

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання задач за темою
"МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА
Частина II.
Термодинаміка"
з курсу "Загальна фізика"

Харків 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розв'язання задач за темою
"МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА
Частина II.
Термодинаміка"

з курсу "Загальна фізика"

для студентів усіх спеціальностей
та усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 28.12.2009

Харків НТУ "ХПІ" 2010

Методичні вказівки до розв'язання задач за темою "Молекулярна фізика і термодинаміка. Частина II. Термодинаміка" з курсу "Загальна фізика" для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання / Уклад.: Бурлакова М.В., Ветчинкіна З.К., Дзюбенко Н.І., Любченко О.А., Тавріна Т.В. – Харків: НТУ "ХПІ", 2010. – 44 с.

Укладачі: М.В. Бурлакова,
З.К. Ветчинкіна,
Н.І. Дзюбенко,
О.А. Любченко,
Т.В. Тавріна

Рецензент Н.Б. Фат'янова

Кафедра теоретичної та експериментальної фізики

ВСТУП

Методичні вказівки мають на меті допомогти студентам засвоїти теоретичний матеріал та знайти підходи до розв'язання типових задач та завдань підвищеної складності з теми "Термодинаміка".

Широкий за рівнем та тематикою спектр задач дозволяє використовувати їх студентами усіх спеціальностей та усіх форм навчання.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Розділ фізики, що вивчає фізичні властивості макросистем шляхом аналізу умов та кількісних відношень для процесів перетворення енергії в них, називається *термодинамікою*, а відповідний метод вивчення – *термодинамічним*.

Термодинамічними величинами називають фізичні величини, вживані при описі станів та процесів в термодинамічних системах.

Термодинаміка розглядає ці величини як деякі макроскопічні параметри та функції, властиві системі, але не пов'язані з її мікроскопічним устроєм. Питання мікроскопічного устрою вивчає *статистична фізика*.

Функції стану залежать лише від поточного стану системи і не залежать від того, в який спосіб система прийшла в цей стан. Функції стану в термодинаміці включають температуру, тиск, об'єм, ентропію, а також термодинамічні потенціали. Зв'язок між термодинамічними параметрами для конкретної системи називається *рівнянням стану*.

Функції процесу залежать не лише від поточного стану системи, але також від того, в який спосіб система прийшла в даний стан. Функції процесу в термодинаміці: кількість теплоти та термодинамічна робота.

Повна енергія термодинамічної системи складається з:

1) кінетичної енергії механічного руху системи як цілого і її макроскопічних частин;

2) потенціальної енергії, залежної від положення системи в зовнішніх силових полях;

3) внутрішньої енергії U , залежної лише від внутрішнього стану системи.

Внутрішня енергія є однозначною функцією термодинамічного стану системи:

$$U = U(V, T). \quad (2.1)$$

Вираз (2.1) – *калоричне рівняння простої системи* постійної маси.

Можливі два способи зміни енергії термодинамічної системи при її взаємодії із зовнішніми тілами: шляхом здійснення роботи і шляхом теплообміну, тобто, обмін енергією між системою та зовнішніми тілами здійснюється у *формі роботи* і у *формі теплоти*, відповідно.

Закон збереження енергії стосовно термодинамічних систем носить назву *перший початок (перший закон) термодинаміки*: теплота ∂Q , що передається системі, витрачається на зміну внутрішньої енергії системи dU та на здійснення роботи ∂A проти зовнішніх сил:

$$\partial Q = dU + \partial A. \quad (2.2)$$

Зміна внутрішньої енергії є повним диференціалом, оскільки внутрішня енергія – функція стану системи, а робота і кількість теплоти – функції процесу.

Теплоємність тіла – це відношення кількості теплоти ∂Q , що передається тілу, до відповідної зміни його температури dT :

$$C_{\text{тіла}} = \frac{\partial Q}{dT}. \quad (2.3)$$

Питома теплоємність – фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, що відбирається або надається одному кілограму речовини у разі зміни її температури на 1 К в даному термодинамічному процесі:

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial Q}{dT}. \quad (2.4)$$

Молярна теплоємність – фізична величина, яка чисельно дорівнює кількості теплоти, що відбирається або надається одному молю

речовини у разі зміни її температури на 1 К в даному термодинамічному процесі:

$$C = \mu \cdot c = \frac{\mu}{m} \cdot \frac{\partial Q}{dT}. \quad (2.5)$$

Враховуючи те, що робота

$$A_{12} = \int_1^2 \partial A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV, \quad (2.6)$$

а кількість теплоти може бути виражена як

$$Q_{12} = \int_1^2 \partial Q, \quad (2.7)$$

перший початок термодинаміки має вигляд

$$\frac{m}{\mu} \cdot C \cdot dT = dU + p \cdot dV. \quad (2.8)$$

Ізопроеци – процеси, які здійснюються, коли один з основних параметрів стану залишається незмінним.

1. *Ізохоричний процес* ($V = \text{const}$):

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \quad (2.9)$$

Перший початок термодинаміки:

$$\partial Q = dU \quad \text{або} \quad \frac{m}{\mu} \cdot C_V \cdot dT = dU, \quad (2.10)$$

де C_V – молярна теплоємність при постійному об'ємі:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad (2.11)$$

де i – число ступенів свободи; $R = 8,31$ Дж/моль·К – універсальна газова стала.

Робота в ізохоричному процесі дорівнює нулю, $A = 0$.

2. *Ізобаричний процес* ($p = \text{const}$):

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad \text{або} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}; \quad (2.12)$$

Перший початок термодинаміки:

$$\partial Q = dU + \partial A \quad \text{або} \quad \frac{m}{\mu} \cdot C_p \cdot dT = \frac{m}{\mu} \cdot C_v \cdot dT + p \cdot dV, \quad (2.13)$$

де $\partial Q = \frac{m}{\mu} \cdot C_p \cdot dT$ – елементарна кількість теплоти, що передається газу; C_p – молярна теплоємність при постійному тиску:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (2.14)$$

Рівняння Майєра:

$$C_p - C_v = R. \quad (2.15)$$

Робота в ізобаричному процесі

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1). \quad (2.16)$$

3. *Ізотермічний процес* ($T = \text{const}$):

$$pV = \text{const} \quad \text{або} \quad p_1 V_1 = p_2 V_2. \quad (2.17)$$

Перший початок термодинаміки:

$$\partial Q = \partial A. \quad (2.18)$$

Робота в ізотермічному процесі

$$A_{12} = Q_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.19)$$

4. *Адіабатичний (ізоентропійний) процес* ($\partial Q \equiv 0$) – такий, що проходить без теплообміну із зовнішнім середовищем.

Рівняння Пуассона (рівняння адіабати):

$$pV^\gamma = \text{const} \quad \text{або} \quad p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma, \quad (2.20)$$

де γ – показник степеня адиабати (*коефіцієнт Пуассона*):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}. \quad (2.21)$$

Відношення між тиском і температурою, а також між об'ємом і температурою ідеального газу в адиабатичному процесі мають вигляд:

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}, \quad VT^{\frac{1}{\gamma-1}} = \text{const}. \quad (2.22)$$

Перший початок термодинаміки:

$$0 = dU + \partial A. \quad (2.23)$$

Робота в адиабатичному процесі:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Політропічним (політропним) називають такий термодинамічний процес в ідеальному газі, який описується рівнянням

$$pV^n = \text{const}, \quad (2.25)$$

де n – безрозмірна величина (*показник політропи*).

