через соотношение функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$, что несколько неожиданно, так как в некоторых пакетах символьной математики, например **Derive**, ситуация иная: они заменяют отношение $\sin(x)/\cos(x)$ функцией $\tan(x)$.

$$\frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{x^2 - 3x - 4} + 2x - 5 = 3x - 4$$

$$\frac{d}{dx} \sin(3x) = 3 \cdot \cos(3x)$$

$$\int_a^b e^{-t} dt = -\exp(-b) + \exp(-a)$$

Рисунок 1.3 – Упрощение выражений

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)} dy dx = \frac{-1}{4} \ln(\sqrt{2} - 1) \cdot \pi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4 \cdot \cos(\psi)} \rho^2 \sin(\psi) d\rho d\psi d\theta = 2 \cdot \pi$$

Рисунок 1.4 – Команда **Simplify**, применительно к вычислению определенных интегралов

Операцию **Simplify** можно использовать и для вычисления сумм и произведений символьных последовательностей, как показано на рис. 1.5. Результат операции, как и следовало, получается в символьной форме (если она существует).

Expand (Разложить по степеням)

Действие операции **Expand (Разложить по степеням)** в известном смысле противоположно действию операции **Simplify**.

Эта команда открывает широкие возможности для упрощения сложных и плохо упорядоченных алгебраических выражений. На рисунке 1.3 даны примеры применения операции **Simplify**.

Система **MathCAD** содержит встроенную функцию для вычисления значений определенных интегралов приближенным численным методом. Ею целесообразно пользоваться, когда нужно просто получить значение определенного интеграла в виде числа.

Однако команда **Simplify** применительно к вычислениям определенных интегралов делает гораздо больше — она ищет аналитическое выражение для интеграла. Более того, она способна делать это и при вычислении кратных интегралов, пределы которых — функции. Наглядный пример этому продемонстрирован на рис. 1.4.

$$\sum_j^3 j^3 = \frac{1}{4} \cdot 4^4 - \frac{1}{2} \cdot 3^4 + \frac{1}{4} \cdot 2^4$$

$$\prod_k \frac{k^2}{(k-1)} = \Gamma(k) \cdot (k-1)$$

Рисунок 1.5 – Вычисление сумм и произведений

Подвергаемое преобразованию выражение расширяется с использованием известных (и введенных в символьное ядро) соотношений, например алгебраических разложений многочленов, произведений углов и т. д.

Разумеется, расширение происходит только в том случае, когда его результат однозначно возможен. Иначе нельзя считать, что действие этой операции противоположно действию операции **Simplify**. К примеру, операция **Simplify** преобразует сумму квадратов синуса и косинуса в 1, тогда как обратное преобразование многозначно и потому в общем виде невыполнимо.

$$\begin{array}{l} \sin(5 \cdot x) \\ (x - y)^2 \cdot (x + y) \\ (a + b)^n \\ \prod_n \frac{1}{n^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} 16 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^4 - 12 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^2 + \sin(x) \\ x^3 - x^2 \cdot y - x \cdot y^2 + y^3 \\ (a + b)^n \\ \frac{1}{\Gamma(n)^2} \end{array}$$

Рисунок 1.6 – Преобразование выражения с помощью операции **Expand**

Результатом операции **Expand** может быть специальная математическая функция, которая считается более сложным выражением, чем порождающее ее выражение. С виду, однако, выражения со специальными математическими функциями обычно выглядят гораздо проще, чем исходные выражения.

Factor (*Разложить на множители*)

Операция **Factor Expression** (**Разложить на множители**) используется для факторизации — разложения выражений или чисел на простые множители (рис. 1.7). Операция дает представление полинома через его действительные корни. В том случае, когда разложение части полинома содержит комплексно-сопряженные корни, порождающее их выражение представляется квадратичным трехчленом.

$$\begin{array}{l} x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 \\ x^3 + 11 \cdot x - 6 \cdot x^2 - 6 \\ x^3 - 6 \cdot x^2 + 21 \cdot x - 52 \\ 123456 \end{array} \quad \begin{array}{l} (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \\ x^3 + 11 \cdot x - 6 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \\ (x - 4) \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 13) \\ (2)^6 \cdot (3) \cdot (643) \end{array}$$

Рисунок 1.7 – Разложение полиномов на множители

Collect (*Разложить по подвыражению*)

Операция **Collect** (**Разложить по подвыражению**) обеспечивает замену указанного выражения выражением, скомпонованным по базису указанной переменной, если такое представление возможно. В противном

случае появляется окно с сообщением о невозможности комплектования по указанному базису.

Эта команда особенно удобна, когда заданное выражение есть функция ряда переменных и нужно представить его в виде функции заданной переменной

$$\begin{array}{ll}
 (a + b + c)^2 & a^2 + (2 \cdot b + 2 \cdot c) \cdot a + (b + c)^2 & \text{по } a \\
 (a + b + c)^2 & c^2 + (2 \cdot a + 2 \cdot b) \cdot c + (a + b)^2 & \text{по } c \\
 (y - x) \cdot (z + y) & (y - x) \cdot z + (y - x) \cdot y & \text{по } z \\
 (y - x) \cdot (z + y) & y^2 + (-x + z) \cdot y - xz & \text{по } y
 \end{array}$$

имеющей вид степенного многочлена. При этом другие переменные входят в множители указанной переменной, представленной в порядке уменьшения ее степени (см. рис. 1.8).

Рисунок 1.8 – Разложение по подвыражению (Collect).

Polynomial Coefficients (Полиномиальные коэффициенты)

Операция **Polynomial Coefficients (Полиномиальные коэффициенты)** служит для вычисления коэффициентов полинома.

Операция применяется, если заданное выражение – полином (степенной многочлен) или может быть представлено

$$\begin{array}{ll}
 ax^3 + bx^2 + cx + d & \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} & \text{относительно} \\
 & & \text{переменной } x \\
 ax^3 + bx^2 + cx + d & \begin{pmatrix} ax^3 + bx^2 + d \\ x \end{pmatrix} & \text{относительно} \\
 & & \text{переменной } c
 \end{array}$$

таким относительно выделенной переменной. Результатом операции является вектор с коэффициентами полинома, как показано на рис. 1.9. Операция полезна при решении задач полиномиальной аппроксимации и регрессии.

Рисунок 3.9 – Полиномиальные коэффициенты.

1.1.2. Палитра символьных преобразований SmartMath

Система MathCAD имеет средство оптимизации вычислений — **SmartMath**. Это фактически экспертная система, ускоряющая вычисления в тех случаях, когда это возможно. При запущенной системе **SmartMath** процессор численных операций, приступая к вычислению формульного блока, запрашивает символьный процессор о том, может ли тот произвести упрощение или иное преобразование исходной формулы. Если это возможно, то вычисления производятся уже по упрощенной формуле.

Помимо оптимизации вычислений второе важное назначение системы **SmartMath** заключается в визуализации символьных вычислений и преобразований. Система **SmartMath** более полно использует ядро символьных операций, чем символьные вычисления из подменю позиции


Symbolics главного меню, и снимает некоторые ограничения на их выполнение.

Например, возможно использование в преобразуемых выражениях функций пользователя. Еще важнее то, что результаты символьных преобразований, выполняемых системой **SmartMath**, автоматически меняются при изменении исходных символьных данных.

Для визуализации результатов символьных преобразований введен специальный символ — удлинненная горизонтальная стрелка \rightarrow . Ее можно вызвать нажатием клавиш **Ctrl+** (точка) или вызовом из палитр математических символов (для ввода отношений и символьных операций). Шаблон этого знака имеет вид $\blacksquare \rightarrow$, где на месте черного прямоугольника вводится подвергаемое символьному преобразованию исходное выражение.

Указанный символ можно рассматривать как простой оператор символьного вывода. Если задать исходное выражение и вывести курсор из формульного блока с ним, то система помещает результат его символьных преобразований после стрелки (оператора символьного вывода). Это и есть первый этап работы с системой **SmartMath**.

Еще один оператор – расширенный оператор символьного вывода. Он задается нажатием клавиш **Ctrl+Shift+** (точка) или выбором из палитры символьных операций. Этот оператор имеет вид $\blacksquare \blacksquare \rightarrow$. В первый шаблон-прямоугольник вводится исходное выражение, а во второй — директивы символьных преобразований.

При необходимости выполняемую операцию можно изменить с помощью ряда ключевых слов, помещенных на панели **Symbolic** (приведенной на рис. 1.10), которая вызывается кнопкой  с панели инструментов **Math**.

Команды панели **Symbolic** приведены в таблице 1.2.

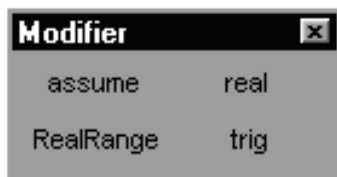
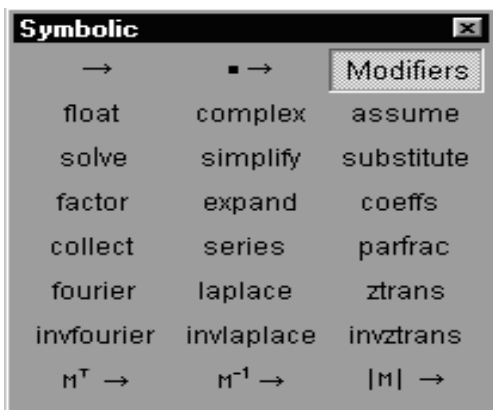


Рисунок 1.10 – Панели инструментов **Symbolic** и **Modifier**

Таблица 1.2 - Назначение и описание команд панели инструментов

Symbolic.

<i>Команда</i>	<i>Функция</i>	<i>Пример</i>
■→	Символьное вычисление	$\frac{d}{dt} \sin(t) \rightarrow \cos(t)$
■■→	Символьное вычисление с ключевым словом	$x^2 + 2 \cdot x + 1 \text{ factor} \rightarrow (x + 1)^2$
Modifier	Дополнительные модификаторы	assume — вводное слово для приведенных далее определений; real — для var = real означает вещественное значение var ; RealRange — для var = RealRange(a, b) означает принадлежность вещественной var к интервалу [a,b] ; trig — задает направление тригонометрических преобразований
float	Численное вычисление	$\ln(2) \cdot x^2 \text{ float} \rightarrow .69314718055994530942 \cdot x^2$
complex	Комплексное вычисление	$\frac{1}{a + i \cdot b} \text{ complex} \rightarrow \frac{a}{(a^2 + b^2)} - 1i \cdot \frac{b}{(a^2 + b^2)}$
assume	Символьное вычисление с некоторыми предположениями	$(\sqrt{M^2}) \left \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{assume, } M > 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{csgn}(M) \cdot M$
solve	Решение уравнения (системы уравнений) относительно переменной (переменных)	$\left(\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2 \cdot x - y = 1 \end{array} \right) \text{ solve, } \left(\begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right) \rightarrow (1 \ 1)$
simplify	Упрощение выражений	$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 \text{ simplify} \rightarrow 1$
substitute	Замена переменной	$\sqrt{1 - x^2} \text{ substitute, } x = \cos(v) \rightarrow (1 - \cos(v)^2)^{\frac{1}{2}}$
factor	Разложение на множители	$x^3 + x \text{ factor, } 2 \rightarrow x \cdot (x^2 + 1)$
expand	Перемножение степеней и произведений	$\frac{x^2 + 1}{x} \text{ expand, } x \rightarrow x + \frac{1}{x}$
coeffs	Определение коэффициентов полинома	$a \cdot x + b \text{ coeffs, } x \rightarrow \left(\begin{array}{c} b \\ a \end{array} \right)$

Продолжение таблицы 1.2 - Назначение и описание команд панели инструментов **Symbolic**.

Команда	Функция	Пример
collect	Группировка слагаемых по степеням переменной	$(3 \cdot x + y)^2$ collect, y $\rightarrow y^2 + 6 \cdot x \cdot y + 9 \cdot x^2$
series	Разложение в ряд Тейлора или Лорана	$\cos(x)$ series, x, 5 $\rightarrow 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4$
parfac	Разложение на элементарные дроби	$\frac{2}{(x^2 - 1)}$ convert, parfrac, x $\rightarrow \frac{1}{(x - 1)} - \frac{1}{(x + 1)}$
fourier	Преобразование Фурье	e^{-2x} fourier, t complex $\rightarrow 2 \cdot \exp(-2 \cdot x) \cdot \pi \cdot \text{Dirac}(\omega)$
invfourier	Обратное преобразование Фурье	$2 \cdot \exp(-2 \cdot x) \cdot \pi \cdot \text{Dirac}(\omega)$ invfourier, ω simplify $\rightarrow \exp(-2 \cdot x)$
laplace	Преобразование Лапласа	$\cos(a \cdot t)$ laplace, t $\rightarrow \frac{s}{(s^2 + a^2)}$
invlaplace	Обратное преобразование Лапласа	$\frac{s}{(s^2 + a^2)}$ invlaplace, s $\rightarrow \cos(a \cdot t)$
ztrans	Z-преобразование	1 ztrans, n $\rightarrow \frac{z}{(z - 1)}$
invztrans	Обратное Z-преобразование	$\frac{z}{(z - 1)}$ invztrans, z $\rightarrow 1$
M^T	Транспонирование матрицы	$A := \begin{pmatrix} r & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A^T \rightarrow \begin{pmatrix} r & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
M⁻¹	Нахождение обратной матрицы	$A^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{(3 \cdot r - 2)} & \frac{-1}{(3 \cdot r - 2)} \\ \frac{-2}{(3 \cdot r - 2)} & \frac{r}{(3 \cdot r - 2)} \end{bmatrix}$
[M]	Нахождение определителя матрицы	$ A \rightarrow 3 \cdot r - 2$

Ключевые слова допустимо набирать только строчными буквами (кроме **Modifier** — первая буква в этом слове должна быть прописной).

