

**В.В. ЛИТВИНЕНКО**

**В.С. ЛУПИКОВ**, д-р техн. наук

**А.Г. СЕРЕДА**, канд. техн. наук

Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт"  
(Харьков)

## **УСОВЕРЕНСТВОВАНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНДУКЦИОННО-ДИНАМИЧЕСКОГО ПРИВОДА АВТОМАТИЧЕСКОГО ВЫКЛЮЧАТЕЛЯ**

Запропоновано вдосконалена математична модель індукційно-динамічного приводу автоматичного вимикача. Модель представлена системою інтегро-диференціальних рівнянь, що підвищують точність опису електромагнітних і механічних процесів в приводі автоматичного вимикача за рахунок обліку динамічної індуктивності рухомого елемента.

Предложена усовершенствованная математическая модель индукционно-динамического привода автоматического выключателя. Модель представлена системой интегро-дифференциальных уравнений, повышающих точность описания электромагнитных и механических процессов в приводе автоматического выключателя за счет учета динамической индуктивности подвижного элемента.

**Введение.** Одним из путей обеспечения энергосбережения в электроаппаратостроении является применение индукционно-динамического привода в быстродействующих автоматических выключателях. Энергосбережение обеспечивается как в самом выключателе, за счет уменьшения потребляемой из сети электроэнергии на создание механической силы на размыкание контактов, так и в цепи, за счет уменьшения времени отключения тока короткого замыкания. Применение таких выключателей стало возможным в Украине и зарубежом благодаря увеличению точности моделирования электромагнитных процессов в приводе автоматического выключателя и достижений в области компьютерного моделирования. Известная модель индукционно-динамического привода представляет собой систему интегро-дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитные процессы в магнитосвязанных электрических контурах рабочей катушки и подвижного элемента электромагнита (диска или обмотки), уравнения разряда конденсаторной батареи и уравнения для силы, действующей на подвижный элемент в направлении движения [1]. Досто-

инством известной математической модели является то, что эти уравнения могут быть выведены на основе общепризнанных представлений о переходных процессах в электрических цепях и простых обоснованных допущений. Основные недостатки этих моделей: сложность учета физических процессов в токопроводящих элементах и нелинейной магнитной системе электромагнита привода; невозможность перенесения решений, полученных на основе численных методов, на другие типы конструкций вследствие ограниченных возможностей численных методов; невозможность использования полученных решений для повышения эффективности (КПД) индукционно-динамического привода, так как магнитные свойства ферромагнитного материала магнитных систем, по сути, не учитываются при допущении о его бесконечно большой магнитной проницаемости.

**Цель работы** – усовершенствование математической модели индукционно-динамического привода автоматического выключателя.

**Характеристика известных моделей.** Для моделирования электромагнитных систем в настоящее время применяется два подхода.

Первый подход основан на использовании интегральных методов для расчета электромагнитного поля в заданной области пространства, объем которой условно представляется из конечного множества элементарных (выделенных) объемов, занимаемых элементами с токами, ферромагнитными массами и свободными от источников объемами [2]. Такие модели ориентированы на применение численных методов расчета полей. Они в полной мере сочетаются с возможностями современного программного обеспечения для ПЭВМ и хорошо себя зарекомендовали при анализе квазистационарных полей электромагнитных систем. Недостатком этих моделей в настоящее время можно рассматривать то, что они не в полной мере учитывают сложные физические процессы в электромагнитных системах. В частности, зависимость электрического сопротивления проводников с токами от взаимного расположения токопроводящих элементов, частотного спектра токов, пространственного перераспределения плотностей токов в проводниках в зависимости от частоты и близости расположения элементов с токами, динамического намагничивания ферромагнитных масс, обладающих гистерезисом. Некоторые из этих зависимостей удастся учесть при построении модели. Например, неравномерное распределение намагниченности по объему магнитной системы. Однако конкретных реализаций программ, учитывающих эти факторы, в настоящее время не существует. Как результат, каждый расчет электромагнитной системы с использованием таких моделей требует дополнительного научного исследования, включая и экспериментальную проверку адекватности модели и исследуемой электромагнитной системы.