Молярна теплоємність у політропічному процесі

$$C = \frac{nC_v - C_p}{n - 1} = \frac{n - \gamma}{(\gamma - 1)(n - 1)} R. \quad (2.26)$$

Таблиця 2.1 – Політропічні процеси

Процес	Показник політропи n	Молярна теплоємність C
Ізобаричний	0	C_p
Ізотермічний	1	∞
Ізоентропійний (адіабатичний)	γ	0
Ізохоричний	∞	C_v

Ентропія – функція стану термодинамічної системи, зміна якої дорівнює

$$dS = \frac{\partial Q}{T}, \quad (2.27)$$

де dS – приріст ентропії, обумовлений здобуттям системою в ході оборотного процесу кількості теплоти dQ .

З точки зору статистичної фізики ентропія

$$S = k \cdot \ln \Omega, \quad (2.28)$$

де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана; Ω – *статистична вага або термодинамічна ймовірність* даного макростану (чисельно дорівнює числу мікростанів, за допомогою яких може бути реалізований даний макростан).

Ентропія 1 моля ідеального газу:

$$\begin{aligned} S_\mu &= C_v \ln T + R \ln V_\mu + S_0 = C_p \ln T - R \ln p + S'_0 = \\ &= C_v \ln p + C_p \ln V + S''_0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

де S_0, S'_0, S''_0 – константи інтегрування.

Ентропія – адитивна величина, тому ентропія довільної маси газу дорівнює добутку ентропії 1 молю S_μ та кількості речовини цього газу

$\nu = \frac{m}{\mu}$, де m, μ – маса та молярна маса даного ідеального газу, відповідно.

Другий початок (другий закон) термодинаміки: неможливі такі процеси, єдиним кінцевим результатом яких був би перехід деякої кількості теплоти від тіла менш нагрітого до тіла більш нагрітого (*формулювання Клаузіуса*) або неможливі такі процеси, єдиним кінцевим результатом яких було би видалення від будь-якого тіла деякої кількості теплоти і перетворення цієї теплоти в роботу (*формулювання Томсона*).

Третій початок термодинаміки (теорема Нернста): ентропія будь-якого тіла наближається до нуля при наближенні до нуля температури:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (2.30)$$

Термодинамічний процес називається *оборотним* (або *циклом*), якщо він допускає повернення системи в первинний стан без того, щоб в довкіллі залишилися будь-які зміни. Процес, що не задовольняє цим умовам, називається *необоротним*.

Коефіцієнтом корисної дії теплової машини називається відношення роботи, що здійснюється за цикл, до кількості теплоти, що одержується за цей цикл від нагрівача:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (2.31)$$

Цикл Карно – оборотний термодинамічний процес, що складається з двох ізотерм (12, 34) та двох адіабат (23, 41) (рис. 2.1).

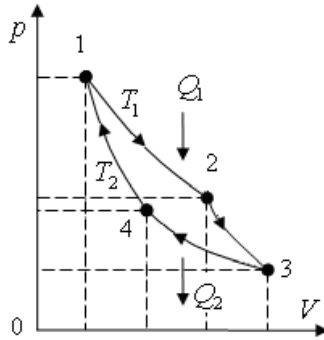


Рис. 2.1

Коефіцієнт корисної дії (термічний коефіцієнт) циклу Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (2.32)$$

де Q_1, Q_2 – кількості теплоти, що одержуються від нагрівача та віддаються холодильнику; T_1, T_2 – температури нагрівача та холодильника, відповідно.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Знайти питому теплоємність азоту:

- 1) при постійному об'ємі;
- 2) при постійному тиску.

Розв'язання

Питома теплоємність (2.4) чисельно дорівнює кількості теплоти, що відбирається або надається одному кілограму речовини у разі зміни її температури на 1 К в даному термодинамічному процесі:

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial Q}{dT}.$$

Зв'язок між питомою та молярною теплоємностями (2.5):

$$c = \frac{C}{\mu}.$$

Якщо процеси здійснюються при постійному об'ємі або при постійному тиску, то

$$c_V = \frac{C_V}{\mu} \quad \text{та} \quad c_p = \frac{C_p}{\mu}.$$

Молярні теплоємності при постійному об'ємі (2.11) та тиску (2.14):

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Тоді, враховуючи, що для азоту (двоатомний газ) число ступенів свободи $i = 5$, а молярна маса $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, одержимо:

$$c_V = \frac{C_V}{\mu} = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{\mu} = \frac{5 \cdot 8,31}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 742 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$c_p = \frac{C_p}{\mu} = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{\mu} = \frac{7 \cdot 8,31}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 1039 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Задача 2

Суміш газів складається з хлору та криптону, узятих при однакових умовах та в рівних об'ємах. Визначити питому теплоємність c_p суміші при постійному тиску.

Розв'язання

Питому теплоємність суміші газів при постійному тиску треба виразити через питомі теплоємності компонентів суміші.

Кількість теплоти (2.13), потрібну для нагріву суміші на ΔT Кельвінів, можна виразити двома способами:

$$Q = c_p (m_1 + m_2) \Delta T,$$

де c_p – питома теплоємність суміші; m_1 , m_2 – маси хлору та криптону,

$$Q = (c_{p1} m_1 + c_{p2} m_2) \Delta T,$$

де c_{p1} та c_{p2} – питомі теплоємності хлору та криптону, відповідно.

Прирівняємо праві частини цих виразів та поділимо їх на ΔT :

$$c_p (m_1 + m_2) = c_{p1} m_1 + c_{p2} m_2.$$

Звідси питома теплоємність суміші газів при постійному тиску

$$c_p = c_{p1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{p2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Масу кожного газу в суміші можна знайти з рівняння Менделєєва–Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$ за умов, що гази знаходяться в рівних об'ємах ($V_1 = V_2$) та при рівних температурах ($T_1 = T_2$) та тисках ($p_1 = p_2$). Тоді з

$$pV_1 = \frac{m_1}{\mu_1} RT \quad \text{та} \quad pV_2 = \frac{m_2}{\mu_2} RT$$

одержимо

$$\frac{m_1}{\mu_1} RT = \frac{m_2}{\mu_2} RT ,$$

звідки відношення мас хлору та криптону

$$m_2 = m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} .$$

З огляду на це, питома теплоємність суміші газів

$$c_p = c_{p1} \frac{m_1}{m_1 + m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}} + c_{p2} \frac{m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}}{m_1 + m_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}} = c_{p1} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + c_{p2} \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} .$$

Питомі теплоємності c_{p1} та c_{p2} знайдемо з співвідношень:

$$c_{p1} = \frac{i_1 + 2}{2} \cdot \frac{R}{\mu_1} ,$$

$$c_{p2} = \frac{i_2 + 2}{2} \cdot \frac{R}{\mu_2} .$$

Для хлору (двоатомний газ) число ступенів свободи $i_1 = 5$ та молярна маса $\mu_1 = 71 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а для криптону (інертний одноатомний газ) – $i_2 = 3$ та $\mu_2 = 83,8 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Підставивши числові значення, одержимо:

$$c_{p1} = \frac{5 + 2}{2} \cdot \frac{8,31}{71 \cdot 10^{-3}} = 410 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}),$$

$$c_{p2} = \frac{3 + 2}{2} \cdot \frac{8,31}{83,8 \cdot 10^{-3}} = 250 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Тоді шукана питома теплоємність суміші газів

$$c_p = \frac{410 \cdot 71 \cdot 10^{-3}}{154,8 \cdot 10^{-3}} + \frac{250 \cdot 83,8 \cdot 10^{-3}}{154,8 \cdot 10^{-3}} = 323 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}).$$

Задача 3

Визначити коефіцієнт Пуассона для газової суміші, що складається із маси $m_1 = 10$ г неону та маси $m_2 = 14$ г азоту.

