

В. К. ПІОНТКОВСЬКИЙ, В. О. РАДЧЕНКО, М. А. ТКАЧУК, О. В. ВЕРЕТЕЛЬНИК, І. І. ТРУФАНОВ

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПОПЕРЕКОВОГО ВІДДІЛУ ХРЕБТА

Дегенеративно-дистрофічні зміни хребта призводять до змін параметрів хребетно-тазового балансу, що в свою чергу супроводжується змінами нижньопопереккових хребетних сегментів. Зміни, які відбуваються у нижньопоперекковому хребетному сегменті, призводять до деякого перерозподілу напружено-деформованого стану в елементах сегмента. Впровадження комп'ютерної інженерії дає можливість проводити дослідження для зрозуміння та оцінки процесів, які протікають, а також для підготовки та проведення, при необхідності, адекватного оперативного втручання. У роботі пропонується результати чисельного дослідження впливу на напружено-деформований стан елементів поперекового відділу хребта людини зміни кутів величин, які описують сегментарний і повний поперековий лордоз. Математична модель проведених досліджень застосовує основні співвідношення механіки суцільного середовища у зв'язці з чисельними методами, зокрема, з методом скінченних елементів. Викладені основні співвідношення узагальненого параметричного моделювання біологічних і біомеханічних систем. В ході дослідження розглядалися чотири розрахункові схеми, дві з яких описували «інтактний» стан поперекового відділу хребта людини, кутові величини, які описують сегментарний і повний поперековий лордоз бралися відповідно роботам авторів М. Bernhardt і К. Bridwell, а також R. Jackson і А. McManus. Інші дві розрахункові схеми описували патологічні зміни в бік збільшення і зменшення кутів показників сегментарного і повного поперекового лордозу. За підсумками досліджень були отримані чисельні характеристики напружено-деформованого стану для елементів досліджуваних біологічних систем, а також поля розподілу еквівалентних напружень і повних переміщень для усіх розрахункових схем. Результати дослідження дозволили провести порівняльний аналіз.

Ключові слова: напружено-деформований стан, поперековий відділ хребта, сегментарний лордоз, повний лордоз, метод скінченних елементів, еквівалентні напруження, геометричне моделювання.

В. К. ПИОНТКОВСКИЙ, В. А. РАДЧЕНКО, Н. А. ТКАЧУК, О. В. ВЕРЕТЕЛЬНИК, И. И. ТРУФАНОВ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЯСНИЧНОГО ОТДЕЛА ПОЗВОНОЧНИКА

Дегенеративно-дистрофические изменения позвоночника приводят к изменениям параметров позвоночно-тазового баланса, что в свою очередь сопровождается изменениями нижнепоясничных позвоночных сегментов. Протекающие изменения в нижнепоясничном позвоночном сегменте приводят к перераспределению напряженно-деформированного состояния в элементах сегмента. Внедрение компьютерной инженерии дало возможность проводить исследования для понимания и оценки протекающих процессов, а также для подготовки и проведения, при необходимости, адекватного оперативного вмешательства. В работе предлагаются результаты численного исследования влияния на напряженно-деформированное состояние элементов поясничного отдела позвоночника человека при изменении угловых величин, описывающих сегментарный и полный поясничный лордоз. Математическая модель проведенных исследований базируется на основных соотношениях механики сплошной среды в связке с численными методами, в частности, методом конечных элементов. Изложены основные соотношения обобщенного параметрического моделирования биологических и биомеханических систем. В ходе проведенного исследования были рассмотрены четыре расчетные схемы, две из которых описывали «интактное» состояние поясничного отдела позвоночника человека, согласно работам авторов М. Bernhardt и К. Bridwell, а также R. Jackson и А. McManus. Другие две расчетные схемы описывали патологические изменения в сторону увеличения и уменьшения угловых показателей сегментарного и полного поясничного лордоза. По итогам исследований были получены числовые характеристики напряженно-деформированного состояния для элементов исследуемых биологических систем, а также поля распределения эквивалентных напряжений и полных перемещений для всех расчетных схем. Результаты исследования позволили провести сравнительный анализ.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, поясничный отдел позвоночника, сегментарный лордоз, полный лордоз, метод конечных элементов, эквивалентные напряжения, геометрическое моделирование.

V. PIONTKOVSKY, V. RADCHENKO, M. TKACHUK, O. VERETELNYK, I. TRUFANOV

NUMERICAL STUDY OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE HUMAN LUMBAR SPINE

Degenerative-dystrophic changes in the spine lead to changes in the parameters of the vertebral-pelvic balance, which in turn is accompanied by changes in the lower lumbar vertebral segments. The flowing changes in the lower lumbar vertebral segment lead to a redistribution of the stress-strain state in the elements of the segment. The introduction of computer engineering has made it possible to conduct research to understand and evaluate ongoing processes, as well as to prepare and conduct, as necessary, adequate surgical intervention. The paper offers the results of a numerical study of the effect on the stress-strain state of the elements lumbar spine of a person with a change in the angular values describing segmental and full lumbar lordosis. The mathematical model of the conducted investigations was based on the main relations of the continuum mechanics, in conjunction with numerical methods, in particular, the finite element method. The basic relations of generalized parametric modeling of biological and biomechanical systems. The study considered four calculation schemes, two of which described the "intact" state of the lumbar spine of a person, according to the works of the authors M. Bernhardt and K. Bridwell, as well as R. Jackson and A. McManus. The other two calculation schemes described pathological changes in the direction of increasing and decreasing the angular parameters of segmental and full lumbar lordosis. Based on the results of the research, numerical characteristics of the stress-strain state for elements of the studied biological systems are obtained. In addition, the fields of equivalent stresses distribution and total displacements are obtained for all design schemes. The results of the study allowed a comparative analysis.

Keywords: stress-strain state, lumbar spine, segmental lordosis, full lumbar lordosis, finite element method, equivalent stresses, geometric modeling.

Вступ. На теперішній час сучасна медицина є, значною мірою, експериментальна наука з великим емпіричним досвідом. Однак, більш детальне вивчення деяких процесів, які відбуваються, є обмеженим, а часто

і неможливим в силу специфіки досліджуваної проблематики, як з точки зору медицини – патологій/захворювань/травм тощо, так і з точки зору індивідуальних особливостей пацієнтів з неможливістю

узагальнення результатів на інших пацієнтів. При цьому використання різних механічних засобів при проведенні оперативного лікування, в результаті якого вихідна біологічна система приводиться до біомеханічної системи, накладає, у свою чергу, додаткові невизначеності у вигляді параметрів, які описують досліджувану механічну систему. При цьому відбувається збільшення набору параметрів, що відповідають біологічній системі, набором параметрів, які описують механічну систему, а також утворених параметрів у результаті взаємодії біологічних і механічних систем, що формують єдину біомеханічну систему. Таким чином, отримати оптимальний набір параметрів, який описує, наприклад, метод лікування, тип використовуваної конструкції, індивідуальні особливості пацієнта тощо, без застосування математичного моделювання, як було зазначено вище, у більшості випадків є складним або взагалі неможливим. Найбільш ефективним методом вивчення біологічних і біомеханічних систем видається апарат математичного моделювання, який нагепер займає актуальні напрямки у наукових дослідженнях.

Так, застосування комп'ютерного моделювання у медичній практиці утворило затребуваний потужний інструментарій для розуміння процесів, які протікають у біологічних і біомеханічних системах. Отже, застосування комп'ютерного моделювання уможливило детально вивчити протікаючі процеси, а також зробити подальші прогнози у виборі методики лікування та післяопераційного відновлення пацієнта.

Однак, складність вивчення процесів, які протікають у біологічних і біомеханічних системах за допомогою комп'ютерного моделювання, неминуче пов'язана з використанням обчислювальної техніки. У сучасному розвиненому суспільстві застосування комп'ютерів стало буденним, їх використання не тільки дає змогу отримати поточні дані та їх обробляти, але й будувати моделі, проводити дослідження, а також здійснювати при цьому варіювання різних параметрів, тим самим здійснювати уточнення моделей. За допомогою таких моделей отримано можливість проводити комп'ютерні експерименти, разом із тим замінити дорогі та в деяких випадках неможливі натурні експерименти. Тому подальше широке застосування комп'ютерного моделювання та обчислювальної техніки у медичній практиці, зокрема травматології та ортопедії, супроводжується створенням різних біологічних і біомеханічних моделей для проведення досліджень, що у свою чергу сприяє створенню і накопиченню бази даних із результатами досліджень. Це позитивно сприяє розвитку якості медицини.

Застосування комп'ютерного моделювання дає можливість отримати тривимірні моделі, що описують різні патологічні зміни, травми тощо, які дозволяють провести дослідження з метою обґрунтування методики лікування, а також за допомогою комп'ютерного моделювання провести підготовку основних етапів реального оперативного втручання. При цьому, застосування комп'ютерної інженерії дає можливість

віртуально проводити планування всієї послідовності дій під час оперативного втручання, тим самим знизити можливі ризики, оскільки традиційно послідовність дій при проведенні оперативного втручання визначається самостійно хірургом «вручну», на основі аналізу стану елементів біологічної системи при проведенні передопераційного планування.

Таким чином, впровадження комп'ютерної інженерії у медичну практику дає можливість появи достатньої кількості спеціалізованих програмних комплексів, а також стандартних технічних рішень, спрямованих на допомогу у візуалізації елементів біологічної системи, проведення комп'ютерних досліджень і експериментів, які допомагають зрозуміти природу процесів, а також у виборі методики лікування і плануванні проведення оперативного втручання, наприклад, із використанням різних технічних засобів стабілізації, приводячи вихідну біологічну систему до біомеханічної.

На сьогоднішній момент застосовуване комп'ютерне моделювання у медицині використовує різні підходи та методи до моделювання біологічних і біомеханічних процесів. З розвитком обчислювальної техніки і програмного забезпечення моделювання цих процесів стало ефективним на основі використання математичних моделей [1].

Завдяки математичним моделям і комп'ютерним дослідженням можливо провести опис механічної поведінки різних сегментів людського скелета, зокрема його поперекового відділу. Відмінною особливістю стала та обставина, що проведення останніх стало можливим за допомогою застосування стандартних інженерних програмних комплексів CAD/CAE. Вони дають можливість проводити різноманітні дослідження напружено-деформованого стану складнопрофільних біологічних і біомеханічних систем, на відміну від спеціалізованих медичних програмних продуктів, спрямованих більшою мірою на вирішення певних вузькопрофільних завдань.

В рамках цієї роботи для розв'язання поставлених задач були використані стандартні інженерні програмні комплекси CAD/CAE. Так, для проведення досліджень був використаний програмний комплекс Workbench [2], який використовує методи механіки суцільного середовища у зв'язці з чисельними методами аналізу, зокрема, методом скінченних елементів (МСЕ). Для побудови параметричних тривимірних геометричних моделей використовувалася система автоматизованого проектування SolidWorks.

Проведені дослідження були реалізовані на підставі договору про спільну роботу між Рівненською обласною клінічною лікарнею та центром комп'ютерного моделювання "Тензор" Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", який оснащений комп'ютерним кластером "ПОЛІТЕХНІК-125".

Метою роботи є розробка методів та здійснення дослідження змін напружено-деформованого стану елементів поперекового відділу хребта людини

залежно від зміни величин, які характеризують сегментарний і повний поперековий лордоз.