Второй подход ориентирован на более детальное исследование физи-

ческих процессов в электромагнитной системе. Его основным недостатком является то, что для облегчения исследований применяются упрощенные методы, основанные на теории цепей. Достаточно полный обзор этих приближенных методов приведен в [3]. Достоинством такого подхода является то, что он позволяет ускорить получение результатов, минуя сложные операции разработки программного обеспечения и расчетов на ЭВМ электромагнитной системы. Кроме того, этот подход позволяет использовать громадный экспериментальный материал, накопленный при разработках самых различных электромагнитных систем. Именно этот подход используется в последних разработках электромагнитных систем индукционно-динамических приводов [4]. В перспективе, результаты моделирования процессов в электромагнитных системах могут быть использованы для построения моделей с использованием первого подхода.

При выводе уравнений моделей принимаются следующие допущения:

- механическая система не подвергается действию внешних сил и полей;
- перемещение подвижного элемента ограничено торцевой плоскостью магнитной системы электромагнита;
- форма электропроводящих элементов не меняется в процессе срабатывания привода;
- описание процессов ведется на основе теории цепей с сосредоточенными компонентами;
- активные сопротивления катушки и подвижного элемента в процессе его движения не меняются;
- распределение токов по сечению катушки и подвижного элемента равномерное;
- не учитываются эффект близости проводников с токами и поверхностный эффект;
- магнитная проницаемость ферромагнитных масс магнитных систем равна бесконечности,  $\mu = \infty$ ;
- разряд батареи характеризуется как периодический в интервале менее одного полупериода.

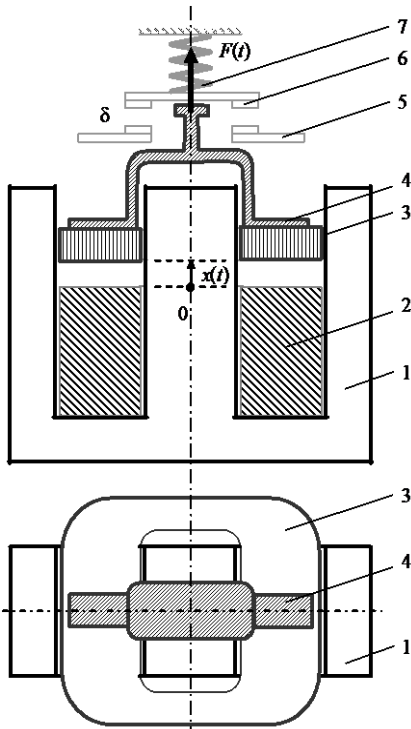


Рис. 1.

На рис. 1 в качестве примера показана схема прямоходового электромагнита индукционно-динамического привода. Положение подвижных элементов и контактов соответствует моменту срабатывания привода. Основные элементы имеют следующие обозначения: 0 – начало отсчета перемещения подвижного элемента от плоскости соприкосновения катушки и подвижного элемента; 1 – Ш-образная шихтованная магнитная система; 2 – рабочая катушка; 3 – подвижный элемент (спиралевидная катушка либо сплошной диск овальной формы); 4 – толкатель; 5 – неподвижный контакт; 6 – подвижный контакт; 7 – пружина контактная.

Уравнения модели строятся на основе метода электрических цепей. Для этого составляются электрическая и магнитная схемы замещения. Электрическая схема электромагнитной системы составлена с учетом принятых допущений и приведена на рис. 2.

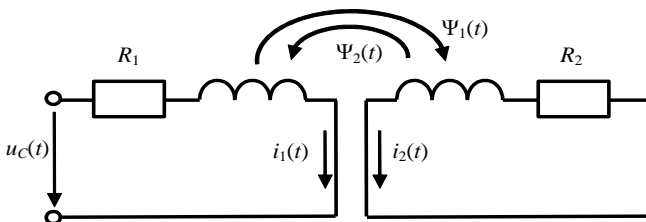


Рис. 2.

Схема представлена двумя контурами с магнитными связями. Первый контур содержит источник ЭДС  $u_C(t)$ , в качестве которой выступает напряжение конденсаторной батареи, а второй контур замкнут накоротко.