Розв'язання

Коефіцієнт Пуассона $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, де C_p та C_v – молярні теплоємності при постійному тиску та постійному об'ємі. Кожна з теплоємностей виражається через число ступенів свободи газової суміші ($C_v = \frac{i}{2}R$ та $C_p = \frac{i+2}{2}R$), яку треба визначити.

Внутрішні енергії складових суміші:

$$U_1 = \frac{i_1}{2} \cdot \frac{m_1}{\mu_1} RT \quad \text{та} \quad U_2 = \frac{i_2}{2} \cdot \frac{m_2}{\mu_2} RT,$$

де i_1 та i_2 – число ступенів свободи для неону та азоту, відповідно.

Внутрішня енергія (2.10) суміші

$$U = U_1 + U_2 = \frac{i_1}{2} \cdot \frac{m_1}{\mu_1} RT + \frac{i_2}{2} \cdot \frac{m_2}{\mu_2} RT.$$

З іншого боку, ця внутрішня енергія є

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT,$$

де i , $m = m_1 + m_2$, μ – число ступенів свободи, маса та молярна маса суміші, відповідно.

Прирівняємо праві частини двох останніх рівнянь:

$$\frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT = \frac{i_1}{2} \cdot \frac{m_1}{\mu_1} RT + \frac{i_2}{2} \cdot \frac{m_2}{\mu_2} RT,$$

звідки отримаємо:

$$\frac{i \cdot m}{\mu} = \frac{i_1 \cdot m_1}{\mu_1} + \frac{i_2 \cdot m_2}{\mu_2},$$

$$i\nu = i_1\nu_1 + i_2\nu_2$$

і, остаточно,

$$i = \frac{i_1\nu_1 + i_2\nu_2}{\nu}.$$

де ν_1 , ν_2 та $\nu = \nu_1 + \nu_2$ – кількості речовини неону, азоту та їх суміші, відповідно.

Підрахуємо ці кількості речовини:

$$\text{для неону} \quad \nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \text{ моль,}$$

$$\text{для азоту} \quad \nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1} = \frac{14 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \text{ моль,}$$

$$\text{для суміші} \quad \nu = \nu_1 + \nu_2 = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ моль.}$$

Тоді

$$i = \frac{i_1\nu_1 + i_2\nu_2}{\nu} = \frac{3 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5}{1} = 4.$$

Молярні теплоємності при постійному об'ємі та постійному тиску:

$$C_V = \frac{i}{2}R \quad \text{та} \quad C_p = \frac{i+2}{2}R.$$

Тоді коефіцієнт Пуассона

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \frac{4+2}{4} = 1,5.$$

Задача 4

Для нагрівання деякої кількості газу на 50 K при постійному тиску необхідно затратити 670 Дж. Якщо цю ж кількість газу охолодити на 100 K при постійному об'ємі, то виділяється 1005 Дж. Визначити число ступенів свободи молекул цього газу.

Розв'язання

Кількість теплоти, що потрібна для нагрівання газу маси m на ΔT , враховуючи зв'язок (2.5) між питомою c та молярною C теплоємностями, становить

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} cm dT = cm\Delta T = \frac{C}{\mu} m\Delta T.$$

Нагрівання газу здійснюється при постійному тиску, коли молярна теплоємність (2.14) $C_p = \frac{i+2}{2}R$, тому кількість теплоти, що потрібна для нагрівання, дорівнює

$$Q_1 = \frac{C_p}{\mu} m(\Delta T)_1 = \frac{i+2}{2\mu} Rm(\Delta T)_1.$$

Охолодження газу здійснюється при постійному об'ємі, коли молярна теплоємність (2.11) $C_v = \frac{i}{2}R$, тому кількість теплоти, що потрібна для охолодження, становить

$$Q_2 = \frac{C_v}{\mu} m(\Delta T)_2 = \frac{i}{2\mu} Rm(\Delta T)_2.$$

Поєднаємо два попередні рівняння в систему:

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{i+2}{2\mu} Rm(\Delta T)_1, \\ Q_2 = \frac{i}{2\mu} Rm(\Delta T)_2, \end{cases}$$

та розв'яжемо її відносно i , для чого поділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{i+2}{i} \cdot \frac{(\Delta T)_1}{(\Delta T)_2},$$

звідки

$$\frac{i}{i+2} = \frac{(\Delta T)_1}{(\Delta T)_2} \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{50 \cdot 1005}{100 \cdot 670} = \frac{1005}{1340}.$$

Число ступенів свободи становить

$$i = 6.$$

Таким чином, газ, про який йдеться в задачі, має 6 ступенів свободи.

Задача 5

Маса $m = 100$ г кисню знаходиться в закритій посудині при температурі $T = 300$ К. Визначить кількість теплоти, яку треба передати кисню, щоб середню квадратичну швидкість його молекул збільшити вдвічі? Як при цьому зміняться температура та тиск газу?

Розв'язання

Якщо газу, який знаходиться у закритій посудині ($V = \text{const}$), передати деяку кількість теплоти, то вона згідно першому початку термодинаміки для ізохоричного процесу (2.10) уся піде на зміну внутрішньої енергії:

$$Q = U_2 - U_1 = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1),$$

Як результат, збільшиться температура газу, його тиск на стінки посудини та середня квадратична швидкість молекул. Для двох

температур, відповідних початковому та кінцевому станам газу, середні квадратичні швидкості дорівнюють:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle_1 = \sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}}; \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle_2 = \sqrt{\frac{3RT_2}{\mu}}.$$

За умов задачі швидкості відрізняються вдвічі:

$$\frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle_2}{\langle v_{\text{кв}} \rangle_1} = \sqrt{\frac{3RT_2\mu}{\mu 3RT_1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 2,$$

звідки

$$T_2 = 4T_1.$$

Тоді кількість теплоти

$$Q = \frac{m}{\mu} C_v (T_2 - T_1) = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5 \cdot 8,31}{2} (4 \cdot 300 - 300) = 5,84 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Оскільки передача теплоти здійснюється при постійному об'ємі, то тиск газу зміниться згідно із законом Шарля:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 4.$$

Таким чином, як температура, так й тиск газу збільшаться вчетверо при зростанні вдвічі середньої квадратичної швидкості його молекул.