Блоки системы **SmartMath** имеют следующие отличительные свойства:

- дают хорошее визуальное представление операций;
- имеют шаблоны для задания параметров и опций;

- обеспечивают работу с функциями пользователя;
- обеспечивают передачу данных от формулы к формуле;
- допускают расширение, позволяющее использовать сразу несколько директив;
- имеют конструкцию, схожую с конструкцией программных блоков.

Как нетрудно заметить, директива упрощения **simplify** не имеет параметров. Директива разложения в ряд Тейлора **series** требует указания двух параметров: задания начального значения переменной x и указания числа членов ряда. Директивы преобразования Лапласа **laplace** и решения уравнений **solve** требуют одного параметра — указания имени переменной (в нашем случае x). С помощью директивы **solve** можно решать и системы уравнений — тогда ее параметр будет вектором неизвестных.

Выполнение матричных операций в символьной форме особой специфики не имеет.

1.1.3 Оптимизация

Оптимизация вычислений достигается заменой сложной функции или математического выражения их аналитическим представлением (если оно, конечно, есть). Для включения процесса оптимизации необходимо выделить выражение, которое хотелось бы оптимизировать, и выполнить команду **Optimize** позиции главного меню **Math**.

Признаком оптимизации выражения является появление после него красной звездочки. Кроме того, щелкнув правой кнопкой мыши и выбрав из контекстного меню команду **Show Popup**, можно наблюдать появление окна с оптимизированным выражением, как показано на рис. 1.11.

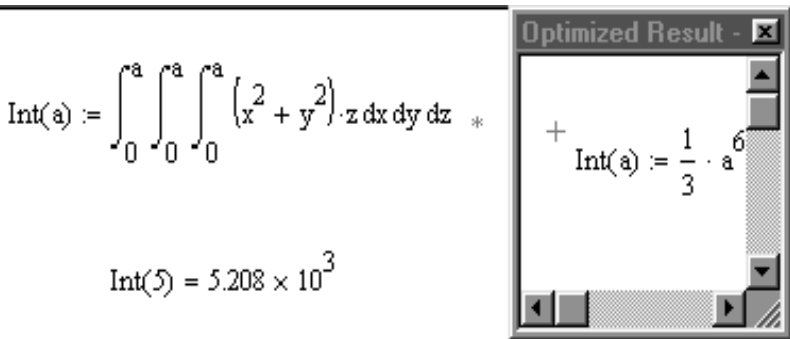


Рисунок 1.11 – Оптимизация многократно вычисляемых выражений

Особый выигрыш оптимизация может дать при многократном вычислении сложных функций, содержащих интегралы, производные, суммы, произведения и ряды.

1.2 Порядок выполнения работы

1.2.1 Задания для выполнения работы

1. Включить компьютер.
2. Запустить на выполнение программу «MathCAD».
3. Выполнить символьные вычисления в соответствии с вариантом задания.
4. Сохранить файл с выполненными заданиями в формате MathCAD *.xmcdz, а также в формате .rtf для включения его в отчет по лабораторной работе.

1.2.2 Варианты заданий

1.2.2.1 Выполнить символьные вычисления следующих выражений с помощью команд меню символьных вычислений. Перед использованием команд панели символьных вычислений следует полностью выделить формулу синим курсором. Используйте команду меню "Символика" ("Symbolic"): «Упростить» – «Simplify»).

1.2.2.1.1 Алгебраические выражения:

1.
$$\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$$
2.
$$\frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$$
3.
$$\frac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt[3]{a^2 b}\right)^4}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3 \left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$$
4.
$$\sqrt{\frac{\frac{4}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}}{\frac{1}{a + \frac{1}{b}} - \frac{4}{b(a \cdot b \cdot c + a + c)}}$$
5.
$$\frac{1-x^{-2}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^{-2} - x}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}$$
6.
$$\frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2c}{a \cdot b}\right) \cdot (a + b + 2c)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a \cdot b} - \frac{4c^2}{a^2 b^2}}$$
7.
$$\frac{2 - x + 4x^2 + \frac{5x^2 - 6x + 3}{x-1}}{2x + 1 + \frac{2x}{x-1}}$$
8.
$$\frac{a^3 + a^2 - 2a}{a(a+2) - a^2 + 4}$$
9.
$$\frac{(m-1)(m-3)}{(m^2 - m - 6)m}$$
10.
$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{(x^3 - 4x^2 + 3x)(x-2)}$$

$$11. \frac{\frac{\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}}}{(x-y)^2 + 4x \cdot y}$$

$$1 + \frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}$$

$$12. \frac{\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{b^2 + c^2 - a^2}}{1 + \frac{1}{2 \cdot b \cdot c}}$$

$$13. \frac{3a^2 + 2a \cdot x - x^2}{(3x+a)(a+x)}$$

$$-2 + 10 \frac{a \cdot x - 3x^2}{a^2 - 9x^2}$$

$$14. \frac{\sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y} - 2}{\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{x+y}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}$$

$$15. \frac{\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y}}{4x^2 - y^2}$$

1.2.2.1.2 Тригонометрические выражения:

$$1. \cos(2x) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$2. \sin 2x + \operatorname{tg}^2 x$$

$$3. \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1}$$

$$4. 3 + 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha$$

$$5. 3 + 4 \sin \left(4\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) + \sin \left(8\alpha + \frac{5\pi}{2} \right)$$

$$6. \sqrt{\frac{\cos(2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$7. \sqrt{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}$$

$$8. \frac{4 \sin \left(4\alpha - \frac{\pi}{2} \right)}{\left[\operatorname{ctg}^{-2} \left(2\alpha - \frac{3\pi}{2} \right) - \operatorname{tg}^{-2} \left(2\alpha + \frac{5\pi}{2} \right) \right]^{-1}}$$

$$9. \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha \right)^2 - 2 \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - \sin 4\alpha - 1$$

$$10. \frac{\cos^2(4\alpha - 3\pi) - 4 \cos(2\alpha - \pi) + 3}{\cos^2(4\alpha + 3\pi) + 4 \cos(2\alpha + \pi) - 1}$$

$$11. \frac{\cos \left(4\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(2\alpha + \frac{5\pi}{2} \right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)}$$

$$12. \cos^4 2\alpha - 6 \cos^2 2\alpha \cdot \sin^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha$$

$$13. \frac{\sin^2 \left(\alpha - \pi \right) - 4 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos^2 \left(\alpha - \frac{5\pi}{2} \right) - 4 + 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)}$$

$$14. \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha \right) \sin^2 \left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha \right)}{1 - 2 \cos^2(4\alpha)}$$

$$15. \frac{4 \sin^4 \left(\alpha - \frac{3\pi}{2} \right)}{\sin^4 \left(\alpha - \frac{5\pi}{2} \right) + \cos^4 \left(\alpha + \frac{5\pi}{2} \right) - 1}$$

1.2.2.1.3 Показательные и логарифмические выражения:

$$1. \quad a^{\frac{2}{\log_b a} + 1} b - 2a^{\log_a b + 1} b^{\log_b a + 1} +$$

$$+ a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b} + 1}$$

$$2. \quad \frac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \frac{a}{b}}$$

$$3. \quad \left(b^{\frac{\log_{100} a}{\lg a}} \cdot a^{\frac{\log_{100} b}{\lg b}} \right)^{2 \log_{a \cdot b} (a + b)}$$

$$4. \quad \sqrt{x^{1 + \frac{1}{2 \log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3 \log_x 2}} + 1}$$

$$5. \quad x^2 \cdot \log_x a^3 \cdot \log_a x - x$$

$$6. \quad \left(\sqrt[5]{3} \right)^x + \left(\sqrt[5]{3} \right)^{x-10}$$

$$7. \quad \lg(\sqrt{6+x} + 6) - \frac{2}{\log_{\sqrt{x}} 10}$$

$$8. \quad 9^{\frac{\log_1(x+1)}{3}} - 5^{\frac{\log_1(2x^2+1)}{5}}$$

$$9. \quad 27^{\lg x} - 7 \cdot 9^{\lg x} - 21 \cdot 3^{\lg x}$$

$$10. \quad \log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6)$$

$$11. \quad 4^{\log_5 x^2} - 4^{\log_5(x+1)} + 4^{\log_5(x-1)}$$

$$12. \quad \lg(3-x) - \frac{1}{3} \lg(27-x^3)$$

$$13. \quad \lg(8) - \lg(x+6) +$$

$$- \lg(16) - \lg(x-2)$$

$$14. \quad \log_x \sqrt{2} - \log_x^2 \sqrt{2} + \log_{2x} x$$

$$15. \quad (\log_2 x - 3) \log_2 x +$$

$$+ 2(\log_2 x + 1) \log_2 \sqrt[3]{2}$$

$$16. \quad 5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2}$$

$$17. \quad 5^{\log_2(x^7-21)} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 25^{\frac{-\log_2 x}{2}}$$

$$18. \quad \log_6 \left(\sqrt[7]{3^{x(15-x)}} \right) + 8 \log_6 2$$

$$19. \quad \frac{1 + \log_2 9}{\log_9 x} +$$

$$- 2 \log_x 3 \cdot \log_9(12-x)$$

$$20. \quad \log_4 x + \log_x 2 - \log_4 \sqrt{x}$$

$$21. \quad (\log_a b + \log_b a + 2) \times$$

$$\times (\log_a b + \log_{a \cdot b} b) \log_b a - 1$$

$$22. \quad 3 \log_5 2 + 2 + x - \log_5(3^x - 5^{2-x})$$

$$23. \quad \sqrt{\log_3 x^9} - 4 \log_9(\sqrt{3x})$$

$$24. \quad \log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - \frac{1}{2}$$

$$25. \quad 5^{2 \log_5 2 + x} - 2 - 5^{x + \log_5 2}$$

$$26. \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 \sqrt{x+3} - \frac{1}{2} \log_2 x^2 - 9} -$$

$$- \sqrt{2(7-x)}$$

$$27. \quad 3x - \log_6 8^x - \log_6(3^{3x} + x^2 - 9)$$

$$28. \quad \log_x 9x^2 \log_3^2 x - 4$$

$$29. \quad \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + 11$$

$$30. \quad 7^{\ln x} - 5^{\ln x - 1} - 3 \cdot 5^{\ln x - 1} + 13 \cdot 7^{\ln x - 1}$$

1.2.2.2 Выполнить символическое дифференцирование и интегрирование следующих функций. В случае функций двух и более переменных символическое дифференцирование и интегрирование выполнять для каждой переменной). При необходимости используйте команду «Упростить» – «Simplify».

1.2.2.2.1 Алгебраические функции

$$1. f(x, y) = \frac{\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1 + \frac{y}{x}}{(x-y)^2 + 4x \cdot y}$$

$$2. \psi(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

$$3. f(p) = \frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 12}{p^3 - p^2 + 2p + 16} \times \frac{p^3 - 3p^2 + 8p}{p^2 + 2p + 6}$$

$$4. \psi(a, b) = \left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}} \right) : \left(1 + \frac{b^2 - a^2}{2ba} \right)$$

$$5. f(a, x) = \frac{3a^2 + 2a \cdot x - x^2}{(3x+a)(a+x)} - \frac{-2 + 10 \frac{a \cdot x - 3x^2}{a^2 - 9x^2}}{a^2 - 9x^2}$$

$$6. f(x, y) = \frac{\frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}} + \frac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}} - 2$$

$$7. f(x, y) = \frac{\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y}}{\frac{y^2}{4x^2 - y^2}}$$

$$8. f(a) = \frac{a^2 - 4 - (a-2)}{a^3 + 2a^2 - 5a - 6}$$

$$9. f(a) = \frac{6a^2 + 5a - 1 + \frac{a+4}{a+1}}{3a - 2 + \frac{3}{a+1}}$$

$$10. f(a) = \frac{2a^4 + a^3 + 4a^2 + a + 2}{2a^3 - a^2 + a - 2}$$

$$11. \varphi(x, y) = \frac{xy}{x^2 - 2xy - y^2}$$

$$12. \psi(a, b) = \frac{2b+a - \frac{4a^2 - b^2}{a}}{b^3 + 2a \cdot b^2 - 3a^2 b} \times \frac{a^3 b - 2a^2 b^2 + a \cdot b^3}{a^2 - b^2}$$

$$13. \psi(x, y) = \frac{x^4}{x^2 y^2 - y^4} \times \left(\left(\frac{x}{y-x} \right)^{-2} - \frac{(x+y)^2 - 4x \cdot y}{x^2 - x \cdot y} \right)^2$$

$$14. f(a) = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right)$$

$$15. f(x) = \frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$$

1.2.2.2.2 Тригонометрические функции

$$1. \quad \varphi(\alpha) = \frac{\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)}$$

$$2. \quad \varphi(\alpha) = \cos^4 2\alpha - 6\cos^2 2\alpha \sin^2 2\alpha + \sin^4 2\alpha$$

$$3. \quad \varphi(\alpha) = \frac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4\cos^2\left(\frac{3\pi - \alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4\cos^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)}$$

$$4. \quad \varphi(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) \sin^2\left(\frac{5\pi}{4} + 4\alpha\right)}{1 - 2\cos^2(4\alpha)}$$

$$5. \quad \varphi(\alpha) = \frac{4\sin^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^4\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) - 1}$$

$$6. \quad \varphi(\alpha) = \frac{\sin\left(4\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(4\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$7. \quad \psi(x) = \sin(2x - \pi) \cos(x - 3\pi) + \sin\left(2x - \frac{9\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$8. \quad \psi(x) = \sin(x + 2\pi) \cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \sin\left(2x - \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$9. \quad \varphi(\alpha) = \sin^{-2}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^{-2}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$10. \quad \varphi(x) = \cos(2x) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2(x)}$$

$$11. \quad \varphi(a) = \sqrt{\frac{\cos(2a)}{\operatorname{ctg}^2 a - \operatorname{tg}^2 a}}$$

$$12. \quad \varphi(x) = \cos(2x) + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$13. \quad \varphi(\alpha) = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1}$$

$$14. \quad \varphi(\alpha) = 3 + 4\sin\left(4\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(8\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$15. \quad \varphi(\alpha) = \sqrt{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)}$$