По характеру сопротивлений оба контура являются активно-индуктивными. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для этих контуров составляются уравнения для падений напряжений на активных сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$  контуров и составляющих напряжений от изменяющихся потокосцеплений  $\Psi_1(t)$  и  $\Psi_2(t)$ . Два уравнения напряжений контуров дополняются третьим уравнением, характеризующим разряд конденсаторной батареи. Движение элементов электромагнитной системы описывается вторым законом Ньютона. С учетом этого известная математическая модель представлена следующими соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_C(t) = R_1 \cdot i_1(t) + \frac{d\Psi_1(t)}{dt}; \\ 0 = R_2 \cdot i_2(t) + \frac{d\Psi_2(t)}{dt}; \\ u_C(t) = U_{C0} - \frac{1}{C} \int_0^{t_1} i_1(t) \cdot dt; \\ m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(t) - F_c, \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $u_C(t)$  – напряжение конденсаторной батареи;  $R_1$  – сопротивление контура катушки;  $i_1(t)$  – ток контура катушки;  $\Psi_1(t)$  – полное потокосцепление обмотки электромагнита;  $R_2$  – сопротивление подвижного элемента;  $i_2(t)$  – ток подвижного элемента;  $\Psi_2(t)$  – полное потокосцепление подвижного элемента;  $m$  – масса подвижных частей (подвижного элемента и толкателя);  $U_{C0}$  – начальное напряжение конденсаторной батареи;  $C$  – емкость конденсаторной батареи;  $t$  – время;  $t_1$  – принятое время окончания процесса срабатывания привода;  $x(t)$  – перемещение подвижного элемента;  $F(t)$  – сила, создаваемая полем контура катушки и действующая на подвижный элемент;  $F_c$  – характеристика противодействующей силы, учитывающей сопротивление пружин, трение и вес подвижного элемента.

Если считать, что процесс движения подвижного элемента может быть описан исходя только из электрических параметров схемы, то потокосцепления  $\Psi_1(t)$  и  $\Psi_2(t)$ , входящие в соотношения (1), в первом приближении определяются коэффициентами собственных и взаимных индуктивностей контуров схемы и могут быть представлены в виде двух составляющих [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(t) = w_1(L_{11} - L_{12}); \\ \Psi_2(t) = w_2(L_{22} - L_{21}), \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $L_{11}$ ,  $L_{22}$  – собственные индуктивности катушки и подвижного элемента;  $L_{12}$ ,  $L_{21}$  – их взаимные индуктивности.

Более точный учет движения подвижного элемента осуществляется введением в уравнения (2) составляющих, характеризующих изменение взаимных индуктивностей от перемещения в процессе движения. Предполагается, что взаимные индуктивности равны между собой,  $L_{12} = L_{12}(x(t)) = L_{21}(x(t))$ . Добавочные составляющие падений напряжения в первом  $\Delta u_1(t)$  и втором  $\Delta u_2(t)$  контурах и электромагнитная сила  $F(t)$  при этом равны:

$$\Delta u_1(t) = -i_2(t) \cdot \frac{dL_{12}}{dt}; \quad (3)$$

$$\Delta u_2(t) = -i_1(t) \cdot \frac{dL_{21}}{dt};$$

$$F(t) = \frac{1}{2} i_1(t) \cdot i_2(t) \cdot \frac{dL_{12}}{dt}.$$

С учетом (3) система уравнений (1) приобретает вид, приведенный в [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_C(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} - i_2(t) \cdot \frac{dL_{12}}{dt} - L_{12} \cdot \frac{di_2(t)}{dt}; \\ 0 = R_2 \cdot i_2(t) + L_{22} \frac{di_2(t)}{dt} - i_1(t) \cdot \frac{dL_{21}}{dt} - L_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt}; \\ u_C(t) = U_{C0} - \frac{1}{C} \int_0^{t_1} i_1(t) \cdot dt; \\ m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{1}{2} i_1(t) \cdot i_2(t) \cdot \frac{dL_{12}}{dt} - F_C; \\ L_{12} = L_{12}(x(t)). \end{array} \right. \quad (4)$$

Исходными данными модели (4) являются начальное напряжение конденсаторной батареи  $U_{C0}$ , активные сопротивления катушки и подвижного элемента  $R_1$  и  $R_2$ , емкость конденсаторной батареи  $C$ , коэффициенты собственных катушки и подвижного элемента  $L_{11}$ ,  $L_{22}$ , зависимость взаимной индуктивности от перемещения.  $L_{12}(x(t))$ . Расчетными являются зависимости токов катушки и подвижного элемента от времени,  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  и зависимость перемещения подвижного элемента от времени,  $x(t)$ . Начальные и граничные условия для этой системы (2) записываются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_C(0) = U_{C0}; \\ u_C(\infty) = 0; \\ x(0) = 0; \\ x(t_1) = \delta; \\ i_1(0) = 0; \\ i_2(0) = 0; \\ \frac{dx(0)}{dt} = 0, \end{array} \right. , \quad (5)$$

где  $\delta$  – расстояние между контактами после срабатывания выключателя.