Теоретичні основи системної методології математичного опису процесів деформування кісткової тканини

Теоретичне обґрунтування параметрів функціонування людини, зокрема кісткових тканин у вигляді твердого тіла, з фізичної точки зору, базується на математичній теорії механіки суцільного середовища. Механіка суцільного середовища включає в себе наступні дисципліни: теорія пружності, гідромеханіки, теорія масопередачі, теорія пластичності тощо.

У роботі основоположні математичні фундаментальні співвідношення між елементами біологічних і біомеханічних систем подаються як у формі рівнянь тензорного виду, так і в класичному векторному записі.

Механіка суцільного середовища має справу з фізичними та біомеханічними величинами, які не залежать від вибору системи координат, яка застосовується для їх опису. Математично ці величини подаються тензорами, які у кожній системі координат визначаються множиною величин – компонентами тензора. Якщо компоненти тензора задані в одній системі координат, то вони визначені і в будь-якій іншій системі [3, 4]. Береться до уваги той факт, що внаслідок лінійності та однорідності тензорних перетворень тензорні рівняння, якщо вірні в одній системі координат, то вірні і в іншій. Така інваріантність тензорних співвідношень щодо перетворень координат характеризує тензорне числення як основний математичний апарат вищих розділів диференціального та інтегрального числення змінних величин фізичної та біологічної природи [4].

Подальше комп'ютерне дослідження процесів деформування кісткової тканини, з математичної точки зору, включає ряд типових крайових задач механіки суцільного середовища. Такі задачі видаються нескінченновимірними. Однак, при розв'язанні подібних нескінченновимірних задач на ЕОМ існує необхідність їх зведення до задач скінченної розмірності (тобто дискретизація). Метод дискретизації задачі визначає метод наближеної заміни, в результаті чого нескінченновимірна задача зводиться до розв'язання системи лінійних або нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Нижче для розв'язання поставлених задач використовується декартова система координат, оскільки застосування інших систем координат, наприклад, таких як циліндрична, сферична тощо, не змінюють суті розв'язання чисельними методами на ЕОМ.

Основні співвідношення механіки суцільного середовища для опису напружено-деформованого стану біологічних і біомеханічних систем

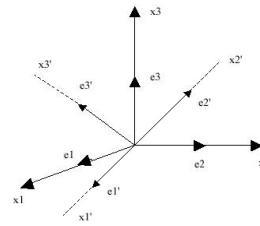


Рис. 1 – Декартова система координат і базисні вектори

Використовується декартова система координат $Ox_1x_2x_3$. Напрямок координатних осей визначаються векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ одиничної довжини (рис. 1).

Введемо поняття вектора \vec{A} (тензор першого рангу, він вважається заданим, якщо вказані компоненти $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ в системі координат $Ox_1x_2x_3$) і тензора $[T]$ (тензор другого рангу). За визначенням вектор \vec{A} і тензор $[T]$ записуються у вигляді [5]:

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3, \quad (1)$$

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i\vec{e}_i, \quad (2)$$

$$[T] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}e_i e_j. \quad (3)$$

Далі, для спрощення запису, символи вектора « \rightarrow » опускаються.

Компоненти векторів і тензорів, як скалярні величини, повинні бути симетричними, тобто вони не повинні змінюватися при зміні системи відліку. Наприклад, якщо поряд з базовою системою координат $Ox_1x_2x_3$ розглянути іншу систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$ (див. рис. 1) із базисними векторами e'_1, e'_2, e'_3 , то додаткова система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ утворюється з базової системи $Ox_1x_2x_3$ через поворот, при цьому інваріантність вектора A і тензора T забезпечується при обертанні системи координат, якщо компоненти вектора A_i і тензора T_{ij} при переході від базисної системи $Ox_1x_2x_3$ до додаткової системи $Ox'_1x'_2x'_3$ перетворюються за співвідношенням:

$$A_i = \sum_{i=1}^3 \beta_{ij} A'_{ij}; \quad (4)$$

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \beta_{ki} \beta_{mj} T'_{km}. \quad (5)$$

Використовується правило підсумовування А. Ейнштейна [3, 4] для скорочення запису виразів, які містять величини з індексами, відповідно до якого знак Σ опускається і підсумовування проводиться за вже повторюваними індексами, тоді (4) і (5) приймають вигляд:

$$A_i = \beta_{ij} A'_{ij}; \quad T_{ij} = \beta_{ki} \beta_{mj} T'_{km}.$$

Спрощену форму записи можна використовувати [6] також під час запису частинної похідної за просторовими змінними від скаляра та компонент тензорів:

$$\partial f / \partial x_i = f_{,i}; \quad \partial A_i / \partial x_j = A_{i,j}; \quad \partial T_{ij} / \partial x_k = T_{ij,k}.$$

Якщо $T_{ij} = T_{ji}$, то тензор T є симетричним, зокрема, таким тензором є тензор Кронекера, який має вигляд:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Опис процесів деформування на основі підходу Ейлера і Лагранжа.

Для деформівного тіла, зокрема, кісткових тканин, розв'язання крайових задач базується на підході Ейлера. З точки зору підходу Ейлера вивчення суцільного середовища полягає у дослідженні у точках простору параметрів деформування. У відповідності із цим, деформування середовища вважається визначеним, якщо для кожної точки досліджуваної області простору відомі швидкість, прискорення, густина тощо в кожен момент часу.

При чисельному розв'язанні крайових задач для деформованого тіла використовується підхід Лагранжа. Він полягає у визначенні руху суцільного середовища при заданні у кожен момент часу координат (y_1, y_2, y_3) кожної матеріальної частинки в момент часу $t=0$. Тобто відповідно до підходу Лагранжа рух, деформування тіла визначено функцією вигляду:

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad y_3 = y_3(x_1, x_2, x_3, t).$$

Таким чином, підхід Лагранжа зводиться до аналізу деформування окремих матеріальних частинок досліджуваного тіла.

Деформований стан

Положення точки у просторі задається радіус-вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Для характеристики деформованого стану, в рамках підходу Лагранжа, використовується вектор \vec{u} переміщень матеріальних частинок досліджуваного тіла:

$$u_i(\vec{x}, t) = y_i(\vec{x}, t) - x_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

а також симетричний тензор $\varepsilon_{i,j}(\vec{x}, t)$

деформацій. При малих деформаціях, за допомогою співвідношень Коші, компоненти тензора $\varepsilon_{i,j}$ визначаються через компоненти вектора переміщень \vec{u} [3, 7]:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (7)$$

Компоненти тензора деформації $\varepsilon_{i,j}$ можна подати у наступному вигляді:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij} + e_{ij}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} / 3, \quad (8)$$

де величини $\varepsilon \delta_{ij}$ – компоненти кульового тензора деформації; e_{ij} – компоненти девіатора деформацій.

Кульовий тензор характеризує об'ємну частину деформацій, а девіатор деформацій – зміну форми. Крім скаляра ε , використовуються також скалярні характеристики деформованого стану:

а) інтенсивність деформації –

$$\varepsilon_u = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}; \quad (9)$$

б) інтенсивність деформації зсуву –

$$e_u = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}. \quad (10)$$

Напружений стан

При розгляді напруженого стану матеріальної частинки, яка знаходиться у певний момент часу t у точці простору з координатами (x_1, x_2, x_3) при ортогональному перетині тіла площиною, яка проходить через точку (x_1, x_2, x_3) , використовується підхід Ейлера. При цьому, орієнтація цієї площини визначається вектором нормалі \vec{v} до неї. Напруження у точці (x_1, x_2, x_3) на майданчику з нормаллю \vec{v} :

$$\vec{P}_v = \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \Delta P / \Delta\Gamma, \quad (11)$$

де ΔP – вектор сили; $\Delta\Gamma$ – область навантаження.

$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ – вектори напруження за осями Ox_1, Ox_2, Ox_3 , де вектори v_1, v_2, v_3 співпадають з векторами e_1, e_2, e_3 . Вектори P_1, P_2, P_3 за компонентами мають такий вигляд:

$$P_1 = \sigma_{1j} e_j; \quad P_2 = \sigma_{2j} e_j; \quad P_3 = \sigma_{3j} e_j \quad (12)$$

Вектор напруження на майданчику з нормаллю \vec{v} визначається співвідношенням:

$$P_v = P_1 v_1 + P_2 v_2 + P_3 v_3; \quad v = (v_1, v_2, v_3) \quad (13)$$

$$P_v = \sigma_{ij} v_j e_i, \quad (14)$$

де $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{21}, \sigma_{13}, \sigma_{33}$ – компоненти вектора напружень, а величини σ_{ij} – компоненти тензора напружень Коші-Ейлера (тензор другого рангу).

Тензор напружень Лагранжа визначає напружений стан у момент часу $t=0$ у положенні з координатами (x_1, x_2, x_3) .

Умови рівноваги елементарного об'єму в околі точки (x_1, x_2, x_3) утворюють рівняння рівноваги:

$$\sigma_{ij} + Q_i = 0; \quad (15)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = 0, \quad (16)$$

де $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$ – густина об'ємних сил, тобто розглянутий тензор є симетричним і визначається 6-ма незалежними компонентами.

Середнім тиском є скалярна величина, яка визначається співвідношенням:

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (17)$$

Компоненти тензора напружень можна записати у наступному вигляді:

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + S_{ij}, \quad (18)$$

де S_{ij} – компоненти девіатора напружень, який визначається 5-ма незалежними компонентами, оскільки $S_{ij} \delta_{ij} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$.

Загальними скалярними характеристиками напруженого стану є:

а) інтенсивність напружень –

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2}{3} S_{ij} S_{ij}} \quad (19)$$

б) інтенсивність дотичних напружень –

$$\tau_u = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (20)$$

Величини σ, σ_u, τ_u при повороті осей системи координат не змінюються.

Прийняті моделі та характеристики опису напружено-деформованого стану дають можливість проводити математичне моделювання напруженого стану кісткових тканин біологічних систем, а також додаткових фіксуєчих систем, встановлених у процесі оперативного втручання, що в результаті утворюють біомеханічну систему, з метою розробки методики лікування.

Теоретичні основи опису напружено-деформованого стану кісткової тканини людини

При побудові математичних моделей для дослідження фізико-механічні властивості замінюються ідеалізованими, оскільки властивості матеріалів людських тканин мають значний діапазон розкиду залежно від віку, статі, індивідуальних особливостей тощо.

Тіло, що розглядається, зокрема кісткові тканини, є композиційним, тому може розглядатися як неоднорідне. Напружено-деформований стан досліджуваного тіла описується переміщеннями, деформаціями і силами внутрішньої взаємодії між шарами кісткової тканини, які в свою чергу, є безперервними функціями координат. Тому для визначення кількісних характеристик таких процесів застосовується апарат тензорних співвідношень (див. вище).

Як основний об'єкт дослідження виділимо елементарний об'єм тіла, який у математичному відношенні передбачається нескінченно малим, а також має властивості однорідного тіла. Таке подання кісткової тканини як суцільного середовища описується сукупністю взаємозв'язків, що описують механічну поведінку реального твердого тіла. Однак, фізико-механічні властивості кісткової тканини не є однаковими у всіх напрямках і з точки зору опису теорії суцільного середовища є суттєво анізотропними.