1.2.2.2.3 Показательные и логарифмические функции

$$1. \quad \varphi(x) = \lg(8) - \lg(x + 6) - \lg(16) - \lg(x - 2)$$

$$2. \quad \varphi(x) = \log_x \sqrt{2} - \log_x^2 \sqrt{2} + \log_{2x} x$$

$$3. \quad \varphi(x) = (\log_2 x - 3) \log_2 x + 2(\log_2 x + 1) \log_2 \sqrt[3]{2}$$

$$4. \quad \psi(x, y) = \frac{y^{2x} - x^{2y}}{y^x + x^y}$$

$$5. \quad \varphi(x, y) = \frac{5^{\ln(x)} 2^2 25^{-\ln(y)}}{2^{\ln(y)} 5^2 4^{-\ln(x)}}$$

$$6. \quad f(x) = \left(\frac{x}{2 \ln(2 - x)}\right)^{-1}$$

$$7. f(x) = \log_4 x - \log_4 \sqrt{x}$$

$$8. \psi(a, b) = a^{\frac{2}{\log_b a} + 1} b^{-2a^{\log_a b + 1} b^{\log_b a + 1} + a \cdot b^{\frac{2}{\log_a b} + 1}}$$

$$9. \psi(a, b) = \frac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \frac{a}{b}}$$

$$10. \psi(a, x) = x^2 \cdot \log_x a^3 \cdot \log_{a^2} x - x$$

$$11. \psi(a, b) = \lg \frac{a}{b} - \frac{\lg a}{\lg b}$$

$$12. \psi(x, y) = \ln^2 x + \ln^2 y - 2 \ln^2 xy$$

$$13. \psi(x, y) = \ln \frac{x}{y} - \ln x \cdot \ln y$$

$$\psi(x, y) = 3^{\ln x} + (4x)^{\ln 4} - 4^{\ln y} - (3y)^{\ln 3}$$

$$14. f(x) = \left(\frac{x}{2 \ln(2-x)} \right)^{-1}$$

1.2.2.3 Выполнить символическое решение уравнения и системы уравнений.

1.2.2.3.1 Алгебраические уравнения

$$1. \frac{x^2 + 1}{x - 4} - \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 23$$

$$2. \frac{b}{x - a} + \frac{a}{x - b} = 2$$

$$3. x + \frac{1}{x} = 2a$$

$$4. \frac{x^2}{a^3} + \frac{b^3}{x^2} = \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$5. \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x-1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2}$$

$$6. \frac{5a}{y+a} + \frac{4a}{y+2a} + \frac{3a}{y+3a} = 8$$

$$7. \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{28}{15}$$

$$8. (x+1)(x^2+2) + (x+2)(x^2+1) = 2$$

$$9. 3 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) - 7 \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$10. \frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2$$

$$11. \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{29}{10}$$

$$12. (x+3)^3 - (x+1)^3 = 56$$

$$13. (x-a)^3 - (x-b)^3 = b^3 - a^3$$

$$14. \frac{ax^2}{x-1} = (a+1)^2$$

$$15. \sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2$$

1.2.2.3.2 Тригонометрические уравнения

$$1. \cos^{-1} 3t - 6 \cos 3t = 4 \sin 3t$$

$$2. (1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x$$

$$3. \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1) \cos^{-2} x$$

$$4. \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$$

$$5. 2 + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x} = 0$$

$$6. 2tg^3x - 2tg^2x + 3tgx = 3$$

$$7. 3\sin 2x + 7\cos 2x = 3$$

$$8. \cos 2x - 5\sin x = 3$$

$$9. 2\sin 2x + 2\cos 2x = 3$$

$$10. ctg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - tg^2x + \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2x} = 0$$

$$11. \sin 3z - \cos 3z = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$12. 2\cos x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$13. \cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$14. \cos 2x + \sin^2x = 0$$

$$15. \cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$$

1.2.2.3.3 Показательные и логифмические уравнения

$$1. \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \lg 3 + \lg 2 = \lg\left(27 - 3^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$2. 3\log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$$

$$3. \log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 = \frac{1}{2}$$

$$4. \log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$$

$$5. \lg\left(x + \frac{3}{2}\right) = -\lg x$$

$$6. 5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x + \log_5 2}$$

$$7. \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 \sqrt{x+3} - \frac{1}{2} \log_2 (x^2-9)} = \sqrt{2(7-x)}$$

$$8. x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$$

$$9. \log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{\frac{1}{5}}(x-2) = 4$$

$$10. \lg(3^x - 2^{4-x}) = 2 + \frac{1}{4} \lg 16 - \frac{x}{2} \lg 4$$

$$11. \log_3(81^x + 3^{2x}) = 3\log_{27} 90$$

$$12. \lg(10^{\lg(x^2-21)}) - 2 = \lg x - \lg 25$$

$$13. \lg(x^2+1) = 2\lg^{-1}(x^2+1) - 1$$

$$14. x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$$

$$15. \log_x(9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4$$

1.2.2.3.4 Алгебраические системы уравнений

$$1. \begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ x^{-2} + y^{-2} = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} \\ y^2 - x = 5 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y^2 - xy = -12 \\ x^2 - xy = 28 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 9 \\ \frac{(x+y)x}{y} = 20 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u^2 + u \cdot v = 15 \\ v^2 + u \cdot v = 10 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x+y} = \frac{10}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} (x-y) \cdot (x^2 - y^2) = 45 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad 14. \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6} \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases} \quad 15. \begin{cases} ax + \frac{b}{y} = 2 \\ \frac{b}{x} + ay = 2ab \end{cases}$$

1.2.2.3.5 Тригонометрические системы уравнений

$$1. \begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x + \cos y} = 3 \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3} \\ \sin x = 2 \sin y \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4} \\ \cos x \sin y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x - y = \frac{-1}{3} \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 0 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\cos^{-1} y} = 5 \\ 2^{\cos x} \cdot 2^{\cos^{-1} y} = 4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4} \\ x + y = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin y \\ \cos x - \sin y = \frac{1}{2} \cos x \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos x + \sin y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \cos x - \cos y = \sin(x + y) \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

1.2.2.3.6 Показательные и логарифмические системы уравнений

$$1. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 - y = 20 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 - \lg 5 \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg \frac{5}{6} + 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ x + y = 20 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \\ xy = 27 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{2}} = \frac{5}{2} \\ \lg(2x-y) + 1 = \lg(y+2x) + \lg 6 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6 \\ x^2 + 5y^2 = 6x \cdot y \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6 \\ 3^x \cdot 4^y = 12 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy = 8 \\ \log_3 \left(\log_{\frac{1}{9}} \frac{x}{y} \right) = 0 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \log_{x \cdot y} (x-y) = 1 \\ \log_{x \cdot y} (x+y) = 0 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} (x+y)e^{y-2x} = 1 \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}} = 5 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)} = 1 \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8 \end{cases}$$

1.2.2.4 Выполнить операции с матрицами:

1. Выполните транспонирование матрицы (\mathbf{M}^T);
2. Найдите обратную матрицу (\mathbf{M}^{-1});
3. Найдите определитель матрицы ($|\mathbf{M}|$).

$$1. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & y & 1 \\ 2 & 0 & z \end{pmatrix}$$

$$2. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & x & 1 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$3. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2x & 3 & 2 \\ 3 & x & 1 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$4. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ x & 1 & 2 & 0 \\ y & x & 1 & 2 \\ z & y & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \mathbf{x} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{x} \\ 1 & 2 & \mathbf{x} & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ \mathbf{x} & 0 & \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

$$8. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & \mathbf{x} & 4 \\ \mathbf{x} & 0 & \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$10. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 7 \\ \mathbf{x}^2 & 1 & -2 & 0 \\ \mathbf{y} & \mathbf{x} & 1 & 2 \\ \mathbf{z}^2 & \mathbf{y} & \mathbf{e}^{\mathbf{x}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -\mathbf{x} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$12. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \mathbf{x} \\ 1 & 2 & -\mathbf{x} & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$13. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & \mathbf{t} & -1 \\ \mathbf{x} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$14. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$15. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & -3 & 2 \\ 1 & 3\mathbf{x} & 4 \\ -\mathbf{x} & 2\mathbf{x} & \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

$$16. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{n} & 2 & 7 \\ \mathbf{x} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \mathbf{x} & 0 & 2 \\ \mathbf{z} & \mathbf{y} & \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$$

$$17. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \mathbf{x} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$18. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \mathbf{x} & 3 \\ \mathbf{x} & 1 & 2 & \mathbf{x} \\ 1 & 2 & \mathbf{x} & -2 \\ 2 & -1 & \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$$

$$19. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & y & 2 & 0 \\ 1 & x & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$20. \quad M = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & x & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$21. \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -x \\ 1 & 2 & x & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & v & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & u \\ 1 & w & 2 & 2 \\ u & v & w & 3 \end{pmatrix}$$

$$23. \quad M = \begin{pmatrix} w & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & w & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$24. \quad M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & y & 0 \\ x & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & y & 2 \\ 2 & 1 & y & -1 \end{pmatrix}$$

$$25. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ q & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ q & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$26. \quad M = \begin{pmatrix} q & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & v & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$27. \quad M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a & 3 \\ b & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & b & -2 \\ 2 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$28. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ x & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ x & 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$29. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$30. \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -x & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & -x & x \end{pmatrix}$$

$$31. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ -1 & \beta & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \beta & -1 \end{pmatrix}$$

$$32. \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ x & 1 & 2 & x \\ 2 & 2 & x & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$33. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\beta \\ 1 & 2 & \alpha & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$34. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ \psi & 0 & 2 & -1 \\ -1 & \psi & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \psi & 1 \end{pmatrix}$$

$$35. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \gamma & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$36. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \xi & -1 \\ \xi & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & \xi & 0 \\ 2 & -1 & \xi & 1 \end{pmatrix}$$

$$37. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta & 2 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \xi & 0 & 2 \\ \delta & \zeta & \xi & 1 \end{pmatrix}$$

$$38. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \mathbf{x} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & \mathbf{x} & 0 \\ \mathbf{x} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$39. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \theta & 3 \\ \theta & 1 & 2 & \theta \\ 1 & 2 & \theta & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$40. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & \phi & 2 & 0 \\ 1 & \psi & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$41. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \omega & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$42. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\delta & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\delta \\ 1 & 2 & \delta & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$43. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \chi & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \psi \\ 1 & \omega & 2 & 2 \\ 3 & \omega & \psi & \chi \end{pmatrix}$$

$$44. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & \pi & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$45. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & \beta & 2 \\ 2 & 1 & \beta & -1 \end{pmatrix}$$

$$46. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \omega & 2 & 0 \\ \mathbf{x} & 1 & 2 & 0 \\ 1 & \mathbf{x} & 0 & 2 \\ \omega & \omega & \mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}$$

$$47. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$48. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ \beta & 1 & 2 & \beta \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$$

$$49. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \varpi & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \nu \\ 1 & \omega & 2 & 2 \\ \nu & \varpi & \omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$50. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & c & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$51. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & y & 2y \\ x & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & y & 2 \\ 2 & 1 & y & -1 \end{pmatrix}$$

$$52. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & m \\ 0 & y & n & 0 \\ 1 & x & f & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$53. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$54. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\delta & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -\delta \\ 1 & 2 & \delta & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$55. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ \theta & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ \theta & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$56. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \omega & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$57. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 2 & \beta & -2 \\ 2 & -1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$58. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ \xi & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ \xi & 0 & \xi & 1 \end{pmatrix}$$

$$59. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \xi & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \xi & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ \xi & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$60. \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ -\psi & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & \psi & 2 \\ 2 & 1 & -\psi & \psi \end{pmatrix}$$

1.3 Контрольные вопросы

1. Какие виды графиков позволяет строить MathCAD?
2. Что такое символьные вычисления в MathCAD?
3. Для чего применяется операция *Evaluate*?
4. Для чего применяется операция *Expand*?
5. Для чего применяется операция *Collect*?
6. Перечислите состав директив системы SmartMath.
7. В чем заключается оптимизация вычислений в системе MathCAD?

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы – Научиться работать с программой MathCAD. Проводить решение дифференциальных уравнений и систем с использованием программы MathCAD.

2.1 Общие сведения

2.1.1 Решение дифференциального уравнения

Для численного решения одиночного дифференциального уравнения в MathCAD имеется функция Odesolve, с помощью которой может быть решена как *задача Коши* (заданы начальные условия) для обыкновенного дифференциального уравнения, так и *краевая задача* (заданы значения функции или ее производных на границе участка числовой оси, на котором ищется решение). Эта функция входит в состав блока решения и является его заключительным ключевым словом.