Задача 6

Кисень нагрівається при незмінному тиску $p = 80$ кПа так, що його об'єм збільшується від $V_1 = 1$ м³ до $V_2 = 3$ м³. Визначити:

- 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу;
- 2) роботу A , що була здійснена газом при розширенні;
- 3) кількість теплоти Q , що була передана газу.

Розв'язання

1) Внутрішня енергія ідеального газу (2.10)

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT,$$

а зміна внутрішньої енергії пропорційна зміні температури:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R \Delta T.$$

Початкову та кінцеву температуру газу можна знайти з рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$T_1 = \frac{pV_1\mu}{mR}, \quad T_2 = \frac{pV_2\mu}{mR}.$$

Тоді зміна температури

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{p}{m} \frac{\mu}{R} (V_2 - V_1).$$

Цей же результат можна одержати, здиференціювавши рівняння Менделєєва – Клапейрона при незмінному тиску,

$$p \cdot dV = \frac{m}{\mu} R \cdot dT,$$

та перейшовши від нескінченно малих приростів (диференціалів) до кінцевих приростів:

$$p \cdot \Delta V = \frac{m}{\mu} R \cdot \Delta T.$$

Тоді приріст внутрішньої енергії кисню, який, як двоатомний газ, має п'ять ступенів свободи ($i=5$), становить

$$\Delta U = \frac{i}{2} p \cdot \Delta V = \frac{5}{2} \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot (3-1) = 4 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 0,4 \text{ МДж.}$$

2) Робота, що була здійснена газом при розширенні

$$A = p \cdot \Delta V = 80 \cdot 10^3 \cdot 2 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 0,16 \text{ МДж.}$$

3) Кількість теплоти, що була передана газу, з першого закону термодинаміки, дорівнює

$$Q = \Delta U + A = 0,4 + 0,16 = 0,56 \text{ МДж.}$$

Задача 7

В закритому балоні об'ємом $V = 10$ л знаходиться вуглекислий газ під тиском $p = 1$ МПа. Визначити кількість тепла Q , яку потрібно передати газу для того, щоб його тиск збільшився втричі.

Розв'язання

Оскільки газ знаходиться у закритому балоні, то нагрівання газу здійснюється при постійному об'ємі. Елементарна кількість теплоти

$$dQ = \frac{m}{\mu} \cdot C_V \cdot dT, \text{ що передається газу, йде на зміну його температури.}$$

Тоді кількість теплоти, що обумовлює зміну температури від T_1 до T_2 , під час якої змінюється і його тиск з p_1 до p_2 , визначається формулою (2.10):

$$Q = \frac{m}{\mu} \cdot C_V \cdot \Delta T.$$

Стани газу в балоні описують рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$p_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1 \quad \text{та} \quad p_2 V = \frac{m}{\mu} R T_2.$$

Знайдемо різницю цих рівнянь:

$$V(p_2 - p_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1),$$

$$V \Delta p = \frac{m}{\mu} R \Delta T,$$

звідки

$$\frac{m}{\mu} \Delta T = \frac{V \Delta p}{R}.$$

Тоді, з врахуванням того, що молярна теплоємність при постійному об'ємі $C_V = \frac{i}{2} R$, кількість теплоти

$$Q = \frac{m}{\mu} \cdot C_V \cdot \Delta T = C_V \cdot \frac{V \Delta p}{R} = \frac{i \cdot V \Delta p}{2}.$$

Незважаючи на те, що молекула вуглекислого газу є триатомною, число ступенів свободи для неї таке, як і для двоатомної молекули з жорстким зв'язком, а саме, $i = 5$ (див. таблицю 1.1 в частині I "Молекулярна фізика. Явища переносу").

З відношення тисків $\frac{p_2}{p_1} = 3$, різниця тисків

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 3p_1 - p_1 = 2p_1,$$

а кількість теплоти

$$Q = \frac{i \cdot V \Delta p}{2} = \frac{i \cdot V \cdot 2p_1}{2} = i \cdot V \cdot p_1 = 5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Задача 8

Кисень масою $m = 10$ г розширюється ізотермічно при температурі $t = -20^\circ\text{C}$ та його тиск зменшується від $p_1 = 202$ кПа до $p_2 = 101$ кПа. Визначити роботу A розширення газу, зміну його внутрішньої енергії ΔU та кількість теплоти Q , що була передана газу.

Розв'язання

Оскільки процес ізотермічний, то температура газу не змінюється ($\Delta T = 0$), а значить внутрішня енергія, зміна якої $\Delta U = cm\Delta T = 0$, залишається незмінною.

Робота розширення газу згідно (2.19) $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$.

З рівняння Менделєєва – Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ виразимо тиск

$p = \frac{mRT}{\mu V}$, та підставимо його в підінтегральний вираз:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{\mu V} dV = \frac{mRT}{\mu} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{mRT}{\mu} \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{mRT}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Із закону Бойля – Маріотта для ізотермічного процесу

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{202 \cdot 10^3}{101 \cdot 10^3} = 2.$$

Тоді

$$A = \frac{mRT}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 253}{32 \cdot 10^{-3}} \ln 2 = 455 \text{ Дж.}$$

Кількість теплоти знайдемо з першого початку термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A = 0 + 455 = 455 \text{ Дж.}$$

Задача 9

Деяка маса кисню займає об'єм $V_1 = 3$ л при температурі $t_1 = 27^\circ\text{C}$ і тиску $p_1 = 820$ кПа (точка 1 на рис. 3.2). В іншому стані (точка 2) газ має параметри $V_2 = 4,5$ л і $p_2 = 600$ кПа.

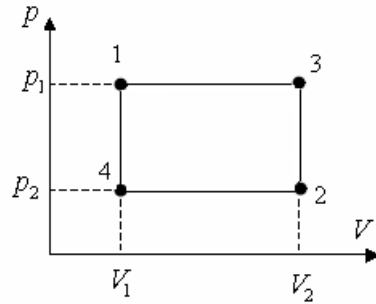


Рис. 2.2

Знайти: 1) кількість теплоти Q , що була отримана газом;

2) роботу A , здійснену газом при розширенні;

3) зміну внутрішньої енергії газу при переході із стану 1 в стан 2:
 а) по шляху 132,
 б) по шляху 142.

Розв'язання

Розглянемо процес переходу газу із стану 1 в стан 2 по шляху 132 (рис. 2.2): ізобаричне розширення до об'єму V_2 та ізохоричне охолодження до тиску p_2 . На ділянці 13 газ, розширюючись, здійснює роботу

$$A_{13} = p_1 \cdot (V_2 - V_1).$$

На ділянці 32 об'єм не змінюється, а це означає, що робота $A = 0$.