Напруження в елементарному об'єму досліджуваного тіла кісткової тканини виникають під впливом зовнішніх дій. Для вивчення напружень застосовується метод перетинів, згідно з яким розглядається в деякому перетині тіла мала площадка величиною ΔS з нормаллю $\{v\}$ в околі довільної точки A (рис. 2).

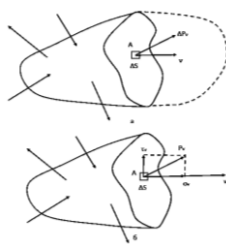


Рис. 2 – Середнє значення напруження в околі точки M (а) і розкладання вектора напруження на координатні складові (б)

Напруження в точці A , відповідно до співвідношення (11) і рисунку 2.2, відповідає:

$$P_v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta P_v / \Delta S \quad (21)$$

Вектор напруження P_v – повне напруження, яке розкладається на дві складові (рисунок 2, б): нормальне напруження σ_v і дотичне напруження τ_v . Нормальне напруження σ_v – це проекція вектору P_v на нормаль v , а дотичне напруження τ_v – проекція на площину площадки ΔS . Компоненти вектору напруження P_v у декартових координатних осях x, y, z є тензорними координатами P_{vx}, P_{vy}, P_{vz} , де індекс v вказує орієнтацію площадки, на якій діє напруження.

Напружений стан характеризує сукупність усіх векторів напруження, які діють на всіх майданчиках, проведених через точку A уздовж усіх координатних (тензорним) осей. Зазначені декартові осі (x, y, z) поєднуються з біолого-фізіологічними осями та площинами людини [7] (рис. 3 [8]).

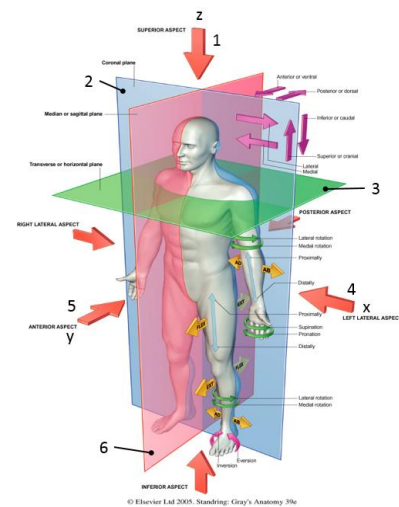


Рис. 3 – Біолого-фізичні площини та осі людини

На рис. 3 показано поєднане положення площин і осей у тілі людини і прямокутної системи координат (x, y, z): 1 – вертикальна вісь; 2 – фронтальна площина; 3 – горизонтальна площина; 4 – поперечна вісь; 5 – сагітальна вісь; 6 – сагітальна площина. Перетин цих площин визначає параметри декартової системи координат: площин 2-6 – вісь z ; 6-3 – вісь y ; 2-3 – вісь x . Центр декартової системи координат, точка O , відповідно утворена перетином всіх трьох площин.

Для розгляду напружено-деформованого стану (НДС) в околі точки O виділимо елементарний паралелепіпед (елементарний об'єм), ребра якого зорієнтовані паралельно координатним осям x, y, z (рис. 4).

Повні напруження S_x, S_y, S_z діючі на майданчиках елементарного об'єму з нормальми x, y, z , відповідно до рисунку 3, визначаються у такий спосіб:

$$S_x = \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k, \quad S_y = \tau_{yz} i + \sigma_y j + \tau_{yx} k, \quad S_z = \tau_{zx} i + \tau_{zy} j + \sigma_z k, \quad (22)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори прямокутної декартової системи координат.

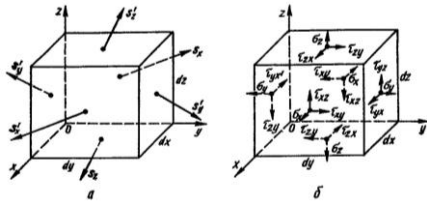


Рис. 4 – Повні напруження (а) та їх компоненти (б), що діють на гранях елементарного обсягу

Додатні напрямки напружень та їх позначення показані на рис. 5, б, вони збігаються з додатними напрямками координатних осей. Перший індекс у позначенні дотичного напруження вказує напрямком нормалі до площадки, на якій воно діє, другий – напрямком компоненти напруження. Тензор напружень T_σ на елементарному об'ємі включає в себе рядок векторів напружень S_x, S_y, S_z , діючих на трьох взаємно перпендикулярних площинах, а 9 скалярних величин $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ є компонентами тензора напружень.

Тензор T_σ через компоненти матриці подається у вигляді:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Умови рівноваги. При навантаженні досліджуваного тіла компоненти напруження безперервно змінюються від точки до точки, однак ці зміни не можуть бути довільними в силу того, що тіло і його окремі елементи знаходяться у взаємній рівновазі. На рис. 5 показані умови рівноваги елементарного паралелепіпеда (об'єму), з діючими розподіленими напруженнями (рис. 5). Таким чином, тензорні співвідношення (15), (16) можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (24)$$

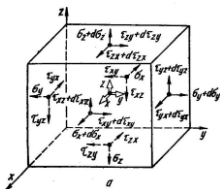


Рис. 5 – Умови рівноваги елементарного об'єму (нормальні та дотичні напруження)

Напруження на похилій площадці. Розглянемо деякий тетраедр (рис. 6). Цей тетраедр побудований трьома координатними площинами і деякою площадкою з одиничним вектором нормалі \vec{n} :

$$\vec{n} = \vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j} + \vec{v}_z \vec{k}, \quad (25)$$

де v_x, v_y, v_z – косинуси кутів між вектором і координатними осями x, y, z , відповідно.

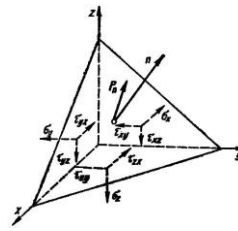


Рис. 6 – Основні співвідношення для напружень, діючих на гранях елементарного тетраедра в прямокутній декартовій системі координат

З умови рівноваги тетраедра виходять 3 скалярні рівняння:

$$\begin{aligned} P_{vx} &= \sigma_x v_x + \tau_{xy} v_y + \tau_{xz} v_z; \\ P_{vy} &= \tau_{yx} v_x + \sigma_y v_y + \tau_{yz} v_z; \\ P_{vz} &= \tau_{zx} v_x + \tau_{zy} v_y + \sigma_z v_z. \end{aligned} \quad (26)$$

Нормальне напруження на похилій площадці з нормаллю \vec{n} визначається як проекція вектору \vec{P}_v на напрям нормалі \vec{n} (25):

$$\sigma_v = \sigma_x v_x^2 + \sigma_y v_y^2 + \sigma_z v_z^2 + 2\tau_{xy} v_x v_y + 2\tau_{yz} v_y v_z + 2\tau_{zx} v_z v_x. \quad (27)$$

Значення дотичного напруження, що діє на тому ж майданчику, визначається наступним виразом:

$$\tau_v = \sqrt{P_v^2 - \sigma_v^2}, \quad \text{де } P_v^2 = P_{vx}^2 + P_{vy}^2 + P_{vz}^2. \quad (28)$$

Рівняння (2.26) можна використовувати як статичні граничні умови.

Головні напруження. Компоненти тензора напруження характеризують напружений стан, а їхні значення залежать від обраної системи координат. Однак, систему координат доцільно вибрати таким чином, щоб осі системи збіглися з головними осями напруженого стану. Величина нормального напруження σ_v залежить від орієнтації площадки, при цьому якщо вони екстремальні, то такі площадки – головні, а діючі напруження – головні напруження.

Розв'язавши наступне рівняння, можна визначити головні напруження:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0, \quad (29)$$

коефіцієнти якого дорівнюють:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Корені рівняння (29) – дійсні:

$$\sigma_1 = \lambda_1, \sigma_2 = \lambda_2, \sigma_3 = \lambda_3, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (30)$$

де σ_1 – максимальні і σ_3 – мінімальні головні напруження.

Тензор напружень у головних осях має вигляд:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Таким чином, у кожній точці деформівного тіла, існують три взаємно ортогональні площадки, на яких немає дотичних напружень, а нормальні – досягають екстремальних значень.

Тензор T_σ подається у вигляді двох доданків:

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

де T_{σ}^0 – кульовий тензор напружень, D_{σ} – девіатор напружень [9], середнє нормальне напруження:

$$\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = I_1/3.$$

Кульовий тензор характеризує зміну об'єму тіла. Девіатор – показує, наскільки напружений стан відхиляється від всебічного розтягування/стиснення, і характеризує зміну форми елементарного об'єму тіла.

Інтенсивність напружень (2.19) записується у вигляді:

$$\sigma_i = \sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)/2}. \quad (33)$$

Інтенсивність напружень σ_i є однією з основних характеристик напруженого стану в точці.

При дослідженні біологічних і біомеханічних систем у більшості випадків реалізується тривимірний об'ємний напружений стан. Однак залежно від значень головних напружень розрізняються лінійний, плоский (двовимірний) і об'ємний (тривимірний) напружений стани.

Основні співвідношення стану пружності для ізотропного стану. Для тривимірного напруженого стану справедливий закон Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]/E; \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]/E; \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)]/E; \gamma_{xz} = \tau_{xz}/G. \end{aligned} \quad (34)$$

де E – модуль пружності Юнга, μ – коефіцієнт Пуасона, G – модуль пружності на зсув.

При додаванні трьох рівностей маємо:

$$\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K}, \quad (35)$$

де K – об'ємний модуль пружності.

Таким чином, вище наведені співвідношення механіки суцільного середовища, які застосовні при моделюванні напружено-деформованого стану біологічних і біомеханічних систем. Представлений математичний апарат дав можливість описати напружено-деформований стан на основі математичного моделювання процесів деформування кісткових тканин.

Однак для повного опису напружено-деформованого стану необхідно враховувати умови контактної взаємодії елементів біологічних і/або біомеханічних систем.

Моделювання контактної взаємодії в досліджуваній біомеханічній системі

Вище, представлені основні співвідношення, що описують напружено-деформований стан біологічних і біомеханічних систем. У цілому компоненти вектору переміщень точок u_i , тензора деформацій ε_{ij} , тензора напружень σ_{ij} повинні для кожного елемента біологічних і біомеханічних систем задовольняти трьома типам співвідношень (див. вище):

- рівняння Коші: $2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \quad i, j = 1, 2, 3;$ (36)

- рівняння рівноваги: $\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3;$ (37)

- закон Гука: $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$ (38)

де f – компоненти об'ємного навантаження; E_{ijkl} – тензор пружних постійних матеріалу (в загальному випадку неоднорідного та анізотропного).