Odesolve(x,b,[step]) – Возвращает функцию, которая является решением дифференциального уравнения: x - переменная интегрирования, действительное число; b - конечная точка отрезка интегрирования; step - величина шага по переменной интегрирования (необязательный аргумент). Используется в блоке с оператором Given, что показано на рис. 2.1.

Given

$$100 \cdot y''(x) + 10 \cdot y'(x) + 101 \cdot y(x) = 50 \cdot \cos\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$y := \text{odesolve}(x,150) \quad y(0) = 0 \quad y(50) = 0.476$$

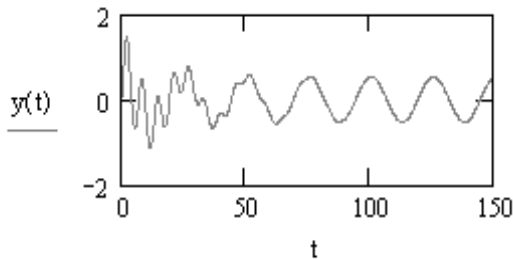


Рисунок 2.1 - Решение дифференциального уравнения.

Замечания:

- Уравнение должно быть линейным относительно старшей производной.
- Число заданных начальных или граничных условий внутри блока должно быть равно порядку уравнения.
- При записи уравнения для обозначения производных функции используйте специальные кнопки с панели Math или ' (штрих) – [Ctrl+F7], для знака равенства = [Ctrl+=] (в том числе и для дополнительных условий).
- Конечная точка должна быть больше начальной.
- Не допускаются начальные и граничные условия смешанного типа ($f(a) + f(a)=5$).

Искомая функция в блоке должна быть обязательно с аргументом $f(x)$.

2.1.2 Численное решение задачи Коши для дифференциальных уравнений

Для численного решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем могут быть использованы функции:

- **Rkfixed**($y, x1, x2, n, F$) - возвращает матрицу решений системы уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка при фиксированном шаге по x .
- **Rkadapt**($y, x1, x2, n, F$) - ищет решение с переменным шагом (там, где решение меняется медленнее, шаг увеличивается, а в области быстрого изменения решения шаг функции уменьшается). Возвращается решение с равным шагом. Функция работает быстрее, чем **Rkfixed**.
- **Bulstoer**($y, x1, x2, n, F$) - дает более точное решение (методом Bulirsch-Stoer)

Аргументы вышеуказанных функций:

- y - вектор начальных условий;
- $x1, x2$ - границы интервала для поиска решения;
- n - количество точек на интервале;
- $F(x, y)$ - вектор-функция первых производных.

При решении дифференциальных уравнений порядка выше первого (или систем уравнений, выше первого порядка) исходное уравнение (систему) необходимо преобразовать к системе дифференциальных уравнений первого порядка (рис. 2.2 - 2.4).

В результате работы указанных функций рассчитывается матрица, количество столбцов которой равно порядку уравнения +1 (или сумме порядков уравнений в системе +1), а количество строк равно параметру n . Первый столбец содержит значения независимой переменной, второй – значение функции, третий – для диф. уравнений 2-го порядка – значение

производной искомой функции (если решается система двух уравнений 1-го порядка, то третий столбец будет содержать значения второй функции).

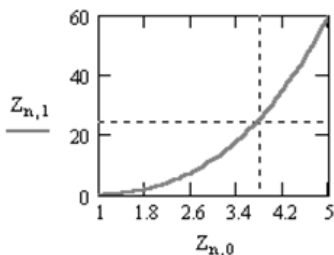
Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}y = \frac{y}{x} + x^2$$

при начальном условии $y(1)=0$ на отрезке $[1,5]$

$$y_0 := 0 \quad F(x, y) := \frac{y_0}{x} + x^2$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 1, 5, 40, F) \quad n := 0..40$$



	0	1
0	1	0
1	1.1	0.115
2	1.2	0.264
3	1.3	0.448
4	1.4	0.672
5	1.5	0.937
6	1.6	1.248
7	1.7	1.606
8	1.8	2.016
9	1.9	2.479
10	2	3
11	2.1	3.58
12	2.2	4.224
13	2.3	4.933
14	2.4	5.712
15	2.5	6.562

Рисунок 2.2 - Численное решение задачи Коши для дифференциальных уравнений с помощью функции **rkfixed(y,x1,x2,n,F)**.

Пример 2. Решить систему диф. уравнений 1-го порядка

$$\frac{d}{dt}x = y - x^2 - x \quad \frac{d}{dt}y = 3x - x^2 - y$$

с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=1$
(заменяем x на y_0 , y на y_1)

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 - (y_0)^2 - y_0 \\ 3 \cdot y_0 - (y_0)^2 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$U := \text{rkfixed}(y, 0, 10, 100, F)$$

Рисунок 2.3 - Численное решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с помощью функции **Rkfixed(y, x1, x2, n, F)**.

Пример 3. Решить диф. уравнение

$$\text{второго порядка } \frac{d^2}{dx^2}y - 2\frac{d}{dx}y = e^x + x \cos(x)$$

$$\text{с начальными условиями } y(0)=0, \frac{d}{dx}y(0) = 1$$

Обозначим искомую функцию

$$y \text{ через } y_0, \frac{d}{dx}y \text{ через } y_1$$

и запишем наше уравнение в

эквивалентной форме - в виде системы двух уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}y_0 = y_1 & y_0(0) = 0 \\ \frac{d}{dx}y_1 = 2y_1 - 2y_0 + (e^x + x \cos(x)) & y_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(x, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ 2y_1 - 2y_0 + (e^x + x \cos(x)) \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, \pi, 314, F)$$

Пример 4. Решить систему диф. уравнений 2-го порядка

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(u = 2 \cdot v) \\ \frac{d^2}{dt^2}v = 4v - 2u \end{cases} \text{ с начальными}$$

$$\text{условиями } \begin{cases} u(0) = 1.5 & \frac{d}{dt}u(0) = 1.5 \\ v(0) = 1 & \frac{d}{dt}v(0) = 1 \end{cases}$$

$$y := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(t, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ 2y_2 \\ y_3 \\ 4y_2 - 2y_0 \end{bmatrix}$$

$$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 1, 100, F)$$

Рисунок 2.4 - Численное решение систем уравнений с помощью функции `rkfixed(y,x1,x2,n,F)`.

Для выделения решений (функций или их производных) можно воспользоваться стандартным оператором вывода столбцов матрицы `M <>`

Если матрица правых частей дифференциальных уравнений почти вырождена, то такие системы называются жесткими. В этом случае решения, возвращаемые функцией `rkfixed`, будет неустойчивым, и для решения таких систем необходимо применять функции `Stiffb`, `Stiffr`.

`Stiffb(y,x1,x2,n,F,J)` – ищет решение диф. уравнения или системы дифференциальных уравнений методом **Bulirsch-Stoer**.

`Stiffr(y,x1,x2,n,F,J)` – ищет решение диф. уравнения или системы дифференциальных уравнений методом **Rosenbrock**.

Первые пять аргументов такие же, как и при решении хорошо обусловленных систем дифференциальных уравнений.

Дополнительный аргумент - матрица `J` размером `n(n+1)`, первый столбец которой содержит частные производные `dF/dx`, остальные столбцы и строки представляют собой матрицу Якоби `dF/du` (рис. 2.5).

Для отыскания решения системы диф. уравнений только в конечной точке используются функции **Bulstoer**, **Rkadapt**, **Stiffb**, **Stiffr** (начинаются с прописной буквы).

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_0}{\partial x} & \frac{\partial F_0}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial F_0}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x} & \frac{\partial F_n}{\partial y_0} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

Рисунок 2.5 - Матрица J размером n(n+1), первый столбец которой содержит частные производные dF/dx, остальные столбцы и строки представляют собой матрицу Якоби dF/dy

Набор параметров для этих функций :

- Bulstoer(y,x1,x2,acc,F,kmax,save);
- Rkadapt(y,x1,x2,acc,F,kmax,save);
- Stiffb(y,x1,x2,acc,F,J,kmax,save);
- Stiffr(y,x1,x2,acc,F,J,kmax,save).

Первые три параметра и пятый (F) этих функций те же, что и для функции Rkadapt. Дополнительные параметры:

- acc - параметр, контролирующий точность решения (рекомендуется acc = 0.001);
- kmax - максимальное число промежуточных точек, в которых ищется решение;
- save - минимально допустимый интервал между точками, в которых ищется решение.

2.1.3 Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Если для дифференциального уравнения n-го порядка k граничных условий заданы в начальной точке x₁, а (n - k) граничных условий - в конечной точке x₂, то такая задача называется краевой. В MathCAD реализованы две функции, позволяющие численно найти недостающие условия в точках x₁ и x₂.

2.1.3.1 Двухточечная краевая задача

Задача решается в два этапа. Сначала с помощью функции **sbal** находятся недостающие начальные значения, а затем применяется одна из выше описанных функций для решения стандартной задачи Коши на отрезке.

sbal(v,x1,x2,F,load,score) - ищет недостающие начальные условия в точке **x1**;

- **v** - вектор начальных приближений для искомым начальных значений в точке **x1**;

- x_1, x_2 - граничные точки интервала;
- $F(x, y)$ - вектор-столбец из n элементов, содержит правые части дифференциальных уравнений;
- $\text{load}(x_1, v)$ - вектор-столбец из n элементов, содержит начальные значения в точке x_1 ; некоторые из значений – константы, другие неизвестны и будут найдены в процессе решения;
- $\text{score}(x_2, y)$ - вектор-столбец размерности вектора v , содержащий разность между начальным условием в точке x_2 и значением искомого решения в этой точке.

Пример решения приведен на рис. 2.6.



Рисунок 2.6 - Решение дифференциального уравнения (двухточечной краевой задачи) третьего порядка

2.1.3.2 Краевая задача с условиями внутри интервала

На первом этапе используется функция

balfit(V1, V2, x1, x2, xf, F, load1, load2, score) – ищет недостающие начальные условия в точках x_1 и x_2 , сшивая решения, выходящие из этих точек, в точке xf ;

- V_1, V_2 – вектора начальных приближений для искомых начальных значений в точках x_1 и x_2 ;
- x_1, x_2 – граничные точки интервала;
- $\text{load1}(x_1, V_1)$ – вектор-столбец из n элементов, содержит начальные значения в точке x_1 ; некоторые из значений – константы, другие неизвестны и будут найдены в процессе решения;
- $\text{load2}(x_2, V_2)$ – вектор-столбец из n элементов, содержит начальные значения в точке x_2 ; некоторые из значений – константы, другие неизвестны и будут найдены в процессе решения;

- $\text{score}(xf, y)$ – вектор-столбец размерности n , содержащий разность между решениями, начинающимися в точках x_1 и x_2 , в точке xf .

Пример приведен на рис. 2.7.

Требуется решить дифференциальное уравнение $y''=y$ при граничных условиях $y(-1)=1$ и $y(3)=2$, сшивая решения в т. $x=0$

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 := -1 & xf := 0. & v1_0 := 1 \\ x_2 := 3 & & v2_0 := 1 \end{matrix}$$

$$\text{load1}(x_1, v_1) := \begin{pmatrix} 1 \\ v1_0 \end{pmatrix} \quad \text{load2}(x_2, v_2) := \begin{pmatrix} 2 \\ v2_0 \end{pmatrix}$$

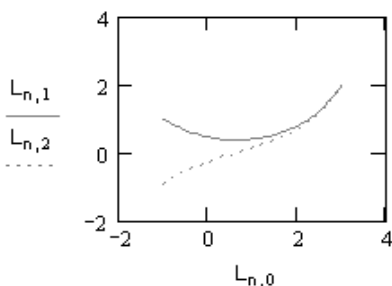
$$\text{score}(xf, y) := y \quad S1 := \text{bvalfit}(v_1, v_2, x_1, x_2, xf, F, \text{load1}, \text{load2}, \text{score})$$

$S1 = (-0.927 \quad 1.965)$ Недостающие значения производных в точках $x = -1$ и $x=3$, соответственно

$$y := \begin{pmatrix} 1 \\ -0.927 \end{pmatrix} \quad \text{Составляем вектор начальных условий}$$

$$L := \text{rkfixed}(y, x_1, x_2, 40, F)$$

$$n := 0..40$$



	0	1	2
0	-1	1	-0.927
1	-0.9	0.912	-0.831
2	-0.8	0.833	-0.744
3	-0.7	0.763	-0.665
4	-0.6	0.7	-0.591
5	-0.5	0.645	-0.524
6	-0.4	0.595	-0.462
7	-0.3	0.552	-0.405
8	-0.2	0.514	-0.352
9	-0.1	0.482	-0.302
10	0	0.454	-0.255
11	0.1	0.43	-0.211
12	0.2	0.411	-0.169
13	0.3	0.397	-0.129
14	0.4	0.386	-0.09
15	0.5	0.379	-0.051

Рисунок 2.7 - Решение краевой задачи с условиями внутри интервала

2.1.4 Уравнения в частных производных

Дифференциальные уравнения в частных производных требуют нахождения функции не одной, а нескольких переменных. Эти уравнения включают в себя производные по различным переменным (частные производные). Уравнениями в частных производных описывается множество разнообразных физических явлений, и с их помощью можно с успехом моделировать самые сложные явления и процессы (диффузия, гидродинамика, квантовая механика, экология и т. д.). MathCAD имеет ограниченные возможности по отношению к уравнениям в частных производных. С помощью встроенных функций можно решать лишь некоторые из частных случаев.