Повна робота на шляху 132:

$$A_{13} = p_1 (V_2 - V_1) = 820 \cdot 10^3 \cdot (4,5 - 3) \cdot 10^{-3} = 1,23 \text{ кДж}.$$

Зміна внутрішньої енергії на шляху 132:

$$\Delta U_{132} = \Delta U_{13} + \Delta U_{23} = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R (T_3 - T_1) + \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_3).$$

Розкривши дужки, отримаємо

$$\Delta U_{132} = \frac{i}{2} \cdot \left(\frac{m}{\mu} R T_2 - \frac{m}{\mu} R T_1 \right).$$

Рівняння Менделєєва – Клапейрона для першого та другого станів газу мають вигляд:

$$\frac{m}{\mu} R T_1 = p_1 V_1,$$

$$\frac{m}{\mu} R T_2 = p_2 V_2.$$

Ліві частини цих виразів входять у формулу для визначення зміни внутрішньої енергії на шляху 132. Поміняємо їх на праві частини та одержимо

$$\begin{aligned} \Delta U_{132} &= \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \\ &= \frac{5}{2} (4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 600 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^{-3} \cdot 820 \cdot 10^3) = 600 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Повна кількість теплоти

$$Q_{132} = A_{12} + \Delta U_{132} = 1,23 \cdot 10^3 + 0,6 \cdot 10^3 = 1,83 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Коли кисень переходить із стану 1 в стан 2 по шляху 142, то на ділянці 14 робота не здійснюється ($V_1 = \text{const}$), а на ділянці 42 робота

$$A_{42} = p_2 (V_2 - V_1) = 600 \cdot 10^3 \cdot (4,5 - 3) \cdot 10^{-3} = 900 \text{ Дж.}$$

Зміна внутрішньої енергії на усьому шляху

$$\begin{aligned} \Delta U_{142} &= \Delta U_{14} + \Delta U_{42} = \frac{i}{2} \left[\frac{m}{\mu} R (T_4 - T_1) + \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_4) \right] = \\ &= \frac{i \cdot m}{2 \cdot \mu} R (T_2 - T_1) = \Delta U_{132}. \end{aligned}$$

Таким чином, зміна внутрішньої енергії газу не залежить від форми шляху, а залежить лише від параметрів початкового та кінцевого станів газу.

Кількість теплоти, яка витрачається в другому випадку, становить

$$Q_{142} = A_{42} + \Delta U = 900 + 600 = 1500 \text{ Дж.}$$

Легко побачити, що у другому випадку кількість теплоти, що витрачається, менша, ніж у першому.

Задача 10

Ідеальний двоатомний газ, що містить кількість речовини $\nu = 2$ моль, знаходиться під тиском $p_1 = 300$ кПа та займає об'єм $V_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$. Спочатку газ ізохорично нагрівають до температури $T_2 = 500$ К. Далі, ізотермічно розширюючи, доводять його до початкового тиску. Після цього шляхом ізобаричного стискування повертають газ у початковий стан. Визначити термічний коефіцієнт корисної дії циклу η .

Розв'язання

На рис. 2.3 показаний цикл в координатах $p - V$. Стрілки вказують напрямки протікання процесів. Початковий стан відмічений позначкою 1.

Коефіцієнт корисної дії будь-якого циклу визначається виразом

$$\eta = \frac{(Q_1 - Q_2)}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

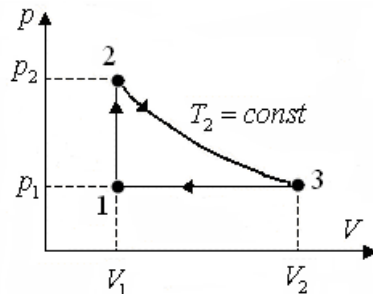


Рис. 2.3

де Q_1 – кількість теплоти, отримана за цикл від нагрівача; Q_2 – кількість теплоти, віддана за цикл охолоджувачу. Різниця $Q_1 - Q_2$ дорівнює роботі A , здійсненій газом за цикл.

На $p - V$ - діаграмі робота чисельно дорівнює площі циклу. Газ отримує кількість теплоти Q_1 на двох ділянках (при ізохоричному нагріванні (12) – Q_{12} та при ізотермічному розширенні (23) – Q_{23}):

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23}.$$

При ізохоричному нагріванні 12 робота не здійснюється; відбувається лише збільшення внутрішньої енергії газу, тому

$$Q_{12} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R (T_2 - T_1),$$

де число ступенів свободи $i = 5$; $\frac{m}{\mu} = \nu$ – кількість речовини.

Температуру в точці 1 T_1 знайдемо з рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$T_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{\nu \cdot R} = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 8,31} = 360 \text{ К.}$$

При ізотермічному розширенні газ отримує кількість теплоти, що дорівнює роботі розширення, оскільки внутрішня енергія при цьому не змінюється:

$$Q_{23} = \nu \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right),$$

де V_2 – об'єм газу при температурі T_2 та тиску p_1 (точка 3 на діаграмі). На ділянці 31 газ віддає кількість теплоти

$$Q_2 = Q_{31} = \frac{i+2}{2} R \cdot \nu (T_2 - T_1).$$

Підставивши набуті значення Q_1 та Q_2 , знайдемо термічний коефіцієнт корисної дії:

$$\eta = 1 - \frac{\nu \cdot \frac{i+2}{2} R (T_2 - T_1)}{\nu \cdot R \left(\frac{i}{2} (T_2 - T_1) + T_2 \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right)}$$

Замінивши відношення $\frac{V_2}{V_1}$ рівним йому за законом Гей – Люссака

відношенням температур $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, отримаємо термічний коефіцієнт корисної дії циклу:

$$\eta = 1 - \frac{(i+2) \cdot (T_2 - T_1)}{i \cdot (T_2 - T_1) + 2T_2 \cdot \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)} = 0,041.$$

Задача 11

Одноатомний газ, що містить кількість речовини $\nu = m/\mu = 0,1$ кмоль, під тиском $p_1 = 100$ кПа займав об'єм $V_1 = 5$ м³. Газ стискувався ізобарично до об'єму 1 м³, потім стискувався адіабатично і розширювався при постійній температурі до початкових об'єму та тиску. Побудувати графік процесу. Знайти:

1) температури T_1 і T_2 , об'єми V_2 і V_3 та тиск p_3 , відповідні характерним точкам циклу;

2) кількість теплоти Q_1 , отриману газом від нагрівача;

3) кількість теплоти Q_2 , передану газом охолоджувачу;

4) роботу A , здійснену газом за один цикл;

5) термічний коефіцієнт корисної дії η циклу.

Розв'язання

Визначимо параметри стану газу для трьох характерних точок: (рис. 2.4)

Точка 1:

$$p_1; V_1; T_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{\nu \cdot R} = 600 \text{ К.}$$

Точка 2:

$$p_2 = p_1; V_2; T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 120 \text{ К.}$$

Оскільки газ ізотермічно стискується, то T_2 буде менше, ніж T_1 .