Рівняння (36) - (38) діють всередині області $\Omega^{(m)}$, яка займається у просторі тим чи іншим елементом біологічної та/або біомеханічної системи з номером m . На границі поверхні $S^{(m)}$ області $\Omega^{(m)}$ переміщення, деформації та напруження задовольняють деяким граничним умовам у вигляді рівності:

$$\bar{u}|_{S_u^{(m)}} = \bar{u}^*(x), \quad (39)$$

де \bar{u}^* – задана функція переміщень;

$$\bar{\sigma}|_{S_{\sigma}^{(m)}} = \bar{\sigma}^*(x), \quad (40)$$

де $\bar{\sigma}^*$ – тиск; $S_u^{(m)}$ і $S_{\sigma}^{(m)}$ – частини поверхні $S^{(m)}$, на яких задаються кінематичні і силові граничні умови, відповідно. Однак виникає необхідність завдання граничних умов у вигляді нерівностей, ці умови задаються на поверхні $S_c^{(m)}$ області $\Omega^{(m)}$, де можлива контактна взаємодія одного $S^{(m)}$ елемента з іншим $S^{(n)}$:

$$u_v^{(m)} + u_v^{(n)} \leq \delta^{(mn)}(x), \quad (41)$$

$$\sigma_N^{(m,n)} \leq 0, \quad \sigma_T^{(m,n)} = 0, \quad (42)$$

де u_v – переміщення уздовж нормалі v до поверхні $S_c^{(m)}$; $\delta^{(mn)}$ – початковий зазор між поверхнями $S^{(m)}$ і $S^{(n)}$ елементів біомеханічної системи; σ_N, σ_T – нормальне і тангенціальне напруження на поверхні S_c .

Сукупність рівнянь (36) - (40) і нерівностей (41), (42), які діють всередині областей досліджуваних елементів біологічних і/або біомеханічних систем і на їх границях, становлять (в силу нелінійності співвідношень (41), (42)) нелінійну крайову задачу. Для її розв'язання одним із найбільш ефективних інструментів є метод варіаційних нерівностей [5, 10-15]. Відповідно до нього вихідна нелінійна задача зводиться до варіаційної нерівності [5, 10-15] типу:

$$a(u, \delta u) \geq L(\delta u) \quad \forall \delta u \in K, \quad u \in K, \quad (43)$$

де K – множина переміщень, що задовольняють нерівності (41), а $a(u, v)$ і $L(v)$ – білінійна і лінійна форми, задані наступними співвідношеннями [5, 10-15]:

$$a(u, v) = \sum_m \int_{\Omega^{(m)}} \sigma_{ij} \left(u^{(m)} \right) \cdot \varepsilon_{ij} \left(v^{(m)} \right) d\Omega, \quad (44)$$

$$L(v) = \sum_m \int_{S^{(m)}} \sigma_{ij}(u^{(m)}) \cdot v_i^{(m)} v_j^{(m)} dS. \quad (45)$$

Варіаційну нерівність (43) згідно [11-16] можна звести до задачі визначення мінімуму функціоналу:

$$I = \frac{1}{2} a(u, u) - L(u), \quad u \in K. \quad (46)$$

Таким чином, вихідну нелінійну крайову задачу (36) - (42) з обмеженнями типу нерівностей зводимо до задачі пошуку екстремуму функціонала на множині функцій, які задовольняють граничним умовам у вигляді нерівностей.

Для розв'язання такого типу задач для областей складної форми необхідно використовувати чисельні методи [5, 10-15]. Зокрема, найбільш потужними і ефективними з них є метод скінченних елементів (МСЕ) [16] і метод граничних елементів (МГЕ) [17]. Найбільш адаптованим є МСЕ для дослідження напружено-деформованого стану елементів біологічних і біомеханічних систем, оскільки він найкращим способом пристосований до розв'язання задач, які мають складнопрофільну геометричну форму досліджуваних об'єктів, а також дає можливість проводити урахування анізотропних властивостей та неоднорідності матеріалів. Також важливим чинником є наявність широкого спектра програмних продуктів типу ANSYS, Nastran, Abaqus, що володіють досить розвиненими та ефективними засобами препроцесінгу та постпроцесінгу, за наявності вискоефективних розв'язувачів з можливим розпаралелюванням обчислень.

Основна ідея методу скінченних елементів полягає в тому, що шукана функція u подається у вигляді розкладання у ряд за базисними функціями:

$$u = \sum \lambda_k \xi_k(x), \quad (47)$$

де λ_k – вектор вузлових параметрів, відповідний множині вузлів і ступенів вільності скінченно-елементної моделі [16, 17], $\xi_k(x)$ – базисна функція, локально-визначена на множині скінченних елементів, що мають загальний вузол k .

Обмежуючись деякою скінченно-елементною розбивкою і використовуючи розкладання (47), функціонал I (46) можна привести до вигляду:

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N k_{ij} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i,j=1}^N b_i \lambda_j, \quad (48)$$

$$\text{Де } k_{ij} = \int_{(\Omega^{(m)})} \sigma_{ij}(u^{(m)}) \cdot \varepsilon_{ij}(v^{(m)}) d\Omega; \quad (49)$$

$$b_i = \int_{(S^{(m)})} \xi_i dS. \quad (50)$$

За відсутності обмежень умова екстремальності (46)

$$\partial I / \partial \lambda = 0 \quad (51)$$

утворює систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$K \lambda = b, \quad (52)$$

де K – матриця жорсткості, складена з елементів k_{ij} (49), b – масив вузлових навантажень, який

вираховується за формулою (50).

Для урахування граничних умов типу нерівностей можна застосувати різні методи [16, 18-22]: метод множників Лагранжа, метод штрафу тощо. У результаті процесу ітераційного розв'язання визначається вектор λ^* , область контактної взаємодії S_c^* , а також величина і розподіл на цій області контактного тиску q_c^* . Із використанням співвідношення (47) відновлюється поле переміщень u^* . За рівняннями Коші (36) визначається тензор деформацій $\varepsilon^*(u^*)$. За залежностями (38) визначаються компоненти тензора напружень $\sigma^*(u^*)$ через компоненти деформації $\varepsilon^*(u^*)$. Це дає можливість, у свою чергу, визначити за формулами (30) головні напруження $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ у кожній точці біомеханічної системи, а за формулою (33) – інтенсивність напружень σ_u або еквівалентні напруження σ_i . У результаті у кожній точці області $\Omega^{(m)}$ визначаються всі характеристики напружено-деформованого стану, а на поверхні $S_c^{(m)}$ – тиск контактної взаємодії. Знання цих характеристик дає можливість проводити аналіз результатів дослідження, який, у свою чергу, дає можливість зробити висновок про механічну поведінку досліджуваних біологічних і/або біомеханічних систем, визначити ступінь небезпеки того чи іншого навантаження або за критерієм переміщень:

$$u_e^{\max} \leq [u], \quad (53)$$

де u_e^{\max} – деякі переміщення, які становлять небезпеку, $[u]$ – їх граничні допустимі значення, або за критерієм міцності матеріалу:

$$\sigma_e^{\max} \leq [\sigma], \quad (54)$$

де σ_e^{\max} – еквівалентні напруження, $[\sigma]$ – граничні допустимі напруження, або за критерієм стійкості відносно контактного тиску:

$$q_c^{\max} \leq [q_c], \quad (55)$$

де q_c^{\max} – тиск контакту у сполученні елементів досліджуваної системи, $[q_c]$ – граничний допустимий тиск, який витримується поверхнею контактуючого тіла без руйнування.

Враховуючи [23], що тканини людини мають механічні характеристики, які змінюються з віком, статтю, індивідуальними особливостями організму, а характеристики НДС, крім зовнішнього навантаження, залежать також від фізико-механічних характеристик матеріалів, від виду травми чи іншої патології, від обраної схеми оперативного лікування, то у підсумку приходимо до ситуації, коли обмеження (53) - (55) можна в загальному вигляді записати у такий спосіб:

$$L_e(u^*, f, IPM, PATH, SHURG) \leq [L_e](IM, \tau, REHAB), \quad (56)$$

де L_e , $[L_e]$ – набір обмежувальних характеристик і їх граничні допустимі значення; u^* – переміщення, які

разом з $\varepsilon^*(u^*), \sigma^*(u^*), q_c(u^*)$ та іншими характеристиками повністю описують напружено-деформований стан у результаті впливу зовнішнього навантаження f ; IPM – індивідуальні фізико-механічні характеристики матеріалів тканин людини, зокрема кісткових тканин; $PATH$ – особливості патологічних змін (травми, захворювання, пухлини тощо); $SHURG$ – характеристики схеми оперативного втручання; IM – індивідуальні механічні властивості пацієнта; τ – вік пацієнта; $REHAB$ – характеристики реабілітаційного періоду, що впливають на зміну властивостей елементів системи (в тому числі фізико-механічні властивості тканин).

Співвідношення (56) узагальнює і завершує етап формалізації при розв'язанні задачі аналізу механічної поведінки елементів біологічних і/або біомеханічних систем при дії всього комплексу зовнішніх і внутрішніх чинників. Для повноти опису проблематики необхідно проводити різноманітні дослідження, результатами яких стануть формування бази даних, яка описує той чи інший вид травми, методи і способи оперативного втручання тощо. При цьому необхідність проведення одиничних досліджень також буде актуальна, оскільки необхідно враховувати особливості пацієнта, характер травми або патології, а також методи і засоби, що використовуються при оперативному втручанні.

Таким чином, виникає актуальна необхідність у створенні таких підходів, моделей і засобів, які б дали можливість розв'язання задачі узагальненого аналізу механічної поведінки елементів біологічних і/або біомеханічних систем при дії зовнішніх і внутрішніх чинників, задачі синтезу оперативного втручання при урахуванні індивідуальних особливостей пацієнта. Розв'язання цієї нової науково-практичної задачі описано нижче в роботі.

Розвиток і адаптація узагальненого підходу до розв'язання задач аналізу та синтезу елементів біологічних і/або біомеханічних систем

Як було відзначено вище, наявність математичного апарату для аналізу напружено-деформованого стану елементів біологічних і біомеханічних систем з урахуванням контактної взаємодії, є потужним інструментом розв'язання складних нелінійних задач. Однак, методологічно цей апарат непридатний ні для проведення різноманітних досліджень, ні для розв'язання оберненої задачі – синтезу оперативного втручання при урахуванні індивідуальних особливостей пацієнта. Утворена наукова задача є набагато складнішою, тому що з системної точки зору є більш загальною, що передбачає при своєму розв'язанні не тільки багаторазове розв'язання окремих задач аналізу, але і процес зміни самих моделей досліджуваних систем, характеристик, критеріїв, обмежень тощо.

Проводити варіювання необхідних параметрів при дослідженні задач такого класу надзвичайно складно, оскільки необхідно визначити інструмент варіювання параметрів досліджуваних моделей. Цей інструмент, з одного боку, має створювати моделі за

певним алгоритмом, а з іншого боку – варіювати складноформалізовані фактори та характеристики. При цьому, цей інструмент має бути сумісним із методами аналізу, зокрема, з методом скінченних елементів.

Із аналізу літератури, комплекс вимог найбільшою мірою відповідає методу узагальненого параметричного опису механічних і біомеханічних систем, запропонований і розвинений у роботах [24-30]. Центральним поняттям, використовуваним для формалізації процесу досліджень, виступає поняття узагальненого параметра. Узагальнений параметр – це компонента з множини чинників, яка у сукупності з іншими узагальненими параметрами дає змогу однозначно створювати ту чи іншу модель досліджуваного об'єкта. Слідуючи [24-30], якщо позначити множину всіх узагальнених параметрів через P , а один узагальнений параметр – p_i , тоді задачу аналізу можна записати у наступному вигляді:

$$L(u, P, f, t) = 0. \quad (57)$$

Тут P – множина параметрів IPM , $PATH$, $SHURG$ тощо (див. (56)); L – оператор крайової задачі (36)-(42).