2.1.4.1 Решение уравнения эллиптического типа

Двумерное уравнение Пуассона – пример уравнения в частных производных эллиптического типа, включающее в себя вторые производные функции $T(x, y)$ по двум пространственным переменным:

$$T_{xx} + T_{yy} = f(x, y)$$

Требуется решить дифференциальное уравнение $y''=y$ при граничных условиях $y(-1)=1$ и $y(3)=2$, сшивая решения в т. $x=0$

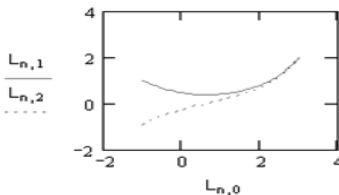
```
x1 := -1   xf := 0   v10 := 1
x2 := 3     v20 := 1
F(x, y) := ( y1
             y0 )
load1(x1, v1) := ( 1
                  v10 )
load2(x2, v2) := ( 2
                  v20 )
score(xf, y) := y   S1 := bvalfit(v1, v2, x1, x2, xf, F, load1, load2, score)
```

S1 = (-0.927 1.965) Недостаточные значения производных в точках $x = -1$ и $x = 3$, соответственно

$y := \begin{pmatrix} 1 \\ -0.927 \end{pmatrix}$ Составляем вектор начальных условий

L := rkfixed(y, x1, x2, 40, F)

n := 0.. 40



L =

	0	1	2
0	-1	1	-0.927
1	-0.9	0.912	-0.831
2	-0.8	0.833	-0.744
3	-0.7	0.763	-0.665
4	-0.6	0.7	-0.591
5	-0.5	0.645	-0.524
6	-0.4	0.595	-0.462
7	-0.3	0.552	-0.405
8	-0.2	0.514	-0.352
9	-0.1	0.482	-0.302
10	0	0.454	-0.255
11	0.1	0.43	-0.211
12	0.2	0.411	-0.169
13	0.3	0.397	-0.129
14	0.4	0.386	-0.09
15	0.5	0.379	-0.051

Рисунок 2.8 - Решение краевой задачи с условиями внутри интервала

Уравнение Пуассона (Лапласа, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{0}$) описывает, например, распределение электростатического поля $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в двумерной области с плотностью заряда $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, или стационарное распределение температуры $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на плоскости, в которой имеются источники (или поглотители) тепла с интенсивностью $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Именно в последней физической интерпретации будет далее рассматриваться уравнение Пуассона.

Корректная постановка краевой задачи для уравнения Пуассона требует задания граничных условий. В MathCAD решение ищется на плоской квадратной области, состоящей из $(m + 1) \times (m + 1)$ точек. Поэтому граничные условия должны быть определены пользователем для всех четырех сторон упомянутого квадрата. Самый простой вариант – это нулевые граничные условия, т. е. постоянная температура по всему периметру расчетной области. В таком случае можно использовать встроенную функцию **multigrid**.

- **multigrid(F, ncycle)** – матрица решения уравнения Пуассона размера $(\mathbf{M} + 1) \times (\mathbf{M} + 1)$ на квадратной области с нулевыми граничными условиями;

- **F** – матрица размера $(\mathbf{M} + 1) \times (\mathbf{M} + 1)$, задающая правую часть уравнения Пуассона;

- **ncycle** – параметр численного алгоритма (количество циклов в пределах каждой итерации).

Сторона квадрата расчетной области должна состоять из $\mathbf{M} = 2^n$ точек, где \mathbf{n} – целое число. Параметр численного метода **ncycle** в большинстве случаев достаточно взять равным 2. Листинг 2.1 содержит пример использования функции **multigrid** для расчета краевой задачи на области 33×33 точки и точечным источником тепла в месте, задаваемом координатами (15, 20) внутри этой области.

Листинг 2.1. Решение уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями

```
M := 32
f_M,M := 0
f_15,20 := 104
b := multigrid(-f,2)
```

В первой строке листинга задается значение $\mathbf{M} = 32$, в двух следующих строках создается матрица правой части уравнения Пуассона, состоящая из всех нулевых элементов, за исключением одного, задающего расположение источника. В последней строке матрице **b** присваивается результат действия функции **multigrid**. Обратите внимание, первый ее

аргумент сопровождается знаком "минус", что соответствует записи правой части уравнения Пуассона. Графики решения показаны на рис. 2.9 в виде трехмерной поверхности (а) и линий уровня (b), соответственно.

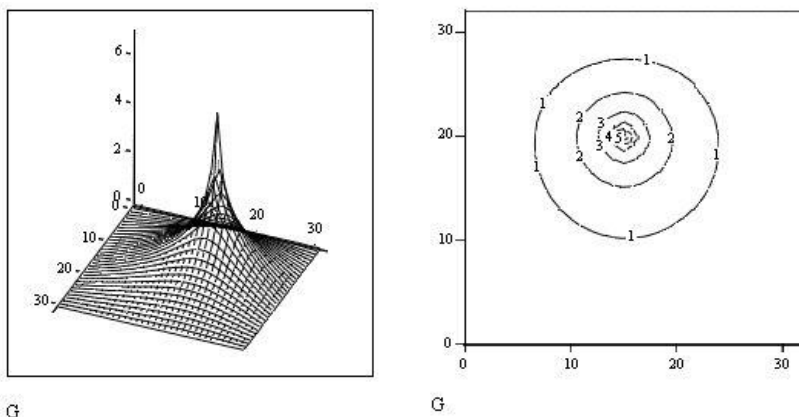


Рисунок 2.9 - График поверхности решения $G \equiv b$ уравнения Пуассона (а) и график линий уровня решения уравнения Пуассона (b)

В более сложных случаях, например, для решения краевой задачи с ненулевыми условиями на границах, следует использовать другую встроенную функцию **relax**, имеющуюся в MathCAD.

relax(a, b, c, d, e, F, v, rjac) – матрица решения дифференциального уравнения в частных производных на квадратной области, полученного с помощью алгоритма релаксации для метода сеток;

- **a, b, c, d, e** – квадратные матрицы коэффициентов разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальное уравнение;
- **F** – квадратная матрица, задающая правую часть дифференциального уравнения;
- **v** – квадратная матрица граничных условий и начального приближения к решению;
- **rjac** - параметр численного алгоритма (спектральный радиус итераций Якоби).

Параметр численного алгоритма характеризует скорость сходимости итераций. Он должен быть числом от 0 до 1. В матрице граничных условий **v** необходимо задать только граничные элементы, исходя из значения краевых условий по периметру расчетной области. Прочие (внутренние) элементы этой матрицы служат для задания начального приближения к решению. Суть алгоритма релаксации сводится к тому, что в ходе итераций происходит проверка уравнений и соответствующая коррекция значений искомой функции в каждой точке. Если начальное приближение

выбрано удачно, то можно надеяться, что алгоритм сойдется ("срелаксирует") к правильному решению.

Все матрицы, задающие как коэффициенты разностной схемы **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, граничные условия **v**, так и само решение **F**, должны иметь одинаковый размер $(m + 1) \times (m + 1)$, соответствующий размеру расчетной области. При этом целое число **M** обязательно должно быть степенью двойки: $M = 2^n$. Решение уравнения Пуассона с тремя источниками разной интенсивности при помощи функции **relax** приведено в листинге 2.2.

*Листинг 2.2. Решение уравнения Пуассона с помощью функции **relax**.*

```

M := 32          fM,M := 0

f15,20 := 10    f25,10 := 5    f10,10 := -5
i := 0..M        k := 0..M
ai,k := 1       vi,k := 0
b := a          h := a          d := a          n := -4a
o := relax(a,b,h,d,n,-f,v,.95)

```

Первые три строки имеют тот же смысл, что и в предыдущем листинге. Только вместо одного источника тепла взято их другое распределение – один сильный источник, один более слабый и один сток тепла. В следующих шести строках задаются коэффициенты разностной схемы. В предпоследней строке задана матрица нулевых граничных условий и нулевых начальных приближений, а в последней матрице **G** присваивается результат действия функции **relax**. График полученного решения в виде линий уровня показан на рис. 2.10.

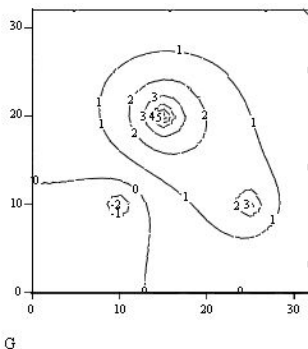


Рисунок 2.10 - Решение уравнения Пуассона с помощью функции **relax** (листинг 2.2)

2.1.4.2 Решение уравнения параболического типа

Уравнение параболического типа содержит первую производную по времени t и вторую по пространственной координате x .

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - v \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Это уравнение описывает динамику температуры $T(\mathbf{x}, t)$ в присутствии источников тепла $\langle j \rangle(\mathbf{x}, T, t)$ при наличии конвекции (член с \mathbf{u}_x), например, при нагреве металлического стержня.

Для решения такого уравнения на интервале $[0, L]$ по оси x и $[0, T]$ по оси t , используйте блок **Given** с функцией

$$u := \text{Pdesolve} \left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, \text{spacepts}, \text{timepts} \right],$$

где u – искомая функция;

x – пространственная координата;

t – временная координата;

spacepts – количество точек решения вдоль оси x ;

timepts – количество точек решения на временной оси.

Используйте литеральную систему обозначений нижнего индекса (наберите точку после имени функции, чтобы создать нижние индексы), чтобы записать частные производные в PDE (Partial Differential Equation – уравнение в частных производных), начальных условиях, и граничных условиях. Все уравнения определены с Булевыми знаками равенства – [Ctrl] =.

Given

$$u_t(x,t) = \frac{1}{4} \cdot u_{xx}(x,t) - \frac{1}{2} \cdot u_x(x,t)$$

Начальные условия:

$$u(x,0) = \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(3 \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)$$

Граничные условия Дирихле:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$$

Решение для $u(\mathbf{x}, t)$ в диапазоне (координата x) от 0 до L и от 0 до T по времени t дается соотношением для u .

Функция u может теперь быть оценена при любом значении x и времени t в указанных диапазонах. Все обращения к функции и ее производным должны определяться обоими переменными, то есть $u_x(\mathbf{x}, 0)$, а не u_x .

$$u(0.1,0.2) = 0.08 \quad x := 0,0.2..L \quad t := 0..T$$

$$\text{IC}(x) := \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(3 \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)$$

Выведите на график решение и начальные условия в некоторый момент времени. Переменная **FRAME** была выбрана так, чтобы решение, u , показанное на рис 2.11, можно было анимировать по времени.

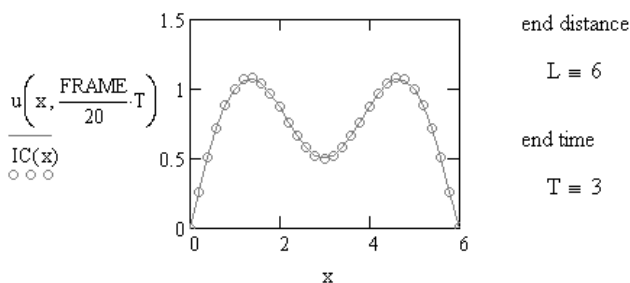
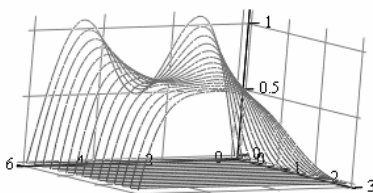


Рисунок 2.11 - Решение уравнения параболического типа с помощью функции **Pdsolve**

Чтобы просмотреть анимацию, выберите **Animation > Record** меню **Tools**, переместите блок выбора вокруг графика, и отрегулируйте число **FRAME** в пределах 20. Затем щелкните кнопку **Animate**.

Можно также изучать полное решение, построив трехмерный график поверхности решения, показанный на рис. 2.12.

$A1 := \text{CreateMesh}(u, 0, L, 0, T, 10 \cdot L, 5 \cdot T)$



A1

Рисунок 2.12 - Построение поверхности полученного решения уравнения параболического типа с помощью функции **Pdsolve**

2.1.4.3 Решение волнового уравнения

Использование **PDE solve block**.

Для решения одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x, t) = a^2 \frac{d^2}{dx^2} w(x, t)$$

используйте ограничение

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = v(x, t)$$

чтобы свести уравнение к системе двух уравнений в частных производных.

Установим **PDE solve block**,

Given

$$v_t(x, t) = a^2 \cdot w_{xx}(x, t) \quad w_t(x, t) = v(x, t)$$

с граничными и начальными условиями:

$$w(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \quad v(x, 0) = 0$$

$$w(0, t) = 0 \quad w(L, t) = 0$$

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} := \text{Pdesolve} \left[\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} \right] \quad \begin{array}{l} a \equiv 3 \\ L \equiv 2 \cdot \pi \\ T \equiv 2 \cdot \pi \end{array}$$

Имеется единственное решение на границе, показанное на рис. 2.13.

Можно построить сетку и для нее вычислить решение на плоскости (x, t) , как показано на рис. 2.13.