Точка 3:

згідно з умовами задачі $T_3 = T_1$, тоді тиск p_3 знайдемо за допомогою закону Бойля–Маріотта для ізотермічного процесу 31: $p_1 V_1 = p_3 V_3$, з якого

$$p_3 = \frac{V_1}{V_3} p_1.$$

Але об'єм V_3 також невідомий. Для того, щоб його знайти, використаємо рівняння Пуассона (2.20) $PV^\gamma = \text{const}$, що описує адіабатне стискання на ділянці 23: $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma$. Врахуємо, що $p_1 = p_2$, тобто

$$p_1 V_2^\gamma = p_1 \frac{V_1}{V_3} V_3^\gamma.$$

Звідки

$$V_2^\gamma = V_1 \cdot V_3^{\gamma-1}; \quad V_3^{\gamma-1} = \frac{V_2^\gamma}{V_1}.$$

Остаточно,

$$V_3 = \left(\frac{V_2^\gamma}{V_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

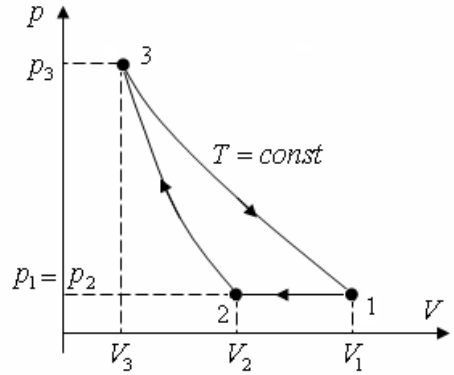


Рис. 2.4

Для одноатомного газу число ступенів свободи $i = 3$, а показник степеню адіабати

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}.$$

Отже,

$$\gamma - 1 = \frac{2}{3}, \quad \text{а} \quad \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{3}{2}.$$

Таким чином, об'єм і тиск газу в стані 3:

$$V_3 = \left(\frac{1^{\frac{5}{3}}}{5} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{125}} = \frac{1}{11,18} = 0,09 \text{ м}^3,$$

$$p_3 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_3} = 10^5 \cdot \frac{5}{0,9} = 5,56 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Кількість теплоти, отриману газом від нагрівача, знайдемо з першого початку термодинаміки (2.2), застосувавши його для процесу 31 (оскільки в ньому відбувається поглинання енергії).

Для ізотермічного процесу $Q = A$, оскільки $\Delta U = 0$. Робота при ізотермічному розширенні визначається за формулою (2.19):

$$A = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_3}^{V_1} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT_1 \cdot \ln \frac{V_1}{V_3}.$$

Кількість теплоти

$$Q_1 = A = 0,1 \cdot 10^3 \cdot 8,31 \cdot 600 \cdot \ln \frac{5}{0,91} = 2 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Передача тепла охолоджувачу відбувається на ділянці 12 при ізобаричному стисканні. Для цього процесу перший початок термодинаміки (2.13) набуває вигляду

$$Q_2 = A_{12} + \Delta U.$$

Робота стискання

$$A_{12} = P_1(V_2 - V_1) = 10^5(1 - 5) = -4 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Зміна внутрішньої енергії газу

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R \cdot (T_2 - T_1) = 0,1 \cdot 10^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,31 \cdot (120 - 600) = -6 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$$

Таким чином,

$$Q_2 = -4 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^5 = -10^6 \text{ Дж.}$$

Знак "мінус" в правій частині говорить про те, що енергія газом не поглинається, а віддається.

Робота A , здійснена газом за один цикл, дорівнюватиме різниці роботи розширення A_{31} та робіт стискання на ділянках 12 та 23, тобто повна робота може бути визначена як площа циклу. Роботи A_{31} та A_{12} вже знайдені. Треба знайти роботу (2.24) адіабатичного стискання A_{23} . З першого початку термодинаміки для адіабатичного процесу (2.23) за умов $Q = 0$ впливає:

$$\begin{aligned} A &= -\Delta U = -\frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} \cdot R \cdot (T_3 - T_2) = \\ &= -0,1 \cdot 10^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,31 \cdot (600 - 120) = -6 \cdot 10^5 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Тоді корисна робота за цикл

$$A = A_{31} - A_{12} - A_{23} = 2 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^5 = 10^6 \text{ Дж.}$$

Коефіцієнт корисної дії циклу визначається (2.32) відношенням корисної роботи, здійсненої за цикл, до кількості теплоти, отриманої від нагрівача:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{10^6}{2 \cdot 10^6} = 0,5.$$

Коефіцієнт корисної дії $\eta = 50 \%$.

Задача 12

В циліндрі під невагомим поршнем, площа якого $S = 15 \text{ см}^2$, міститься повітря масою $m = 0,2 \text{ г}$ при температурі $t = 20^\circ\text{C}$. Визначити роботу, яку треба здійснити при повільному рівномірному підйомі поршня на висоту від 10 до 20 см. Атмосферний тиск вважати нормальним.

Розв'язання

Під час рівномірного підйому поршню на нього діють: $\vec{F}_{\text{зовн}}$ – зовнішня сила, \vec{F} – сила тиску з боку повітря, що знаходиться під поршнем, $\vec{F}_{\text{атм}}$ – сила тиску атмосферного повітря (рис. 2.5). Знайдемо роботу зовнішньої сили по підйому поршня

$$A = \int_{h_1}^{h_2} F_{\text{зовн}} dh.$$

Оскільки поршень рухається рівномірно, то згідно з другим законом Ньютона

$$\vec{F}_{\text{зовн}} + \vec{F}_{\text{атм}} + \vec{F} = 0.$$

Направивши вісь y вертикально догори та спроектувавши на неї сили, одержимо:

$$F_{\text{зовн}} = F_{\text{атм}} - F.$$

Сила атмосферного тиску $F_{\text{атм}} = p_0 S$, а сила тиску повітря $F = pS$, де $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ – атмосферний тиск; p – тиск повітря під поршнем, який можна виразити за допомогою рівняння Менделєєва – Клапейрона $p = \frac{mRT}{\mu V}$, де $V = Sh$ – об'єм повітря під поршнем.

Тоді сила тиску повітря

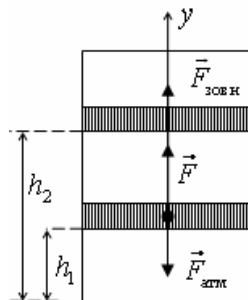


Рис. 2.5

$$F = pS = \frac{mRTS}{\mu V} = \frac{mRTS}{\mu Sh} = \frac{mRT}{\mu h}.$$

Робота зовнішніх сил

$$\begin{aligned} A &= \int_{h_1}^{h_2} F_{\text{зовн}} dh = \int_{h_1}^{h_2} (F_{\text{атм}} - F) dh = \int_{h_1}^{h_2} F_{\text{атм}} dh - \int_{h_1}^{h_2} F dh = \\ &= \int_{h_1}^{h_2} p_0 S dh - \int_{h_1}^{h_2} \frac{mRT}{\mu h} dh = p_0 S \int_{h_1}^{h_2} dh - \frac{mRT}{\mu} \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h} = \\ &= p_0 S \left[h_2 - \frac{mRT}{\mu} \ln h \right]_{h_1}^{h_2} = p_0 S (h_2 - h_1) - \frac{mRT}{\mu} \ln \frac{h_2}{h_1} = \\ &= 1,01 \cdot 10^5 \cdot 15 \cdot 10^{-4} (0,2 - 0,1) - \frac{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 293}{29 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{0,2}{0,1} \approx 3,5 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Задача 13

В циліндрі під поршнем знаходиться кисень масою $m = 100 \text{ г}$ при температурі $T_1 = 300 \text{ К}$. Газ почав розширяться адіабатично, при цьому об'єм його збільшився у 3 рази, а потім стискався ізотермічно до початкового об'єму. Знайти температуру наприкінці адіабатичного розширення та роботу A , здійснену газом.