Задача параметричного аналізу формалізується у вигляді пошуку залежностей:

$$h_r = h_r(u, P, f, t), \quad (58)$$

де h_r – компоненти стану досліджуваної системи (наприклад, максимальні напруження і деформації в окремих елементах, переміщення, кути повороту тощо); $r = 1, \dots, N_h$ – поточний номер компоненти у їх сукупності H .

Задача синтезу полягає у пошуку такого набору змінних параметрів p_{var}^* , що є підмножиною загальної множини узагальнених параметрів P , який доставляє мінімум (максимум) деякому функціоналу якості R (наприклад, критеріям за міцністю, жорсткістю, масою, розмірами тощо):

$$p_{var}^* = \arg \min R(u, P, f, t), p_{var} \subset P. \quad (59)$$

При цьому u в (59) задовольняє рівнянню стану (57), разом тим, виконуються додаткові обмеження:

$$Q_k(u, P, H, f, t) \leq [Q_k], k = 1, \dots, N_Q, \quad (60)$$

де Q_k є узагальненнями активних обмежень (типу (53) - (55)).

Таким чином, введення поняття узагальненого параметра дає можливість формалізувати весь цикл досліджень напружено-деформованого стану досліджуваних об'єктів, а також синтезу параметрів за заданими критеріями і обмеженнями.

При цьому, слідуючи [24-30], для адаптації цього підходу до дослідження задач такого класу потрібне створення спеціальних процедур отримання моделей досліджуваних об'єктів M за заданим набором узагальнених параметрів P :

$$M = M(P). \quad (61)$$

Оскільки на теперішній час процес створення геометричних і скінченно-елементних моделей, у більшості випадків, здійснюється в CAD/CAE-системах [31-33], то пропонується наступний шлях побудови (61):

1) визначаються варійовані і неварійовані узагальнені параметри P ;

2) із використанням сучасного інструментарію систем автоматизованого проектування (наприклад Creo, Pro/ENGINEER, SolidWorks) за заданим набором параметрів P генерується модель досліджуваного об'єкта M , засобами керуючих команд U ;

3) пропонується процедура аналізу поточного розв'язку;

4) пропонується процедура варіювання p_{var} .

Запропонований підхід є узагальненням методу побудови моделей досліджуваних об'єктів. Його адаптація до дослідження проведена та описана далі у роботі на прикладі аналізу напружено-деформованого стану поперекового відділу хребта.

Чисельні дослідження напружено-деформованого стану поперекового відділу хребта людини

У рамках цього дослідження було побудовано 4-и розрахункові схеми, які описували поперековий відділ хребта. В основу моделі досліджуваної біологічної системи була покладена інтактна модель, побудована за КТ знімками. Побудована модель описує поперековий відділ хребта людини, крижові хребці, міжхребцеві диски і хрящі, а також модель була доповнена окремим елементом. Цей додатковий елемент був побудований для коректної передачі навантаження. Хребці, які утворюють біологічну систему, мають структурний поділ на кортикальну і губчасту тканини. Усі 4-и схеми мали ідентичну структуру, при цьому відмінності полягали у величинах сегментарного і повного поперекового лордозу. Перші дві розрахункові схеми описували поперековий відділ згідно з даними, отриманими фахівцями М. Bernhardt і К. Bridwell, R. Jackson і А. McManus, відповідно. Перші дві розрахункові схеми прийняті як базові моделі, які описують нормальні величини сегментарного і повного поперекового лордозу. Третя і четверта моделі описувала патологічні зміни у бік збільшення і зменшення сегментарного і повного поперекового лордозу, відповідно. На рис. 6 представлені геометричні моделі для 4-х розрахункових схем.

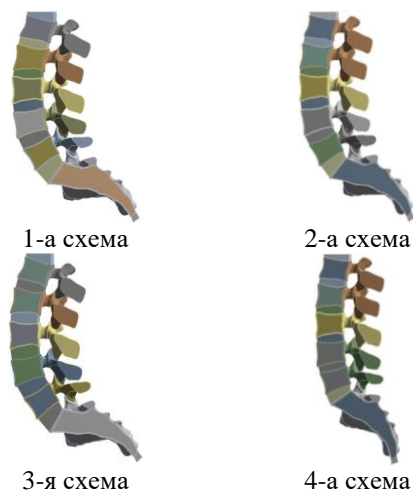


Рис. 6. Геометричні моделі

На рис. 7 представлена геометрична модель в різних видах, на прикладі першої розрахункової схеми.

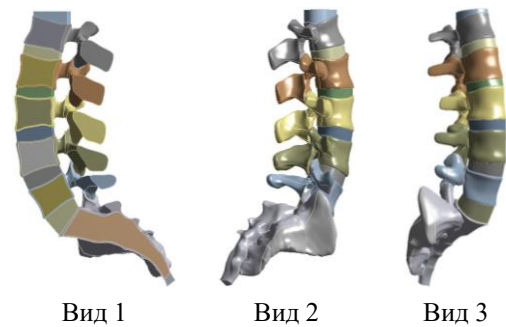


Рис. 7 – Геометрична модель для першої розрахункової схеми

У табл. 1 представлені величини сегментарного і повного поперекового лордозу для всіх розрахункових схем.

Як було зазначено вище, властивості матеріалів людських тканин мають значний діапазон розкиду в залежність від віку, статі, індивідуальних особливостей тощо. У рамках цього дослідження були використані наступні фізико-механічні властивості кісткових тканин, які наведені в табл. 2 [34-40].

Таблиця 1 – Величини сегментарного і повного поперекового лордозу (град)

сегмент хребта	1-а схема	2-а схема	3-я схема	4-а схема
L1-L2	4	1,5	6,4	1,2
L2-L3	7	7	9,9	4,4
L3-L4	13	11,3	16	4
L4-L5	20	16,5	21,1	14,5
L5-S1	28	24,6	27,4	19,2
L1-S1	72	60,9	80,8	43,3

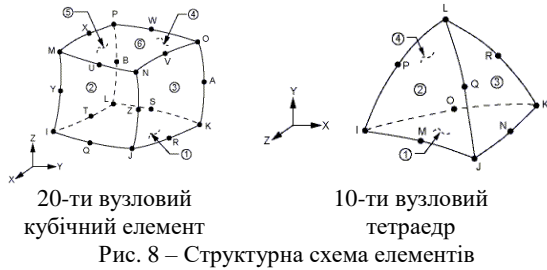
Таблиця 2 – Фізико-механічні характеристики матеріалів

Матеріал	Модуль Юнга E , (МПа)	Коефіцієнт Пуассона ν
Кортикальна кістка	10 000	0,3
Губчата кістка	450	0,2
Хрящ дугоотростчатого суглобу	10,6	0,49
Міжхребцевий диск	4,2	0,45

При побудові скінченно-елементних моделей використовувалися комбіновані скінченно-елементні сітки, які включали елементи різних типів, перший використовуваний елемент був 20-тивузловий кубічний елемент (SOLID186), а другий – 10-тивузловий тетраедр (SOLID187). Використання елемента типу SOLID186 дає можливість розбити простіші області геометричної моделі з найменшою похибкою, а застосування іншого елемента SOLID187 дає можливість розбити більш складні області моделі, для яких неможливе використання першого типу елементів.

Таким чином, застосування комбінування різних типів елементів при побудові скінченно-елементної моделі складної форми елементів біологічних систем дає можливість отримати високу апроксимацію напружено-деформованого стану при розрахунках. На рис. 8 представлені структурні схеми використовуваних скінченних елементів при дослідженні біологічних систем.

Побудовані скінченно-елементні моделі налічували близько 1.4 млн. елементів. На рис. 9 представлена скінченно-елементна модель для першої розрахункової схеми.



Навантаження здійснювалося шляхом прикладання сили до додаткового елемента, що діє у вертикальному напрямку, та дорівнює 350 Н. Ця величина зумовлена тим, що навантаження, яке діє на поперековий відділ, відповідає 700 Н, з урахуванням симетрії в сагітальній площині величина навантаження відповідає 350 Н. Як закріплення була зафіксована виділена частина крижової області. На рис. 10 представлені схеми навантаження, закріплення і умови симетрії в сагітальній області на прикладі першої розрахункової схеми.

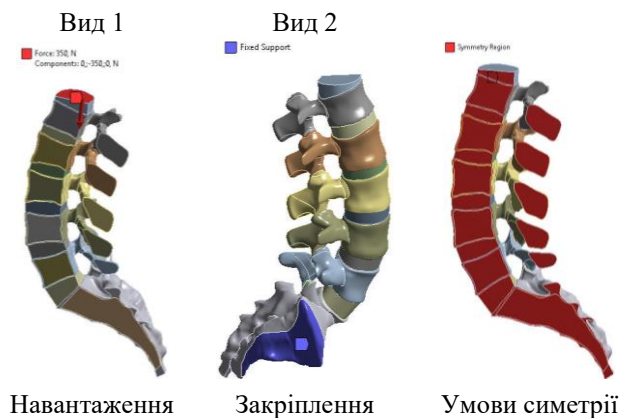


Рис. 10 – Схеми навантаження і закріплення, а також умови симетрії (1-а розрахункова схема)

Результати чисельних досліджень напружено-деформованого стану поперекового відділу хребта.

За підсумками проведених досліджень були визначені максимальні еквівалентні напруження за von-Mises і повні переміщення для елементів у досліджуваних біологічних системах.

Нижче на рис. 11 - 22 представлені діаграми з максимальними еквівалентними напруженнями за von-Mises кортикальних і губчатих тканин, для всіх розрахункових схем. На рис. 23 - 32 представлені діаграми з максимальними еквівалентними напруженнями для міжхребцевих дисків і хрящів. На рис. 33 та 34 представлені максимальні еквівалентні напруження і повні переміщення, отримані у повній моделі, для всіх розрахункових схем.

На рис. 35 - 37 представлені поля розподілу еквівалентних напружень в кортикальних кістках для всіх розрахункових схем, відповідно.

На рис. 38 та 39 представлені поля розподілу еквівалентних напружень і повних переміщень у повних моделях для всіх розрахункових схем, відповідно.