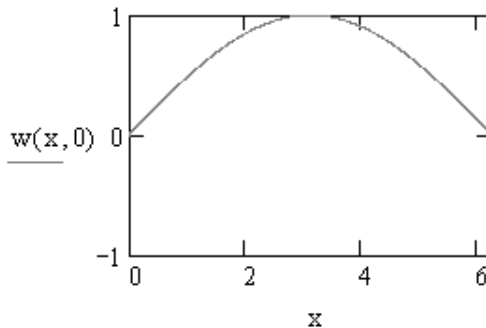
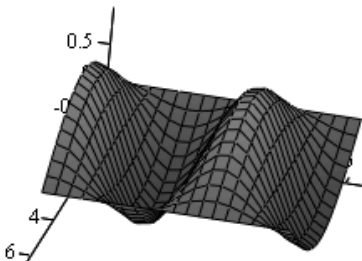


Рисунок 2.13 - Решение волнового уравнения на границе

Можно построить сетку и для нее вычислить решение на плоскости (x, t) , как показано на рис. 2.14

```
M := CreateMesh(w, 0, L, 0, T)
```



M

Рисунок 2.14 - Решение волнового уравнения на границе.
Трехмерное изображение поверхности

Использование функции numol.

Функция **numol(x_endpts, xpts, t_endpts, tpts, num_pde, num_pae, pde_func, pinit, bc_func)** возвращает $xpts \times tpts$ матрицу, содержащую решение одномерного уравнения в частных производных находящегося в **pde_func**. Каждая колонка представляет одномерное решение 1-D в один и тот же момент времени. Для системы уравнений, решение для каждой функции добавлено в конец матрицы в виде отдельной строки, так, что матрица всегда имеет **xpts** строк, и **tpts * (num_pde + num_pae)** колонок. Решение найдено численным методом. Пример использования функции **numol** приведен на рис. 2.15.

Аргументы:

- **X_endpts, t_endpts** – векторы-колонки с двумя элементами, которые определяют реальные границы областей интегрирования.
- **Xpts, tpts** – количество точек в областях интегрирования для получения приближенного решения.
- **Num_pde, num_pae** – количество уравнений в частных производных (УЧП) и алгебраических уравнений (АУ), соответственно. **Num_pde** должен быть, по крайней мере 1, **num_pae** может быть 0 или больше.
- **Pde_func** - векторная функция **x, t, u, u_x**, и **u_{xx}** размером **(num_pde + num_pae)**. Она содержит правые стороны УЧП/АУ, и предполагает, что левые стороны – все равны **u**. Решение **u**, предполагается векторной

функцией. Если Вы работаете с системой УЧП, каждый ряд в **Pde_func** использует векторные нижние индексы: индексы **u**, например, **u[0]** относится к первой функции в системе, а **u.x[1]** относится к первой производной второй функции в системе.

• **Pinit** – векторная функция **x** длины (**num_pde + num_pae**) содержащая начальные условия для каждой функции в системе.

• **Bc_func – num_pde × 3** матрица, содержащая строки в форме:

(Bc_left (t)	Bc_right (t)	"D") для Dirichlet граничных условий, или
(Bc_left (t)	Bc_right (t)	"N") для Neumann граничных условий.

num_pde := 2 num_pae := 0 a ≡ 3 L ≡ 2·π T ≡ 2·π

$$\text{rhs}(x, t, u, u_x, u_{xx}) := \begin{pmatrix} u_1 \\ a^2 \cdot u_{xx} \end{pmatrix} \quad \text{init}(x) := \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{bc_func}(t) := \begin{pmatrix} \text{init}(0)_0 & \text{init}(L)_0 & \text{"D"} \\ \text{"NA"} & \text{"NA"} & \text{"D"} \end{pmatrix}$$

$$\text{sol} := \text{numol} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, 30, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 20, \text{num_pde}, \text{num_pae}, \text{rhs}, \text{init}, \text{bc_func} \right]$$

i := 0..30

$x_i := \frac{i \cdot L}{30}$

t0 := 1

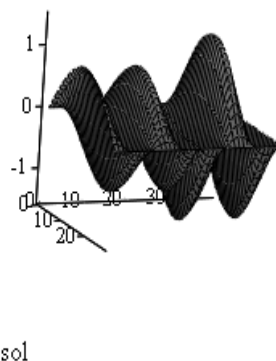
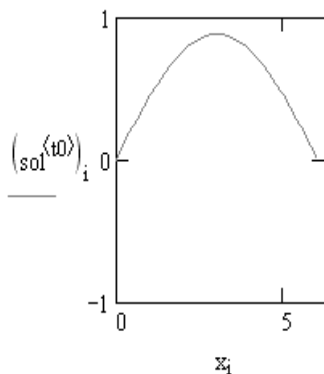


Рисунок 2.15 - Применение функции **numol** для решения волнового уравнения

2.2 Порядок выполнения работы

2.2.1 Задания для выполнения работы

1. Решите дифференциальные уравнения первого порядка.
2. Решите дифференциальные уравнения второго или высшего порядка.
3. Решите дифференциальные уравнения в частных производных.

2.2.2 Варианты заданий

2.2.2.1 Решить дифференциальные уравнения первого порядка Решить дифференциальные уравнения первого порядка (задача Коши) в системе MathCAD с помощью блока **Given ... odesolve**. Построить график полученного решения.

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' \sin x = y \ln y$ на интервале $\left[\frac{\pi}{2}; 2.5\right]$ при начальном условии $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.
2. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' + 2y = 4x$ на интервале $[0; 5]$ при начальном условии $y(0) = 5$.
3. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' = xe^{-x^2} - 2xy$ на интервале $[0, 3]$ при начальном условии $y(0) = 0$.
4. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' + y = \cos x$ на интервале $[0; 50]$ при начальном условии $y(0) = 1$.
5. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ на интервале $[0, 2]$ при начальном условии $y(0) = -2$.
6. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' = e^{mx} - ay$ при $m = 0.1$ и $a = 1.5$ на интервале $[0, 2]$ при начальном условии $y(0) = -1$.
7. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $(2x - y^2)y' = 1$ на интервале $[0, 10]$ при начальном условии $y(0) = -1$.
8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$ на интервале $[0, 10]$ при начальном условии $y(0) = 0.5$.
9. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ на интервале $[0, 10]$ при начальном условии $y(0) = 2$.
10. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $xy' + y = e^x$ на интервале $[-2, -0.5]$ при начальном условии $y(-2) = -1$.
11. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $y' = 1 + \frac{y}{x(x+1)}$ на интервале $[1, 10]$ при начальном условии $y(1) = 0$.

12. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$ на интервале $[1, 2]$ при начальном условии $y(1) = 0$.

13. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $x^2 y' = 2xy - 3$ на интервале $[1, 10]$ при начальном условии $y(1) = 0$.

14. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $xy' = y + 1$ на интервале $[1, 10]$ при начальном условии $y(1) = 0$.

15. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $xy(1+x^2)y' = y^2 + 1$ на интервале $[1, 10]$ при начальном условии $y(1) = 2$.

2.2.2.2 Решить дифференциальные уравнения второго или высшего порядка

Решить дифференциальные уравнения второго или высшего порядка (задача Коши) в системе MathCAD с помощью блока **Given ... odesolve**. При решении необходимо использовать все начальные условия для функций и их производных. Построить график полученного решения.

1. Решить дифференциальное уравнение третьего порядка на интервале $[0.5, 5]$ $y''' = \frac{1}{x}$ при начальных условиях $y(0.5) = 0.5$; $y'(0.5) = -0.2$; $y''(0.5) = -0.1$.

2. Решить дифференциальное уравнение второго порядка $(x^2 + 1)y'' = 2xy'$ на интервале $[1, 3]$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$.

3. Решить дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' = \cos 2x$ на интервале $[0, 10]$ при начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = 0$.

4. Решить дифференциальное уравнение второго порядка на интервале $[0, 3]$ $y'' = e^{-\frac{x}{2}}$ при начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = -0.5$.

5. Решить дифференциальное уравнение третьего порядка на интервале $[0.1, 10]$ $x^2 y''' = y''^2$ при начальных условиях $y(0.1) = 0$; $y'(0.1) = 0.5$; $y''(0.1) = -0.1$.

6. Решить дифференциальное уравнение второго порядка $xy'' = y' - xy'^2$ на интервале $[2, 10]$ при начальных условиях $y(2) = 2$; $y'(2) = 1$.

7. Решить дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' = y''^3$ на интервале $[0, 2]$ при начальных условиях $y(0) = -1$; $y'(0) = -0.5$; $y''(0) = 0.3$.

8. Решить дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$ на интервале $[2, 5]$ при начальных условиях $y(2) = 0$; $y'(2) = 4$.

9. Решить дифференциальное уравнение третьего порядка $y'y''' = 3y''^2$ на интервале $[0, 10]$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = -0.1$; $y''(0) = 0.3$.

10. Решить дифференциальное уравнение второго порядка на интервале $[-2, 5]$ $2y'' = 3y^2$ при начальных условиях $y(-2) = 1$; $y'(-2) = -1$.

11. Решить дифференциальное уравнение третьего порядка $yy''' = y'y''$ на интервале $[0, 2]$ при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 0.1$; $y''(0) = 0.3$.

12. Решить дифференциальное уравнение второго порядка $yy'' = y'^2 - y'^3$ на интервале $[1, 5]$ при начальных условиях $y(1) = 1$; $y'(1) = -1$.

13. Решить дифференциальное уравнение третьего порядка $y'y''' = y''^2 - \left(\frac{y'}{x}\right)^2$ на интервале $[0.5, 2]$ при начальных условиях $y(0.5) = 0$; $y'(0.5) = 0.5$; $y''(0.5) = -1.5$.

14. Решить дифференциальное уравнение второго порядка $y^3 y'' = -1$ на интервале $[1, 2]$ при начальных условиях $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$.

15. Решить дифференциальное уравнение третьего порядка $(1 + y'^2) y''' = 3y'y''^2$ на интервале $[0, 5]$ при начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$; $y''(0) = -0.7$.

2.2.2.3 Решить дифференциальные уравнения в частных производных

В задании необходимо решить дифференциальные уравнения в частных производных: уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями (используйте функцию **multgrid**); уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями (используйте функцию **relax**); уравнение параболического типа (используйте блок **Given ... Pdesolve**); одномерное волновое уравнение (используйте блок **Given ... Pdesolve** или функцию **numol**). Для каждого решения построить график начальных условий, двумерный график поверхности решения и график линий уровня.

1. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 32$), если в точках $(10, 10)$, $(25, 15)$ и $(5, 30)$ матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{10, 10} = 1000$, $F_{25, 15} = 500$ и $F_{5, 30} = -1000$, параметры уравнения

$b_{i,k} = c_{i,k} = d_{i,k} = a_{i,k} = 1$, а матрица граничных условий имеет вид $\mathbf{v}_{i,k} = \mathbf{i} \times (\mathbf{1} - \mathbf{k})$, а $\mathbf{i}, \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{M}$.

- Уравнение параболического типа $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} - 2\mathbf{u}_x$ с граничными условиями Дирихле $\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{t}) = \mathbf{1}$; $\mathbf{u}(\mathbf{L}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ и начальными условиями $u(x, 0) = \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(3\pi \frac{x}{L}\right)$ при $\mathbf{L} = \mathbf{6}$ и для конечной точки по времени $\mathbf{T} = \mathbf{3}$. Использовать количество точек для решения по координате – $\mathbf{N}_x = \mathbf{30}$, и по времени – $\mathbf{N}_t = \mathbf{60}$.

- Одномерное волновое уравнение (использовать PDE solve block) $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{w}_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ с ограничением $\mathbf{w}_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ при $\mathbf{a} = \mathbf{2}$ в диапазонах по координате $[0, 2\pi]$ и по времени $[0, 2\pi]$ с начальными условиями $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \cos(\pi x/L)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{x}$ и граничными условиями Дирихле $\mathbf{w}(\mathbf{0}, \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{w}(\mathbf{L}, \mathbf{t}) = \mathbf{t}$.

2. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(\mathbf{M} + \mathbf{1}) \times (\mathbf{M} + \mathbf{1})$ точек ($\mathbf{M} = \mathbf{32}$), если в точках матрицы правой части уравнения заданы значения $\mathbf{F}_{i,i} = \mathbf{100} \times \mathbf{i}$.

- Уравнение параболического типа $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} - \frac{1}{2}\mathbf{u}_x$ с граничными условиями Дирихле $\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{t}) = \mathbf{t} / \mathbf{2}$; $\mathbf{u}(\mathbf{L}, \mathbf{t}) = \mathbf{2} \mathbf{t}$ и начальными условиями $u(x, 0) = -\sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + x$ при $\mathbf{L} = \mathbf{6}$ и для конечной точки по времени $\mathbf{T} = \mathbf{3}$. Использовать количество точек для решения по координате – $\mathbf{N}_x = \mathbf{30}$, и по времени – $\mathbf{N}_t = \mathbf{60}$.

- Одномерное волновое уравнение (использовать функцию numol) $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{v}_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ при $\mathbf{a} = \mathbf{1/9}$ в диапазонах по координате $[\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_{end} = \mathbf{3/2}]$ и по времени $[\mathbf{t}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{t}_{end} = \mathbf{3/2}]$. Количество дифференциальных уравнений $\mathbf{num_pde} = \mathbf{2}$; количество алгебраических уравнений $\mathbf{num_pae}$

$= \mathbf{0}$. Правая часть функции $\mathbf{pde_func} = \begin{pmatrix} v_1 \\ a^2 v_{xx_0} \end{pmatrix}$; начальные условия: $\mathbf{pinit} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$; граничные условия $\mathbf{bc_func} = \begin{pmatrix} pinit_0(0) & pinit_0(x_{end}) & "D" \\ "NA" & "NA" & "D" \end{pmatrix}$.

3. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(\mathbf{M} + \mathbf{1}) \times (\mathbf{M} + \mathbf{1})$ точек ($\mathbf{M} = \mathbf{32}$), если в точках $(\mathbf{10}, \mathbf{15})$, $(\mathbf{25}, \mathbf{10})$ и $(\mathbf{5}, \mathbf{20})$ матрицы правой части уравнения заданы значения $\mathbf{F}_{10, 15} = -\mathbf{7000}$, $\mathbf{F}_{25, 10} = \mathbf{5000}$ и $\mathbf{F}_{5, 20} = -\mathbf{10000}$, параметры уравнения $b_{i,k} = c_{i,k} = d_{i,k} = a_{i,k} = \sqrt{i}\sqrt{k}$; $e_{i,k} = -4a_{i,k}$, а матрица граничных условий имеет вид $\mathbf{v}_{i,k} = -\mathbf{k} \times (\mathbf{1} + \mathbf{i}) / \mathbf{6}$, а $\mathbf{i}, \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{M}$.

- Уравнение параболического типа $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{3u}_x$ с граничными условиями Неймана $\mathbf{u}_x(\mathbf{0}, \mathbf{t}) = -\mathbf{0.3t}$; $\mathbf{u}_x(\mathbf{L}, \mathbf{t}) = \mathbf{0.2t}$ и начальными условия-

ми $u(x, 0) = \cos\left(\pi \frac{x-1}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(4\pi \frac{x+1}{L}\right)$ при $L = 4$ и для конечной точки по времени $T = 2$. Использовать количество точек для решения по координате – $N_x = 30$, и по времени – $N_t = 20$.

- Одномерное волновое уравнение (использовать PDE solve block) $v_t(x, t) = a^2 w_{xx}(x, t)$ с ограничением $w_t(x, t) = v(x, t)$ при $a = 1/2$ в диапазонах по координате $[0, 1.2]$ и по времени $[0, 3/2]$ с начальными условиями $w(x, 0) = \cos(\pi x/L)$ и $v(x, 0) = \text{tg}(x)$ и граничными условиями Неймана $w_x(0, t) = \sqrt{t}$ и $w_x(L, t) = \sin(t)$.

4. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 32$), если в точках матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{i,j} = i^2 - j^2$.

- Уравнение параболического типа $u_t = u_{xx} - 2u_x$ с граничными условиями Неймана $u_x(0, t) = 0.5t$; $u_x(L, t) = 0.7t$ и начальными условиями

$u(x, 0) = \ln\left[1 + \frac{2}{3} \sin\left(4\pi \frac{x+1}{L}\right)\right]$ при $L = 3$ и для конечной точки по времени $T = 4$. Использовать количество точек для решения по координате – $N_x = 30$, и по времени – $N_t = 40$.

- Система: алгебраическое уравнение $0 = v(x, t) + ax^2t$ и одномерное волновое уравнение (использовать функцию numol) $v_t(x, t) = a^2 v_{xx}(x, t)$ при $a = -2^2$ в диапазонах по координате $[x_0 = 0, x_{end} = 2.1]$ и по времени $[t_0 = 0, t_{end} = 3.15]$. Количество дифференциальных уравнений $\text{num_pde} = 2$; количество алгебраических уравнений $\text{num_pae} = 1$. Правая часть

функции $\text{pde_func} = \begin{pmatrix} v_1 \\ a^2 v_{xx_0} \\ v_1 + ax^2t \end{pmatrix}$; начальные условия: $\text{pinit} = \begin{pmatrix} 1+x^2 \\ \sqrt{1+x} \\ 1-x^2 \end{pmatrix}$; граничные условия Неймана $\text{bc_func} = \begin{pmatrix} \text{pinit}_0(0) & \text{pinit}_0(x_{end}) & "N" \\ "NA" & "NA" & "D" \end{pmatrix}$.

5. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 32$), если в точках матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{i,j} = 2 \times j - i$.

- Уравнение параболического типа $u_t = u_{xx} + 3u_x$ с граничными условиями Неймана $u_x(0, t) = -5t$; $u_x(L, t) = 0.7t$ и начальными условиями

$u(x, 0) = e^{1 - \frac{2}{3} \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right)}$ при $L = 3$ и для конечной точки по времени $T = 3$. Использовать количество точек для решения по координате – $N_x = 30$, и по времени – $N_t = 40$.

• Решить систему: алгебраическое уравнение $\mathbf{0} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) - \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{t}$ и одномерное волновое уравнение $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{v}_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ (использовать функцию `numol`) при $\mathbf{a} = 2^{-1}$ в диапазонах по координате $[\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_{\text{end}} = \mathbf{2}]$ и по времени $[\mathbf{t}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{t}_{\text{end}} = \mathbf{3}]$. Количество дифференциальных уравнений `num_pde` = 2; количество алгебраических уравнений `num_pae` = 1. Правая

часть функции `pde_func` = $\begin{pmatrix} v_1 \\ a^2 v_{xx_0} \\ v_1 - \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{t} \end{pmatrix}$; начальные условия: `pinit` = $\begin{pmatrix} 1+x^2 \\ 2\sqrt{1+x} \\ 1-x^2 \end{pmatrix}$;

граничные условия Дирихле `bc_func` = $\begin{pmatrix} pinit_0(0) & pinit_0(x_{\text{end}}) & "D" \\ "NA" & "NA" & "D" \end{pmatrix}$.

6. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

• Уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(\mathbf{M} + 1) \times (\mathbf{M} + 1)$ точек ($\mathbf{M} = \mathbf{32}$), если в точках $(\mathbf{30}, \mathbf{10})$, $(\mathbf{5}, \mathbf{15})$ и $(\mathbf{5}, \mathbf{30})$ матрицы правой части уравнения заданы значения $\mathbf{F}_{30, 10} = -\mathbf{1200}$, $\mathbf{F}_{5, 15} = \mathbf{1500}$ и $\mathbf{F}_{5, 30} = -\mathbf{1300}$, параметры уравнения $\mathbf{b}_{i,k} = \mathbf{c}_{i,k} = \mathbf{d}_{i,k} = \mathbf{a}_{i,k} = \ln(1 + i^*k)$, а матрица граничных условий имеет вид $\mathbf{v}_{i,k} = \sqrt{i} \times (1 - k)$, а $i, k = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{M}$.

• Уравнение параболического типа $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_x / 7$ с граничными условиями Дирихле $\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{t}) = \mathbf{t}^2 / 2$; $\mathbf{u}(\mathbf{L}, \mathbf{t}) = \sqrt{t}$ и начальными условиями $u(x, 0) = \ln \left[1 - \sin \left(\frac{x+1}{L} \right) + x^2 \right]$ при $\mathbf{L} = \mathbf{2}$ и для конечной точки по времени $\mathbf{T} = \mathbf{3}$. Использовать количество точек для решения по координате – $\mathbf{N}_x = \mathbf{30}$, и по времени – $\mathbf{N}_t = \mathbf{60}$.

• Одномерное волновое уравнение (использовать PDE solve block) $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{w}_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ с ограничением $\mathbf{w}_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{2} \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ при $\mathbf{a} = 2^{-3}$ в диапазонах по координате $[\mathbf{0}, \mathbf{1.2}]$ и по времени $[\mathbf{0}, \mathbf{3.1}]$ с начальными условиями $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \sin(\mathbf{x} / \mathbf{L})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \cos(\mathbf{x})$ и граничными условиями Дирихле $\mathbf{w}(\mathbf{0}, \mathbf{t}) = \sqrt{t}$ и $\mathbf{w}(\mathbf{L}, \mathbf{t}) = \mathbf{t}^2$.

7. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

• Уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(\mathbf{M} + 1) \times (\mathbf{M} + 1)$ точек ($\mathbf{M} = \mathbf{32}$), если в точках матрицы правой части уравнения заданы значения $\mathbf{F}_{i,i} = \mathbf{1000} + \mathbf{j} - i^2$.

• Уравнение параболического типа $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{u}_x / 3$ с граничными условиями Дирихле $\mathbf{u}(\mathbf{0}, \mathbf{t}) = \mathbf{1} / (\mathbf{1} + \mathbf{t})$; $\mathbf{u}(\mathbf{L}, \mathbf{t}) = \mathbf{t}$ и начальными условиями $u(x, 0) = tg(x^2 - x + 1)$ при $\mathbf{L} = \mathbf{1.2}$ и для конечной точки по времени $\mathbf{T} = \mathbf{3}$. Использовать количество точек для решения по координате – $\mathbf{N}_x = \mathbf{30}$, и по времени – $\mathbf{N}_t = \mathbf{60}$.

• Одномерное волновое уравнение (использовать PDE solve block) $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{a}^2 \mathbf{w}_{xx}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ с ограничением $\mathbf{w}_t(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = -\mathbf{2}\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ при $\mathbf{a} = \mathbf{1} / 3^2$ в диа-

пазонах по координате $[0, 1.5]$ и по времени $[0, 1.7]$ с начальными условиями $w(x, 0) = \cos[(1 + x) / L]$ и $v(x, 0) = \ln(1 + x)$ и граничными условиями Неймана $w_x(0, t) = t^2$ и $w_x(L, t) = \ln(1 + t)$.

8. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

• Уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 32$), если в точках $(10, 10)$, $(25, 5)$, $(25, 25)$ и $(5, 20)$ матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{10, 10} = -1700$, $F_{25, 5} = 1900$, $F_{25, 25} = -2700$ и $F_{5, 20} = -2500$, параметры уравнения $b_{i,k} = c_{i,k} = d_{i,k} = a_{i,k} = i + k$, а матрица граничных условий имеет вид $v_{i,k} = -\sqrt{i} (1 - \sqrt{k})$, а $i, k = 0, 1, \dots, M$.

• Уравнение параболического типа $u_t = u_{xx} - 0.8u_x$ с граничными условиями Неймана $u_x(0, t) = \sin t$; $u_x(L, t) = \cos t$ и начальными условиями

$$u(x, 0) = \ln \left[1 - \frac{2}{3} \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right] \text{ при } L = 3 \text{ и для конечной точки по времени } T = 3.$$

3. Использовать количество точек для решения по координате – $N_x = 30$, и по времени – $N_t = 40$.

• Система: алгебраическое уравнение $0 = v^2(x, t) + x^2 t v(x, t)$ и одномерное волновое уравнение (использовать функцию `numol`) $v_t(x, t) = a^2 v_{xx}(x, t)$ при $a = 2^{-1}$ в диапазонах по координате $[x_0 = 0, x_{end} = 4]$ и по времени $[t_0 = 0, t_{end} = 5]$. Количество дифференциальных уравнений `num_pde` = 2; количество алгебраических уравнений `num_pae` = 1. Правая

часть функции `pde_func` = $\begin{pmatrix} v_1 \\ a^2 v_{xx_0} \\ v_1^2 + x^2 t v_1 \end{pmatrix}$; начальные условия: `pinit` = $\begin{pmatrix} \sin(x^2) \\ \sqrt{x+3} \\ -x^2 \end{pmatrix}$;

граничные условия Неймана `bc_func` = $\begin{pmatrix} pinit_0(0) & pinit_0(x_{end}) & "N" \\ "NA" & "NA" & "D" \end{pmatrix}$.

9. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

• Уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 32$), если в точках матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{i,j} = j \times i - 25\sqrt{i+j}$.

• Уравнение параболического типа $u_t = u_{xx} + 3 u_x / 7$ с граничными условиями Дирихле $u(0, t) = 0.215 - t$; $u(L, t) = t - 0.144$ и начальными условиями $u(x, 0) = 1 - \arctg(1 - x + 2x^2 - 0.3x^3)$ при $L = 6$ и для конечной точки по времени $T = 3$. Использовать количество точек для решения по координате – $N_x = 60$, и по времени – $N_t = 60$.

• Одномерное волновое уравнение (использовать `PDE solve block`) $v_t(x, t) = a^2 w_{xx}(x, t)$ с ограничением $w_t(x, t) = -0.2 v(x, t)$ при $a = 3^{-2}$ в диапазонах по координате $[0, 1.7]$ и по времени $[0, 1.2]$ с начальными услови-

ями $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{1} - \sin(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}^2 - \mathbf{1}$ и граничными условиями Дирихле $\mathbf{w}(0, t) = t^2 + 1$ и $\mathbf{w}(\mathbf{L}, t) = 0$.

10. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(\mathbf{M} + 1) \times (\mathbf{M} + 1)$ точек ($\mathbf{M} = 48$), если в точках $(01, 10)$, $(40, 5)$, $(35, 35)$ и $(5, 40)$ матрицы правой части уравнения заданы значения $\mathbf{F}_{05, 10} = 6$, $\mathbf{F}_{40, 5} = 7$, $\mathbf{F}_{35, 35} = -10$ и $\mathbf{F}_{5, 40} = -2$, параметры уравнения $\mathbf{b}_{i,k} = \mathbf{c}_{i,k} = \mathbf{d}_{i,k} = \mathbf{a}_{i,k} = \mathbf{i} / (\mathbf{k} + 1)$, а матрица граничных условий имеет вид $\mathbf{v}_{i,k} = -\mathbf{e}^{\mathbf{i}} (1 + \sqrt[3]{k})$, а $\mathbf{i}, \mathbf{k} = 0, 1, \dots, \mathbf{M}$.