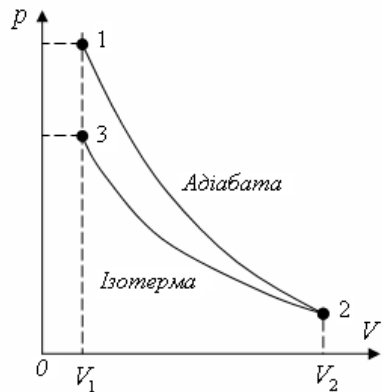


Рис. 2.6

Розв'язання

Температура та об'єм газу, що здійснює адіабатичний процес (рис. 2.6), пов'язані відношенням

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, де показник адіабати для кисню (двоатомного газу) складає

$$\gamma = 1,4.$$

Тоді

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 300 \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4-1} = 300 \cdot 0,64 = 193 \text{ К.}$$

Робота A_1 газу при адіабатичному розширенні

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{m}{\mu} C_v (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R (T_1 - T_2) = \\ &= \frac{100 \cdot 10^{-3}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 (300 - 193) = 6,95 \cdot 10^3 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

Робота A_2 газу при ізотермічному стисканні

$$A_2 = \frac{mRT_2}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot 193}{32 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{1}{3} = -5,5 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Знак "мінус" вказує на те, що під час стискання робота здійснюється зовнішніми силами.

Остаточно, робота, здійснена газом в даних процесах, становить

$$A = A_1 + A_2 = 6,95 \cdot 10^3 + (-5,5 \cdot 10^3) = 1,45 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 1,45 \text{ кДж.}$$

Задача 14

Ідеальний двоатомний газ здійснює цикл Карно, графік якого показаний на рис. 2.7. Об'єми газу в станах 2 і 3 дорівнюють $V_2 = 12$ л та $V_3 = 16$ л. Знайти термічний коефіцієнт корисної дії циклу η .

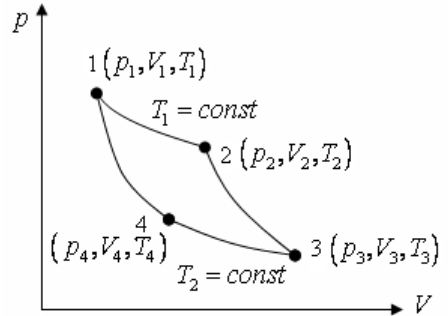


Рис. 2.7

Розв'язання

Коефіцієнт корисної дії циклу (2.31):

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Цикл Карно складається з двох ізотерм (12 та 34) та двох адіабат (23 та 41). Корисна робота, що здійснюється за цикл, дорівнює різниці кількостей теплоти: Q_1 , отриманої від нагрівача, та Q_2 , переданої охолоджувачу. Здобуття тепла відбувається при ізотермічному розширенні на ділянці 12 та повністю йде на здійснення роботи, оскільки зміна внутрішньої енергії при цьому дорівнює 0.

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Згідно з (2.19)

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

та

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{\mu} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4},$$

тоді

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\left(T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} \right)}{T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Зв'язок між T_1 та T_2 можна знайти з рівняння Пуассона (2.20), що описує адіабатичний процес 23:

$$p_2 \cdot V_2^\gamma = p_3 \cdot V_3^\gamma.$$

Запишемо рівняння Пуассона для температури та об'єму (2.22), для чого виразимо тиск з рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$p = \frac{m \cdot R \cdot T}{\mu \cdot V}.$$

Після підстановки одержимо:

$$\frac{T_1}{V_2} \cdot V_2^\gamma = \frac{T_2}{V_3} \cdot V_3^\gamma,$$

$$T_1 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_3^{\gamma-1},$$

та остаточно

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1}.$$

Для двоатомного газу число ступенів свободи $i = 5$, отже,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5} = 1,4,$$

$$\gamma - 1 = 0,4,$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{12}{16} \right)^{0,4} = 0,891 \cdot T_1,$$

$$\eta = \frac{T_1 - 0,891 \cdot T_1}{T_1} = \frac{0,109 \cdot T_1}{T_1} = 0,109.$$

Коефіцієнт корисної дії $\eta = 10,9\%$.

Задача 15

Теплова машина працює згідно з циклом Карно, коефіцієнт корисної дії якого $\eta = 0,2$. Якщо ця машина буде здійснювати той же цикл у зворотному напрямку, то який буде холодильний коефіцієнт η' ?

Розв'язання

При зворотному циклі Карно (стрілки на рис. 2.1 повинні мати протилежний напрям) робоча речовина теплової машини під час розширення по ізотермі $T_2 = \text{const}$ відбирає від холодильника кількість теплоти Q_2 , а коли стискається по ізотермі $T_1 = \text{const}$ – віддає нагрівачу кількість теплоти Q_1 . Робота, що здійснюється робочою речовиною за один цикл, від'ємна, бо додатна робота розширення менше за модулем від'ємної роботи стискання. В цьому випадку додатною буде робота двигуна, що приводить у дію теплову машину.

Холодильним коефіцієнтом називається відношення кількості теплоти, віднятого від тіла, що охолоджується, до роботи, яку здійснює двигун, що приводить теплову машину в дію:

$$\eta' = \frac{Q_2}{A}.$$

Коефіцієнтом корисної дії називається відношення

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Оскільки

$$Q_1 = A + Q_2,$$

то

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + Q_2},$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{A + Q_2}{A} = 1 + \eta'.$$

Тоді

$$\eta' = \frac{1}{\eta} - 1 = \frac{1}{0,2} - 1 = 4.$$

Таким чином, холодильний коефіцієнт складає $\eta' = 400\%$.

Задача 16

Кисень масою $m = 2$ кг збільшив свій об'єм в $n = 5$ разів. Знайти зміну ентропії, якщо ця зміна сталася у ході:

- 1) ізотермічного процесу;
- 2) адіабатичного процесу.

Розв'язання

Як відомо, зміна ентропії виражається загальною формулою (2.27), звідки

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

1) При ізотермічному розширенні температуру T , як незмінну величину, можна винести з-під знаку інтегралу:

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q_{12}}{T}.$$

З першого початку термодинаміки для ізотермічного процесу (2.18): $Q = A_{12}$, тобто вся теплота витрачається на роботу розширення, значить $\Delta S = \frac{A_{12}}{T}$. При цьому робота (2.19) розширення

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Згідно з умовами задачі $V_2 = 5V_1$, отже, робота $A_{12} = \frac{m}{\mu} RT \ln 5$.

Враховуючи, що молярна маса кисню дорівнює $\mu_{O_2} = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, в першому випадку отримаємо зміну ентропії:

$$\Delta S_1 = \frac{m}{\mu} R \ln 5 = \frac{2}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 1,5 = 836 \text{ Дж/К.}$$

2) При адіабатичному розширенні кисню немає теплообміну з довкіллям $dQ=0$, тому зміна ентропії $\Delta S_2=0$, тобто ентропія газу залишається незмінною: $S = \text{const}$.