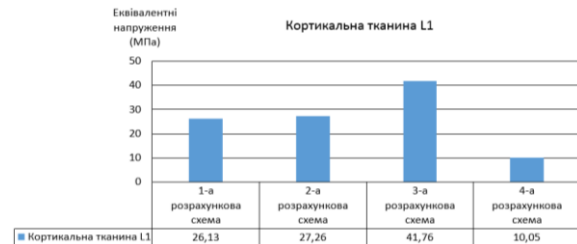


Рис. 11 – Максимальні еквівалентні напруження – кортикальна тканина L1

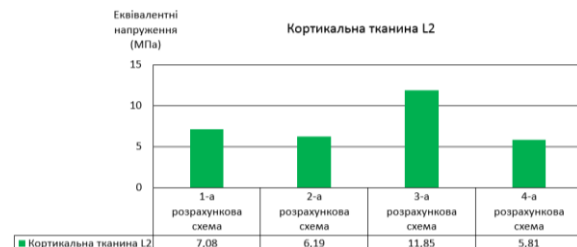


Рис. 12 – Максимальні еквівалентні напруження – кортикальна тканина L2



Рис. 13 – Максимальні еквівалентні напруження – кортикальна тканина L3



Рис. 14 – Максимальні еквівалентні напруження – кортикальна тканина L4



Рис. 20 – Максимальні еквівалентні напруження – губчата тканина L4

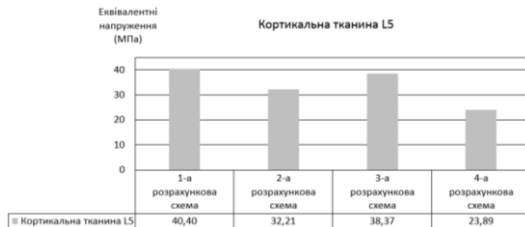


Рис. 15 – Максимальні еквівалентні напруження – кортикальна тканина L5



Рис. 21 – Максимальні еквівалентні напруження – губчата тканина L5



Рис. 16 – Максимальні еквівалентні напруження – кортикальна тканина S1



Рис. 22 – Максимальні еквівалентні напруження – губчата тканина S1



Рис. 17 – Максимальні еквівалентні напруження – губчата тканина L1

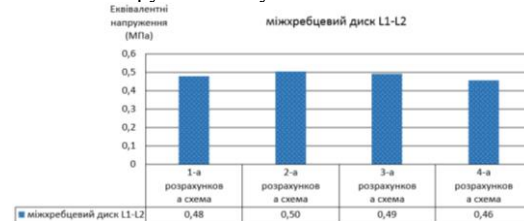


Рис. 23 – Максимальні еквівалентні напруження – міжхребцевий диск L1-L2



Рис. 18 – Максимальні еквівалентні напруження – губчата тканина L2

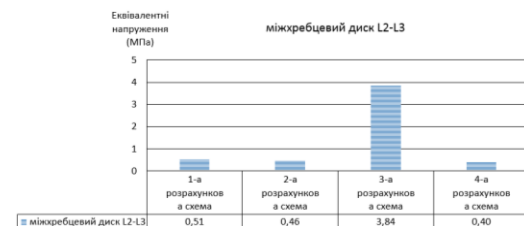


Рис. 24 – Максимальні еквівалентні напруження – міжхребцевий диск L2-L3



Рис. 19 – Максимальні еквівалентні напруження – губчата тканина L3

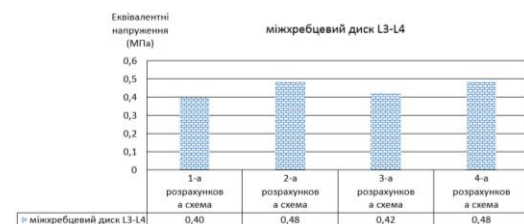


Рис. 25 – Максимальні еквівалентні напруження – міжхребцевий диск L3-L4

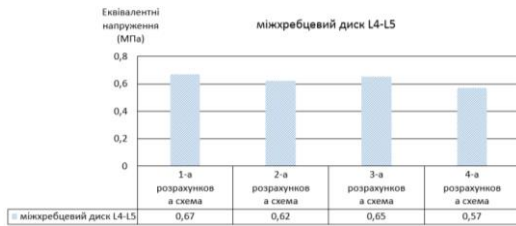


Рис. 26 – Максимальні еквівалентні напруження – міжхребцевий диск L4-L5



Рис. 27 – Максимальні еквівалентні напруження – міжхребцевий диск L5-S1

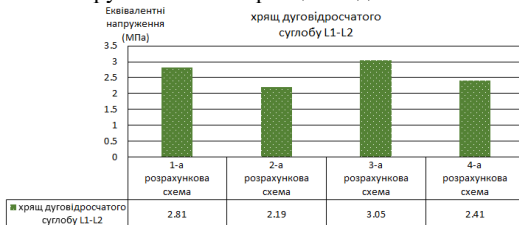


Рис. 28 – Максимальні еквівалентні напруження – хрящ дуговідросчатого суглобу L1-L2

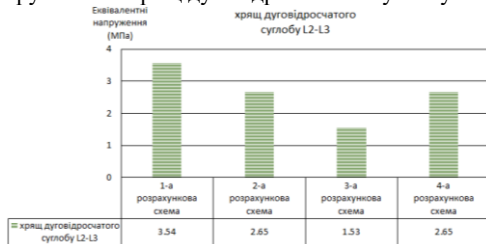


Рис. 29 – Максимальні еквівалентні напруження – хрящ дуговідросчатого суглобу L2-L3



Рис. 30 – Максимальні еквівалентні напруження – хрящ дуговідросчатого суглобу L3-L4

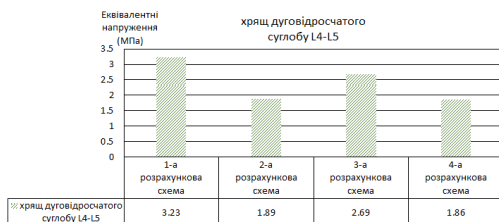


Рис. 31 – Максимальні еквівалентні напруження – хрящ дуговідросчатого суглобу L4-L5



Рис. 32 – Максимальні еквівалентні напруження – хрящ дуговідросчатого суглобу L5-S1

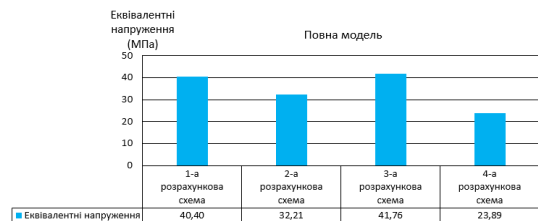
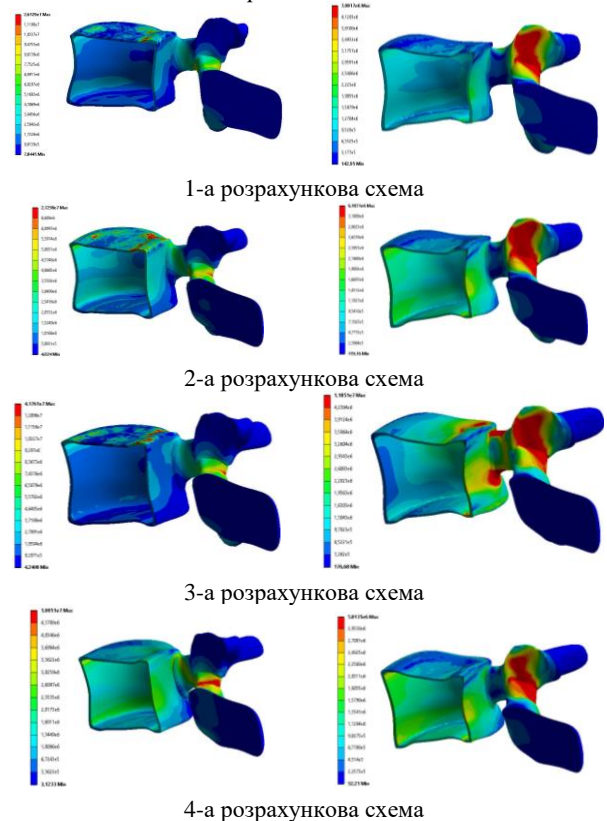


Рис. 33 – Максимальні еквівалентні напруження – повна модель

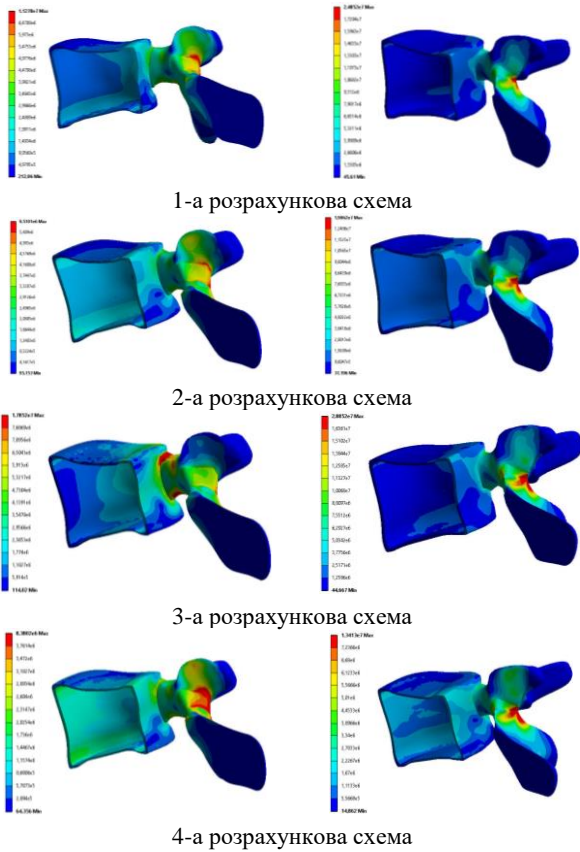


Рис. 34 – Повні переміщення – повна модель

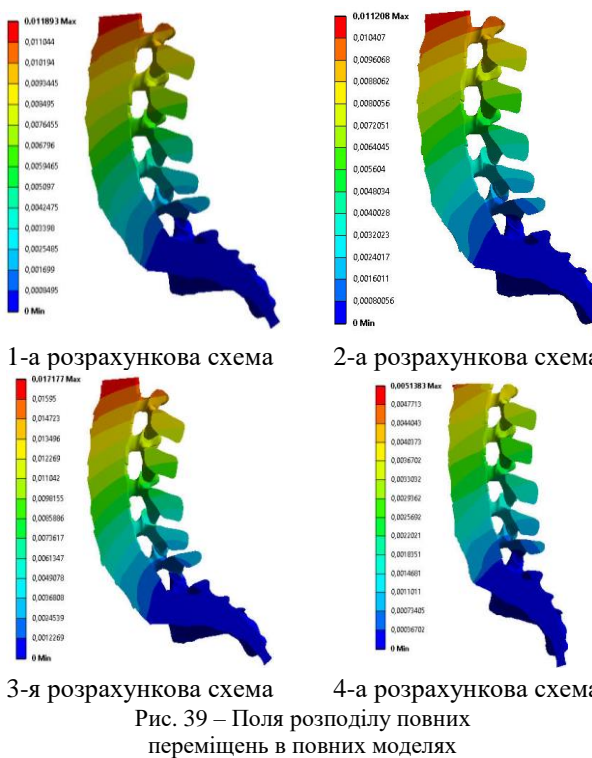
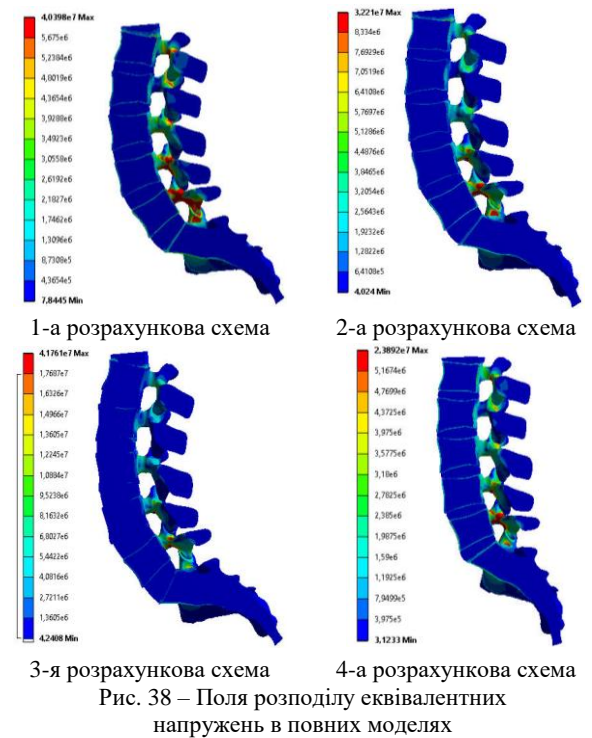
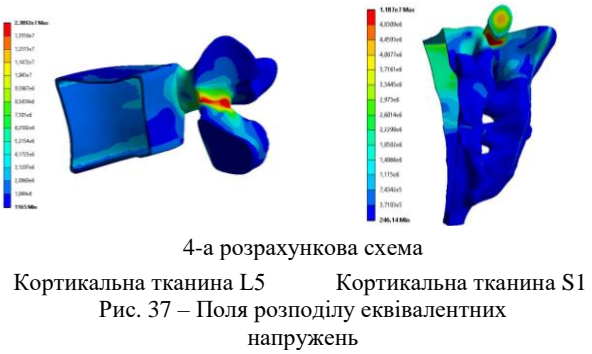
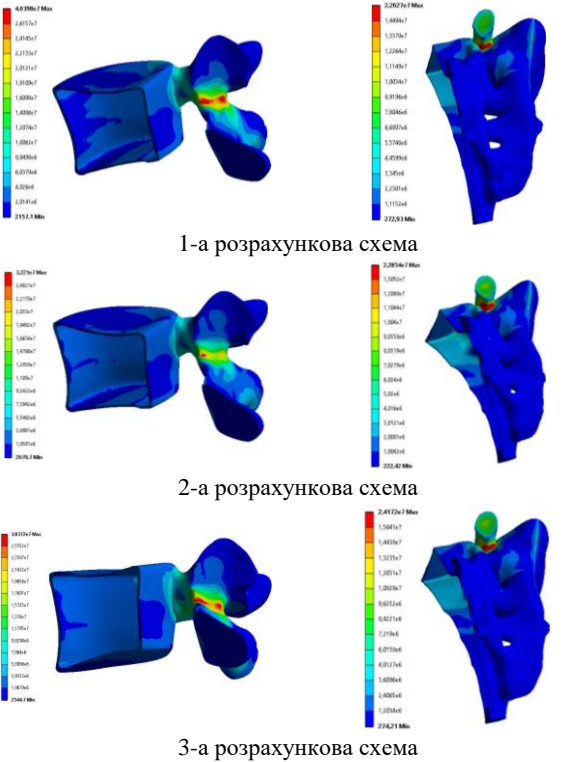