- Уравнение параболического типа $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} + 1/2 \mathbf{u}_x$ с граничными условиями Неймана $\mathbf{u}_x(0, t) = -2\sqrt{x}$; $\mathbf{u}_x(\mathbf{L}, t) = 1 - 0.27t^2$ и начальными условиями $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = (\mathbf{x} - 1)^2$ при $\mathbf{L} = 3.1$ и для конечной точки по времени $\mathbf{T} = 2.2$. Использовать количество точек для решения по координате – $\mathbf{N}_x = 30$, и по времени – $\mathbf{N}_t = 40$.

- Одномерное волновое уравнение (использовать PDE solve block) $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}^2 \mathbf{w}_{xx}(\mathbf{x}, t)$ с ограничением $\mathbf{w}_t(\mathbf{x}, t) = -0.2\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{a} = 1.09^2$ в диапазонах по координате $[0, 1.5]$ и по времени $[0, 1.7]$ с начальными условиями $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \ln[(1 + \mathbf{x}) / \mathbf{L}]$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \sin[(1 + \mathbf{x}) / \mathbf{L}]$ и граничными условиями Неймана $\mathbf{w}_x(0, t) = \sqrt{t}$ и $\mathbf{w}_x(\mathbf{L}, t) = \arctg(1 + t)$.

11. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(\mathbf{M} + 1) \times (\mathbf{M} + 1)$ точек ($\mathbf{M} = 32$), если в точках матрицы правой части уравнения заданы значения $\mathbf{F}_{i,j} = \mathbf{j} / (\mathbf{i} + 1)$; $\mathbf{i} = 0 \dots \mathbf{M} - 1$; $\mathbf{j} = 0 \dots \mathbf{M} - 1$, и $\mathbf{F}_{15, 15} = 50$.

- Уравнение параболического типа $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} - 0.75 \mathbf{u}_x$ с граничными условиями Неймана $\mathbf{u}_x(0, t) = 1 - 2\sqrt{x}$; $\mathbf{u}_x(\mathbf{L}, t) = 2.008 - \sqrt{t}$ и начальными условиями $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \sqrt[3]{x+1}$ при $\mathbf{L} = 7.1$ и для конечной точки по времени $\mathbf{T} = 42$. Использовать количество точек для решения по координате – $\mathbf{N}_x = 71$, и по времени – $\mathbf{N}_t = 42$.

- Система: алгебраическое уравнение $\mathbf{0} = (\mathbf{x} + 1) \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) + t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и одномерное волновое уравнение (использовать функцию **numol**) $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}^2 \mathbf{v}_{xx}(\mathbf{x}, t)$ при $\mathbf{a} = \sqrt{3}$ в диапазонах по координате $[\mathbf{x}_0 = 0, \mathbf{x}_{end} = 4]$ и по времени $[\mathbf{t}_0 = 0, \mathbf{t}_{end} = 3]$. Количество дифференциальных уравнений **num_pde** = 2; количество алгебраических уравнений **num_pae** = 1. Правая

часть функции **pde_func** =
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ a^2 v_{xx_0} \\ (x+1)v_1^2 + tv_1 \end{pmatrix};$$
 начальные условия: **pinit** =
$$\begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

; граничные условия Дирихле **bc_func** =
$$\begin{pmatrix} pinit_0(0) & pinit_0(x_{end}) & "D" \\ "NA" & "NA" & "D" \end{pmatrix}.$$

12. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 48$), если в точках $(15, 20)$, $(10, 40)$, $(24, 24)$ и $(40, 40)$ матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{15, 20} = -6$, $F_{10, 40} = 9$, $F_{24, 24} = -11$ и $F_{40, 40} = 5$, параметры уравнения $b_{i,k} = c_{i,k} = d_{i,k} = a_{i,k} = (k + 15) / (i + 5)$, а матрица граничных условий имеет вид $v_{i,k} = -e^{k-i} (1 + \ln(1 + i + k))$, а $i, k = 0, 1, \dots, M$.

- Уравнение параболического типа $u_t = u_{xx} + 2 u_x / 5$ с граничными условиями Дирихле $u(0, t) = 0.54 - t$; $u(L, t) = t + 0.99$ и начальными условиями $u(x, 0) = \cos(1 / (1 + x))$ при $L = 6$ и для конечной точки по времени $T = 3$. Использовать количество точек для решения по координате $- N_x = 60$, и по времени $- N_t = 60$.

- Система: алгебраическое уравнение $0 = t^2 v(x, t) + x t \sqrt{v(x, t)}$ и одномерное волновое уравнение (использовать функцию `numol`) $v_t(x, t) = a^2 v_{xx}(x, t)$ при $a = 3 / 5$ в диапазонах по координате $[x_0 = 0, x_{end} = 2]$ и по времени $[t_0 = 0, t_{end} = 1.5]$. Количество дифференциальных уравнений `num_pde = 2`; количество алгебраических уравнений `num_pae = 1`.

Правая часть функции `pde_func` =
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ a^2 v_{xx_0} \\ t^2 v_1 + x t \sqrt{|v_1|} \end{pmatrix}$$
; начальные условия:

`pinit` =
$$\begin{pmatrix} \sqrt{|\cos(x^2)|} \\ e^{-x} \\ x \end{pmatrix}$$
; граничные условия Неймана `bc_func` =
$$\begin{pmatrix} pinit_0(0) & pinit_0(x_{end}) & "N" \\ "NA" & "NA" & "D" \end{pmatrix}$$
.

13. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 64$), если в точках

$$\frac{\sin\left(\frac{5j}{M+1}\right)}{\cos(i)+1}$$

ках матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{i,j} =$

- Уравнение параболического типа $u_t = u_{xx} - 1 u_x / 7$ с граничными условиями Дирихле $u(0, t) = -0.785 - t$; $u(L, t) = t + 0.59$ и начальными условиями $u(x, 0) = \arctg(1 / (x^2 + 7x - 1))$ при $L = 2$ и для конечной точки по времени $T = 3$. Использовать количество точек для решения по координате $- N_x = 60$, и по времени $- N_t = 60$.

- Одномерное волновое уравнение (использовать `PDE solve block`) $v_t(x, t) = a^2 w_{xx}(x, t)$ с ограничением $w_t(x, t) = 0.5 v(x, t)$ при $a = 10^{-1}$ в диа-

пазонах по координате **[0, 3.7]** и по времени **[0, 1.2]** с начальными условиями $\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \ln(\mathbf{x}+1.1)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \sqrt{x+2}$ и граничными условиями Дирихле $\mathbf{w}(0, t) = t^2 + 2t + 0.095$ и $\mathbf{w}(L, t) = 1.569 + \sqrt{t}$.

14. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с ненулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 32$), если в точках **(20, 20)**, **(10, 30)**, **(25, 25)** и **(30, 10)** матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{20, 20} = 36$, $F_{10, 30} = 19$, $F_{25, 25} = 101$ и $F_{30, 10} = 105$, параметры уравнения $\mathbf{b}_{i,k} = \mathbf{c}_{i,k} = \mathbf{d}_{i,k} = \mathbf{a}_{i,k} = (\mathbf{k} + 15) \mathbf{i}$, а матрица граничных

условий имеет вид $\mathbf{v}_{i,k} = \frac{\exp(\cos(\sqrt{|k-i|}))}{\mathbf{a}}$, а $\mathbf{i}, \mathbf{k} = 0, 1, \dots, M$.

- Уравнение параболического типа $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} + 0.3 \mathbf{u}_x$ с граничными условиями Неймана $\mathbf{u}_x(0, t) = 1 - 2\sin(\sqrt{x})$; $\mathbf{u}_x(L, t) = 1 - \arctg(t)$ и начальными условиями $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \sqrt[3]{|x-3|}$ при $L = 17$ и для конечной точки по времени $T = 3$. Использовать количество точек для решения по координате $N_x = 70$ и по времени $N_t = 40$.

- Система: алгебраическое уравнение $0 = (t + 1) v^2(x, t) - a x v(x, t)$ и одномерное волновое уравнение (использовать функцию **numol**) $v_t(x,$

$t) = a^2 v_{xx}(x, t)$ при $a = \sqrt[3]{3}$ в диапазонах по координате $[x_0 = 0, x_{end} = 4]$ и по времени $[t_0 = 0, t_{end} = 3]$. Количество дифференциальных уравнений **num_pde** = 2; количество алгебраических уравнений **num_pae** = 1. Правая

часть функции **pde_func** = $\begin{pmatrix} v_1 \\ a^2 v_{xx_0} \\ ((t+1)v_1^2 + axv_1) \end{pmatrix}$; начальные условия:

pinit = $\begin{pmatrix} \sin(x^2) \\ 1 - \cos(x) \\ \arctg(x+3) \end{pmatrix}$; граничные условия Дирихле

bc_func = $\begin{pmatrix} pinit_0(0) & pinit_0(x_{end}) & "D" \\ "NA" & "NA" & "D" \end{pmatrix}$.

15. Решить дифференциальные уравнения в частных производных:

- Уравнение Пуассона с нулевыми граничными условиями на квадратной сетке размером $(M + 1) \times (M + 1)$ точек ($M = 64$), если в точ-

ках матрицы правой части уравнения заданы значения $F_{i,i} = \frac{\sin\left(\frac{3i+2j}{M+1}\right)}{\cos(j) + \sin(i)}$.

• Уравнение параболического типа $u_t = u_{xx} + 2 u_x / 9$ с граничными условиями Дирихле $u(0, t) = 0.54 - t$; $u(L, t) = t + 0.907$ и начальными условиями $u(x, 0) = \exp(\cos(7x - 1))$ при $L = 2$ и для конечной точки по времени $T = 3$. Использовать количество точек для решения по координате – $N_x = 60$, и по времени – $N_t = 60$.

Одномерное волновое уравнение (использовать PDE solve block) $v_t(x, t) = a^2 w_{xx}(x, t)$ с ограничением $w_t(x, t) = -1.2v(x, t)$ при $a = 0.137$ в диапазонах по координате $[0, 3]$ и по времени $[0, 2]$ с начальными условиями

ямы $w(x, 0) = \ln\left(\frac{\sqrt{x+2}}{L}\right)$ ($L = 3$) и $v(x, 0) = \cos\left(\frac{1+x+x^2}{L}\right)$ и граничными условиями Неймана $w_x(0, t) = -0.752 + t^2$ и $w_x(L, t) = \ln(1+t) - 0.294$.

2.3 Контрольные вопросы

1. С помощью какой функции можно решить задачу Коши в MathCAD?

2. Можно ли использовать смешанные начальные или граничные условия при решении обыкновенного дифференциального уравнения с помощью функции Odesolve?

3. Какую функцию следует использовать для численного решения краевой задачи в MathCAD?

4. Перечислите, какие функции можно использовать для численного решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем.

5. Укажите назначение аргументов функций, которые можно использовать для численного решения задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем.

6. Перечислите функции, которые используются для решения дифференциального уравнения n-го порядка (краевая задача).

7. Опишите метод численного решения двухточечной краевой задачи (дифференциального уравнения n-го порядка) с условиями на краях интервала.

8. Опишите метод численного решения двухточечной краевой задачи (дифференциального уравнения n-го порядка) с условиями внутри интервала.

9. Опишите метод численного решения двумерного уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями.

10. Опишите метод численного решения двумерного уравнения Пуассона с ненулевыми граничными условиями.

11. Опишите метод численного решения уравнения параболического типа с граничными условиями Дирихле или Неймана.

12. Опишите метод численного решения одномерного волнового уравнения с использованием PDE solve block'a.

13. Укажите назначение аргументов функции `Pdesolve` при решении одномерного волнового уравнения.

14. Опишите метод численного решения одномерного волнового уравнения с использованием функции `numo1`.

15. Укажите назначение аргументов функции `numo1` при решении одномерного волнового уравнения.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ЛАБОРАТОРНАЯ РОБОТА 1	
Символьные вычисления в системе MathCAD.....	4
1.1. Общие сведения.....	4
1.1.1. Символьные вычисления с использованием програ- ммы MathCAD. Команды меню Symbolics	4
1.1.2. Палитра символьных преобразований SmartMath.....	9
1.1.3. Оптимизация.....	13
1.2. Порядок выполнения работы.....	14
1.2.1. Задания для выполнения работы.....	14
1.2.2. Варианты заданий	14
1.3. Контрольные вопросы.....	27
2. ЛАБОРАТОРНАЯ РОБОТА 2	
Решение дифференциальных уравнений.....	28
2.1. Общие сведения.....	28
2.1.1. Решение дифференциального уравнения.....	28
2.1.2. Численное решение задачи Коши для дифферен- циальных уравне- ний.....	29
2.1.3. Решение краевых задач для обыкновенных диффере- нциальных уравнений.....	32
2.1.4. Уравнения в частных производных.....	35
2.2. Порядок выполнения работы.....	44
2.2.1. Задания для выполнения работы.....	44
2.2.2. Варианты заданий.....	44
2.3. Контрольные вопросы.....	54

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к лабораторным работам
«Символьные вычисления и дифференциальные уравнения
в системе MathCAD»
из раздела «Использование программ в среде Windows»
дисциплины «Основы программирования
и информационных технологий»
для студентов направления подготовки
6.050801 «Микро- и нанoeлектроника»

Составители: ЗАЙЦЕВ Роман Валентинович
ЛУКЪЯНОВ Евгений Александрович
КИРИЧЕНКО Михаил Валерьевич

Ответственный за выпуск Д.А. Кудий

План 2013 р.

Підписано до друку 15.01.14. Формат 60×84 1/16. Папір друк. №2.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 3,6.
Обл.-вид. 4,0. Тираж 50 прим. Зам. № _____. Ціна договiрна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.