Задача 17

Знайти зміну ентропії ΔS при перетворенні маси $m = 100$ г льоду, що знаходиться при температурі $t = -23^\circ\text{C}$, в пару.

Розв'язання

Зміна ентропії (2.27) при переході речовини із стану 1 в стан 2

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

Загальна зміна ентропії, якщо речовина проходить цілу низку перетворень, є сумою змін ентропій на кожному з етапів процесу.

При нагріванні льоду з температури $t = -23^\circ\text{C}$ (відповідна абсолютна температура становить $T_1 = 273 - 23 = 250$ К) до температури плавлення льоду $T_2 = 273$ К зміна ентропії становить

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_n}{T} dT = mc_n \ln \frac{T_2}{T_1},$$

де $c_n = 2,1$ кДж/(кг·К) – питна теплоємність льоду.

$$\Delta S_1 = mc_{\lambda} \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,1 \cdot 2,1 \cdot 10^3 \ln \frac{273}{250} = 18,5 \text{ Дж/К.}$$

Під час плавлення льоду, що здійснюється при незмінній температурі $T_2 = 273 \text{ К}$, зміна ентропії

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_2} = \frac{m\lambda}{T_2},$$

де $\lambda = 0,33 \text{ МДж/кг}$ – питна теплота плавлення.

$$\Delta S_2 = \frac{m\lambda}{T_2} = \frac{0,1 \cdot 0,33 \cdot 10^6}{273} = 121 \text{ Дж/К.}$$

При нагріванні води від температури плавлення T_2 до температури кипіння T_3 зміна ентропії

$$\Delta S_3 = \int_{T_2}^{T_3} \frac{mc_{\text{в}}}{T} dT = mc_{\text{в}} \ln \frac{T_3}{T_2},$$

де $c_{\text{в}} = 4,19 \text{ кДж/(кг·К)}$ – питна теплоємність води.

$$\Delta S_3 = mc_{\text{в}} \ln \frac{T_3}{T_2} = 0,1 \cdot 4,19 \cdot 10^3 \ln \frac{373}{273} = 131 \text{ Дж/К.}$$

Під час випару води при незмінній температурі кипіння T_3 зміна ентропії

$$\Delta S_4 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_3} = \frac{mr}{T_3},$$

де $r = 2,26 \text{ МДж/кг}$ – питна теплота пароутворення.

$$\Delta S_4 = \frac{mr}{T_3} = \frac{0,1 \cdot 2,26 \cdot 10^6}{373} = 606 \text{ Дж/К.}$$

Загальна зміна ентропії

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = 18,5 + 121 + 131 + 606 = 876,5 \text{ Дж/К.}$$

Задача 18

Знайти зміну ентропії при переході маси $m = 10$ г азоту від об'єму $V_1 = 10$ л при температурі $T_1 = 350$ К до об'єму $V_2 = 30$ л при температурі $T_2 = 400$ К.

Розв'язання

Зміна ентропії при переході речовини із одного стану в інший

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T},$$

де кількість теплоти, в свою чергу, згідно з першим законом термодинаміки

$$dQ = dU + dA = \frac{m}{\mu} C_v dT + p dV.$$

З рівняння Менделєєва – Клапейрона $p = \frac{mRT}{\mu V}$, тоді

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_v dT + \frac{mRT}{\mu V} dV.$$

Зміна ентропії

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m C_v}{\mu} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{mR}{\mu} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{m \cdot i \cdot R}{2\mu} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{mR}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{mR}{\mu} \left(\frac{i}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \\ &= \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{5}{2} \ln \frac{400}{350} + \ln \frac{30}{10} \right) = 4,26 \text{ Дж/кг}. \end{aligned}$$

Задача 19

Знайти зміну ентропії при переході маси $m = 10$ г азоту від об'єму $V_1 = 10$ л при тиску $p_1 = 150$ кПа до об'єму $V_2 = 30$ л при тиску $p_2 = 100$ кПа.

Розв'язання

Використавши відповідь попередньої задачі

$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{mR}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}$ та рівняння Менделєєва – Клапейрона, з яких

випливає, що

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1},$$

одержимо для зміни ентропії за умов даної задачі:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \frac{mR}{\mu} \left[\frac{i}{2} \left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right) + \ln \frac{V_2}{V_1} \right] = \\ &= \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3}} \left[\frac{5}{2} \left(\ln \frac{100}{150} + \ln \frac{30}{10} \right) + \ln \frac{30}{10} \right] = 8,42 \text{ Дж/кг}. \end{aligned}$$

Задача 20

Знайти зміну ентропії при переході маси $m = 10$ г азоту від об'єму $V_1 = 10$ л до об'єму $V_2 = 30$ л при незмінному тиску.

Розв'язання

Використаємо результат попередньої задачі та перетворимо його з врахуванням того, що згідно з рівнянням Майера (2.15) $C_p - C_v = R$:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} (C_v + R) \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \frac{m}{\mu} C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{V_2}{V_1}.\end{aligned}$$

При ізобаричному процесі, про який йдеться в задачі, $p = \text{const}$, тоді перший доданок дорівнює нулю, а зміна ентропії

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{m}{\mu} C_p \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i+2}{2} \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 8,31}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 2} \ln \frac{30}{10} = 11,4 \text{ Дж/кг}.\end{aligned}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1987. – 432 с.
2. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1990. – 400 с.
3. Чертов А.Г. Задачник по физике: учеб. пособ. / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 1981. – 496 с.
4. Иродов И.Е. Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – М. : Наука, 1988. – 416 с.
5. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики / Е.В. Фирганг. – М. : Высш. шк., 1978. – 351 с.
6. Мясников С.П. Пособие по физике / С.П. Мясников, Т.Н. Осанова. – М. : Высш. шк., 1988. – 399 с.
7. Російсько-український фізичний словник / В.В. Гейченко, О.З. Жмудський, П.П. Кузьменко, Є.Д. Майборода. – Харків : Основа, 1990 – 211 с.
8. Російсько-український словник наукової термінології: Математика. Фізика. Техніка. Науки про землю та космос / В.В. Гейченко, В.М. Завірюхіна, О.О. Зеленюк, В.Г. Коломієць, М.І. Кратко, В.В. Тельнюк-Адамчук, М.П. Хоменко. – К. : Наук. думка, 1998. – 892 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до розв'язання задач за темою "Молекулярна фізика і термодинаміка. Частина II. Термодинаміка" з курсу "Загальна фізика" українською мовою для студентів усіх спеціальностей та усіх форм навчання

Укладачі: БУРЛАКОВА Маргарита Всеволодівна
ВЕТЧИНКІНА Зоя Костянтинівна
ДЗЮБЕНКО Наталя Іванівна
ЛЮБЧЕНКО Олена Анатоліївна
ТАВРИНА Тетяна Володимирівна

Роботу до видання рекомендував проф. О.П. Сук
Відповідальний за випуск – проф. О.Г. Багмут

В авторській редакції

План 2010 р., поз. 26 / 61-10

Підп. до друку 22.03.2010. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 1,6. Обл.-вид. арк. 1,9.
Наклад 100 прим. Зам. №____ Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ"
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21