Кортикальна тканина L1 Кортикальна тканина L2

Рис. 35 – Поля розподілу еквівалентних напружень



Кортикальна тканина L3 Кортикальна тканина L4
Рис. 36 – Поля розподілу еквівалентних напружень



Із аналізу результатів проведених досліджень напружено-деформованого стану поперекового сегмента людини можна зробити наступні **висновки**:

1) беручи до уваги, що 1-а і 2-а розрахункові схеми описують моделі із нормальними величинами відповідні сегментарному і повному поперековому лордозу, отримані значення максимальних еквівалентних напружень при розгляді повних моделей займають проміжне положення; зі збільшенням величин, які описують сегментарний та повний поперековий лордоз, відповідній 3-й розрахунковій схемі, максимальні еквівалентні напруження збільшуються; зі зменшенням величин, які описують сегментарний і повний поперековий лордоз, відповідній 4-й розрахунковій схемі – зменшуються;

2) при розгляді максимальних повних переміщень при розгляді повних моделей картина аналогічна картині, яка описує максимальні еквівалентні напруження;

3) з розгляду полів розподілу еквівалентних напружень видно, що максимальні напруження переважають в остистих відростках кортикальних тканин хребців;

4) з аналізу отриманих максимальних величин еквівалентних напружень для елементів поперекового сегмента видно, що ці величини не перевищують міцності, які становлять для кортикальної кістки 160 МПа [41], для губчастої – 16-22 МПа [42].

За підсумками проведених досліджень були побудовані параметричні моделі, які описують різні величини, відповідні сегментарному і повному поперековому лордозу. За допомогою цих моделей і проведених досліджень представляється можливість проведення аналізу зміни напружено-деформованого стану елементів поперекового відділу хребта зі зміною цих величин.

Загальний результат, отриманий у цій роботі на розвиток розробок, полягає у створенні методу узагальненого параметричного моделювання складних біомеханічних систем на цій основі у подальшому будуть розв'язанні задачі аналізу напружено-деформованого стану та синтезу раціональних схем лікування захворювань поперекового відділу хребта.

Список літератури

- О.Н. Ямщиков. Компьютерное моделирование в травматологии и ортопедии (обзор литературы) // Вестник ТГУ, т.19, вып.6, 2014. с. 1974-1979. ISSN 1810-0198.
- ANSYS Workbench - <http://www.ansys.com/>.
- Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
- Сокольников И.С. Тензорный анализ. — М.: Наука, 1971. — 374 с.
- Кравчук А.С. К задаче Герца для линейно– и нелинейно–упругих тел конечных размеров // Прикл. мат. и мех. – 1977. – Т.41. – Вып.2. – С.329-337.
- Анатомия человека: В двух томах.- т.1(Э.И. Борзяк, Л.И. Волкова, Е.А. Добровольская, и др. Под ред. М.Р. Сапина.)-4-е изд., стереотип. - М.: Медицина, 1997. - 544с.
- Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред/ Пер. с англ.; Под ред. М.Э.Эглит. М.: Мир, 1974. – 319 с.
- <https://www.elsevier.com/>
- Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. Упругие элементы машин.- М.: Машиностроение,1989.-264с.
- Биргер И.а.,Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. - М.: Машиностроение, 1993.- 640 с.
- Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
- Дюво Г., Лионс Ж.Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
- Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
- Кравчук А.С., Суряков В.А. Численное решение геометрически нелинейных контактных задач // Доклады АН СССР, 1981. – Т.259. –№ 6.– С.1327-1329.
- Кравчук А.С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. мат. и мех. – 1978. –Т.42.– Вып.3. – С.466-474.
- Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J.Z.. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. - Amsterdam ; Heidelberg: Butterworth-Heinemann. – 2006. - 631 p.
- Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
- Карманов В.Г. Математическое программирование.– М.: Наука, 1980. – 536 с.
- Полак Э. Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1974.
- Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
- Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
- Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures - J. Wiley & Sons, New York, 2000, 600 pp.
- Березовский В.А. Колотилов Н.Н. Биофизические характеристики тканей человека. Справочник. Отв. Ред. П.Г. Костюк. – Киев: Наукова думка, 1990.- 224 с.
- Ткачук Н.А., Гриценко Г.Д., Чепурной А.Д., Орлов Е.А., Ткачук Н.Н. Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания // Механика та машинобудування. – 2006. – №1. – С.57-79.
- Ткачук Н.А., Кохановский В.И., Быба К.Е., Ткачук Н.Н., Артемов И.В. Структура специализированных систем автоматизированного анализа и синтеза сложных пространственных конструкций // Механика та машинобудування, 2007, №1, с.55-65.
- Радченко В.А., Шманько А.П., Ткачук Н.А., Веретельник Ю.В. Моделирование поведения биомеханических систем "позвонок-эндопротез-позвонок" на основе метода конечных элементов //Ортопедия, травматология и протезирование, 2005, №1, стр.24-31.
- Ткачук Н.А., Радченко В.А., Веретельник Ю.В. Узагальнений параметричний опис складних біомеханічних систем //Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: "Динамика и прочность машин", 2005, №47. с.173-180.
- Ткачук Н.А., Веретельник Ю.В., Пионтковский В.К. Біомеханічні системи: узагальнений параметричний опис //Вестник НТУ „ХПИ”. Тем.вып.: Машиноведение и САПР, 2006, №3, с.173-179.
- Ткачук Н.А., Веретельник Ю.В., Ткачук Н.Н. Generalized parametrical approach to research of biomechanical systems elements //Advanced Information and Telemedicine Technologies for Health (AITTH'2005) Proceedings of the International Conference (November 8-10, 2005, Minsk, Belarus). In two volumes. Vol.2, P.63-67.
- Ткачук Н.А., Пионтковский В.К., Федак В.И., Веретельник Ю.В. К вопросу о расчетно-экспериментальном исследовании напряженно-деформированного состояния биомеханических систем //Вісник НТУ "ХПИ". Збірник наукових праць. Тем.вип.: Машинознавство та САПР, 2007, №23, с.99-121.
- Алямовский А.А. SolidWorks/COSMOSWorks: Инженерный анализ методом конечных элементов. - ДМК Пресс – 2004. – 432 с.
- Степанов Н.В., Голованов А.А. Курс пользователя Pro/ENGINEER 2000i. – М.: КомпьютерПресс, 2000. – 190 с.
- Чемоданова Т.В. Pro/ENGINEER: Деталь, сборка, чертеж.– СПб.: БХВ–Петербург, 2003. – 560 с.

34. Natarajan R.N., Chen B.H., An H.S., Andersson G.B.J. Anterior cervical fusion: a finite element model study on motion segment stability including effect of osteoporosis //Spine.–2000.–Vol.–25,№8.–p.955–961.
35. Шимон, В.М. Численное исследование напряженно-деформированного состояния бедренной кости человека, пораженной заболеванием – остеомиелит / Шимон В.М., Веретельник О.В., Шерегий А.А., Шимон М.В. // Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ": Машинознавство і САПР №31 - Вестник НТУ "ХПИ", 2015. - ISSN 2079-0775.
36. Nolan J.P.,Sherk H.N. Biomechanical evaluation of the extensor musculature of the cervical //Spine.–1988.–Vol.13,№.–P.9-11.
37. Panjabi M.M., Duranceau J., Goel V.,et.al. Cervical human vertebrae: quantitative three-dimensional anatomy of the middle and lower regions //Spine.–1991.– Vol.16,№.8–P.861-869.
38. Веретельник, О.В. Математическое и численное исследование различных конструкций ортезов при спондилодезе шейного отдела позвоночника / Веретельник О.В., Ткачук Н.А., Тимченко И.Б., Дынный А.А., Погорелая А.В. // Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ" : Машинознавство і САПР №29 - Вестник НТУ "ХПИ", 2014. - ISSN 2079-0775.
39. Heitplatz P., Hartle S.L. and Gentle C.R. A 3-dimensional large deformation FEA of a ligamentous C4-C7 spine unit // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering - 2, – 1998 Gordon and Breach Science, UK, p387-394.
40. Веретельник О.В. Моделирование реакций на силовое воздействие элемента шейного отдела позвоночника // Вестник НТУ "ХПИ" Тем. вып.: "Машиноведение и САПР" – 2008. – № 2. – С. 14-26.
41. Кукин И.А., Кирпичёв И.В., Маслов Л.Б., Вихрев С.В. Особенности прочностных характеристик губчатой кости при заболеваниях тазобедренного сустава // FUNDAMENTAL RESEARCH №7, 2013 – с. 328-333.
42. http://fcpir.ru/upload/iblock/879/stagesummary_corebofs00080000ki_f04cm57m6em8o.pdf.
15. Kravchuk A.S. Postanovka zadachi o kontakte neskolkih deformiruemiyh tel kak zadachi neli-neynogo programmirovaniya [Statement of the problem of contact of several deformable bodies as nonlinear programming problems] // Prikl. mat. i meh. – 1978. – T.42.– Vyip.3. – S.466–474.
16. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J.Z.. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. - Amsterdam ; Heidelberg: Butterworth-Heinemann. – 2006. - 631 p.
17. Krauch S., Starfild A. Metodyi granichnyih elementov v mehanike tverdogo tela [The methods of boundary elements in the mechanics of a rigid body]. – M.: Mir, 1987. – 328 s.
18. Karmanov V.G. Matematicheskoe progra-mmirovanie [Mathematical Programming].– M.: Nauka, 1980. – 536 s.
19. Polak E. Chislennyye metodyi optimizatsii [Numerical optimization methods]. – M.: Mir, 1974.
20. Himmelblau D. Prikladnoe nelineynoe programmirovanie [Applied nonlinear programming]. – M.: Mir, 1975. – 534 s.
21. Dzhonson K. Mehanika kontaktного vzaimo-deystviya [Mechanics of contact interaction]. – M.: Mir, 1989. – 510 s.
22. Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures - J. Wiley & Sons, New York, 2000, 600 pp.
23. Berezovskiy V.A. Kolotilov N.N. Biofizi-cheskie karakteristiki tkany cheloveka [Biophysical characteristics of human tissues]. Spravochnik. Otv. Red. P.G. Kostyuk. – Kiev: Naukova dumka, 1990.- 224 s.
24. Tkachuk N.A., Gritsenko G.D., Chepurinov A.D., Orlov E.A., Tkachuk N.N. Konechno-elementnyie mode-li elementov slozhnyih mekhanicheskikh sistem: tehnologiya avtomatizirovannoy generatsii i parametri-zovannogo opisaniya [Finite element models of elements of complex mechanical systems: the technology of automated generation and parameterized description] // Mehanika ta mashinobuduvannya. – 2006. – #1. – S.57-79.
25. Tkachuk N.A., Kohanovskiy V.I., Byiba K.E., Tkachuk N.N., Artemov I.V. Struktura spetsializirovannyih sistem avtomatizirovannogo analiza i sinteza slozhnyih prostranstvennyih konstruksiy [The structure of specialized systems for automated analysis and synthesis of complex spatial structures]// Mehanika ta mashinobuduvannya, 2007, #1, s.55-65.
26. Radchenko V.A., Shmanko A.P., Tkachuk N.A., Veretelnik Yu.V. Modelirovanie povedeniya bio-mekhanicheskikh sistem "pozvonok-endoprotez-pozvonok" na osnove metoda konechnyih elementov [Modeling of the behavior of biomechanical systems "vertebral-endoprosthesis-vertebra" based on the finite element method]//Ortopediya, travmatologiya i protezirovanie, 2005, #1, str.24-31.
27. Tkachuk N.A., Radchenko V.A., Veretelnik Yu.V. Uzagalneniy parametrichniy opis skladnih biomekhanicheskikh sistem [A generalized parametric description of complex biomechanical systems] //Vestnik NTU "HPI". Tem. vyip.: "Dinamika i prochnost mashin", 2005, #47. s.173-180.
28. Tkachuk N.A., Veretelnik Yu.V., Piontkovskiy V.K. Biomekhanicheskii sistemi: uzagalneniy parametrichniy opis [Biomechanical systems: a generalized parametric description] //Vestnik NTU „HPI”. Tem.vyip.: Mashinovedenie i SAPR, 2006, #3, s.173-179.
29. Tkachuk N.A., Veretelnik Yu.V., Tkachuk N.N. Generalized parametrical approach to research of biomechanical systems elements //Advanced Information and Telemedicine Technologies for Health (AITTH'2005) Proceedings of the International Conference (November 8-10, 2005, Minsk, Belarus). In two volumes. Vol.2, P.63-67.
30. Tkachuk N.A., Piontkovskiy V.K., Fedak V.I., Veretelnik Yu.V. K voprosu o raschetno-eksperimentalnom issledovanii napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya biomekhanicheskikh sistem [On the issue of computational and experimental research of the stress-strain state of biomechanical systems] //Vestnik NTU "HPI". Zbirnik naukovih prats. Tem.vip.: Mashinovedenie ta SAPR, 2007, #23, s.99-121.
31. Alyamovskiy A.A. SolidWorks/COSMOSWorks: Inzhenerniy analiz metodom konechnyih elementov [Engineering analysis by the finite element method]. - DMK Press – 2004. – 432 s.
32. Stepanov N.V., Golovanov A.A. Kurs pol-zovatelya Pro/ENGINEER 2000i [User course Pro/ENGINEER 2000i]. – M.: KompyuterP-ress, 2000. – 190 s.

References (transliterated)

1. O.N. Yamschikov. Kompyuternoe modelirovaniye v travmatologii i ortopedii (obzor literatury) [Computer modeling in traumatology and orthopedics (literature review)] // Vestnik TGU, t.19, vyip.6, 2014. s. 1974-1979. ISSN 1810-0198.
2. ANSYS Workbench - <http://www.ansys.com/>.
3. Lure A.I. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. – M.: Nauka, 1970. – 940 s.
4. Sokolnikov I.S. Tenzornyy analiz [Tensor analysis]. — M.: Nauka, 1971. — 374 s.
5. Kravchuk A.S. K zadache Gerts dlya lineynoy i nelineynoy uprugih tel konechnyih razmerov [To the Hertz problem for linearly and nonlinearly elastic bodies of finite dimensions] // Prikl. mat. i meh. – 1977. –T.41.– Vyip.2. – S.329-337.
6. Anatomiya cheloveka [Human anatomy]: V dvuh tomah.- t.1(E.I. Borzyak, L.I. Volkova, E.A. Dobrovolskaya, i d.r. Pod red. M.R. Sappina).-4-e izd., stereotip. - M.: Medi-tsina, 1997. - 544s.
7. Meyz Dzh. Teoriya i zadachi mekhaniki sploshnyih sred [Theory and problems of continuum mechanics]/ Per. s angl.; Pod red. M.E.Eglit. M.: Mir, 1974. – 319 s.
8. <https://www.elsevier.com/>
9. Svetlitskiy V.A., Naraykin O.S. Uprugie elementy mashin [Elastic elements of machines].- M.: Mashinostroenie,1989.-264s.
10. Birger Ia.,Shorr B.F., Iosilevich G.B. Raschet na prochnost detaley mashin [Calculation of the strength of machine parts]: Spravochnik. - M.: Mashinostroenie, 1993.- 640 s.
11. Glovinski R., Lions Zh.L., Tremoler R. Chi-slennoe issledovanie variatsionnyih neravenstv [Numerical investigation of variational inequalities]. – M.: Mir, 1979. – 574 s.
12. Dyuvo G., Lions Zh.L. Neravenstva v mekhanike i fizike [Inequalities in mechanics and physics]. – M.: Nauka, 1980. – 384 s.
13. Lions Zh.L. Nekotorye metodyi resheniya nelineynyih kraevyih zadach [Some methods for solving nonlinear boundary value problems]. – M.: Mir, 1972. – 587 s.
14. Kravchuk A.S., Sursyakov V.A. Chislennoe reshenie geometricheskikh nelineynyih kontaktnyih zadach [Numerical solution of geometrically nonlinear contact problems] // Doklady AN SSSR, 1981. – T.259. –# 6.– S.1327-1329.

33. Chemodanova T.V. Pro/ENGINEER: Detal, sborka, chertezh [Pro/ENGINEER: Detail, assembly, drawing]. – SPb.: BHV–Peterburg, 2003. – 560 s.
34. Natarajan R.N., Chen B.H., An H.S., Andersson G.B.J. Anterior cervical fusion: a finite element model study on motion segment stability including effect of osteoporosis //Spine.–2000.–Vol.–25, #8.–p.955–961.
35. Shimon, V.M. Chislennoe issledovanie na-pryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya bedrennoy kosti cheloveka, porazhennoy zabolovaniem – oste-omielit [Numerical study of the stress-strain state of the human thigh bone, affected by the disease - osteomyelitis] / Shimon V.M., Veretelnik O.V., Sheregij A.A., Shimon M.V. // Sbornik nauchnykh trudov "Vestnik NTU "HPI": Mashinostroyeniye I SAPR #31 - Vestnik NTU "HPI", 2015. - ISSN 2079-0775.
36. Nolan J.P., Sherk H.H. Biomechanical evaluation of the extensor musculature of the cervical //Spine.–1988.–Vol.13, #.–P.9-11.
37. Panjabi M.M., Duranceau J., Goel V., et.al. Cervical human vertebrae: quantitative three-dimensional anatomy of the middle and lower regions //Spine.–1991.– Vol.16, #.8–P.861-869.
38. Veretelnik, O.V. Matematicheskoe i chis-lennoe issledovanie razlichnykh konstruksiy orte-zov pri spondilozeh sheynogo otdela pozvonochnika [Mathematical and numerical study of various designs of orthoses in the spinal fusion of the cervical spine] / Veretelnik O.V., Tkachuk N.A., Timchenko I.B., Dyinnik A.A., Pogorelaya A.V. // Sbornik nauch-nykh trudov "Vestnik NTU "HPI" : Mashinostroyeniye I SAPR #29 - Vestnik NTU "HPI", 2014. - ISSN 2079-0775.
39. Heitplatz P., Hartle S.L. and Gentle C.R. A 3-dimensional large deformation FEA of a ligamentous C4-C7 spine unit // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering - 2, – 1998 Gordon and Breach Science, UK, p387-394.
40. Veretelnik O.V. Modelirovaniye reaktsiy na silovoye vozdeystviye elementa sheynogo otdela pozvonochnika [Simulation of reactions to the force effect of an element of the cervical spine] // Vestnik NTU "HPI" Tem. vyip.: "Mashinovedeniye i SAPR" – 2008. – # 2. – S. 14-26.
41. Kukin I.A., KirpichYov I.V., Maslov L.B., Vihrev S.V. Osobennosti prochnostnykh harakteris-tik gubchatoy kosti pri zabolovaniyakh tazobedrenno-go sustava [Features of strength characteristics of spongy bone in hip joint diseases] // FUNDAMENTAL RESEARCH #7, 2013 – s. 328-333.
42. http://fcpir.ru/upload/iblock/879/stagesummary_corebofs00008000_0kif04cm57m6em8o.pdf.

Надійшла (received) 12.09.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Піонтковський Валентин Константинович (Пионтковский Валентин Константинович, Piontkovsky Valentin) – кандидат медичних наук, заслужений лікар України, завідувач Обласного центру ортопедії, травматології та вертебології Рівненської обласної клінічної лікарні.

Радченко Володимир Олександрович (Радченко Владимир Александрович, Radchenko Vladimir) – заступник директора з наукової роботи, доктор медичних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, ДУ «Інститут патології хребта та суглобів ім. проф. М. І. Ситенка НАМН України».

Ткачук Микола Анатолійович (Ткачук Николай Анатольевич, Tkachuk Mykola) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна, e-mail: tma@tmm-sapf.org.

Веретельник Олег Вікторович (Веретельник Олег Викторович, Veretelnik Oleg) – науковий співробітник, Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", кафедра "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів та машин"; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4174-8213>. тел.: (057)7076166; e-mail: veretelnik.oleg@gmail.com.

Труфанов Іван Іванович (Труфанов Иван Иванович, Trufanov Ivan) – кандидат медичних наук, асистент кафедри травматології та ортопедії ДЗ «Запорізька медична академія післядипломної освіти МОЗ України». ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1628-1268>. тел.: (057)7076166; e-mail: trufanovivan367@gmail.com.