Аналитическое определение собственных и взаимных индуктивностей представляет собой сложную задачу. В [6] приводятся методы определения коэффициентов индуктивностей и взаимных индуктивностей соосных круговых цилиндрических катушек прямоугольного сечения. При этих же условиях в [1] получено аналитическое выражение для производной от взаимной индуктивности:

$$\frac{dL_{12}(x(t))}{dx} = -x(t) \cdot \mu_0 \frac{w_1 w_2}{4 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2} \int_{y_0}^1 \int_{y_0}^1 \frac{k}{\sqrt{y_1 y_2}} \left( \frac{2-k^2}{1-k^2} E - 2K \right) dy_1 dy_2. \quad (6)$$

В соотношении (6) приняты следующие обозначения:  $r_1, r_2$  – радиусы осей катушки и подвижного элемента;  $K$  и  $E$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода;  $k$  – параметр эллиптического интеграла, определяемый из соотношения:

$$k^2 = \frac{4y_1 y_2}{\left(\frac{\delta}{r_2}\right)^2 + (y_1 + y_2)^2}; \quad y_0 = \frac{r_1}{r_2}; \quad y_1 = \frac{\rho_1}{r_2}; \quad y_2 = \frac{\rho_2}{r_2}, \quad (7)$$

$y_0, y_1, y_2$  – коэффициенты;  $\rho_1, \rho_2$  – радиусы витков соответственно катушки и подвижного элемента.

Для коэффициента взаимной индуктивности контуров овальной (или другой) формы могут быть получены интегральные соотношения, с последующим численным интегрированием с использованием формулы Неймана [6]:

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iint \frac{dl_1 \cdot dl_2}{D}, \quad (8)$$

где  $dl_1, dl_2$  – элементарные векторы отрезков контуров;  $D$  – расстояние между отрезками.

Определение расстояний  $D$  в формуле (8) проводится по методике,

описанной в [6].

Расширение возможностей учета физических процессов в индукционно-динамическом приводе дают схемы замещения для магнитной системы его электромагнита [7]. В этом случае в модели (1) определение потокоцеплений проводится на основе расчета магнитных потоков, исходя из известных величин и связей магнитных проводимостей (либо магнитных сопротивлений) участков схемы. Величины этих проводимостей рассчитываются исходя из геометрии объемов, по которым проходят магнитные потоки [8]. Как и в предыдущем случае в известных моделях индукционно-динамических приводов расчет магнитных потоков проводится при допущении, что магнитная проницаемость ферромагнитных материалов магнитных систем равна бесконечности.

Входящие в соотношения (1) производные потокоцеплений представляются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1(t)}{dt} &= w_1^2 \cdot G_{11} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - w_1 \cdot w_2 \cdot G_{12} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - w_1 \cdot w_2 \cdot i_2(t) \cdot \frac{dG_{12}}{dt}; \\ \frac{d\Psi_2(t)}{dt} &= -w_2^2 \cdot G_{22} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + w_1 \cdot w_2 \cdot G_{21} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + w_1 \cdot w_2 \cdot i_1(t) \cdot \frac{dG_{21}}{dt}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $w_1$ ,  $w_2$  – количество витков катушки и подвижного элемента;  $G_{11}$  – полная проводимость собственного магнитного потока катушки;  $G_{12}$  – проводимость потока взаимной индукции катушки и подвижного элемента;  $G_{21}$  – проводимость потока взаимной индукции подвижного элемента и катушки;  $G_{22}$  – полная проводимость собственного магнитного потока подвижного элемента.

Особенностью соотношений (9) является то, что определяются сразу именно производные от потокоцеплений, минуя определение самих потокоцеплений и их составляющих с учетом физических интерпретаций.

На рис. 3 приведены схемы разветвления магнитных потоков, создаваемых токами рабочей катушки и ( $i_1$ ) и подвижного элемента ( $i_2$ ) в центральном осевом сечении электромагнита, на участках магнитной системы. Ось электромагнита обозначена  $00'$ . Условно потоки показаны в виде линий со стрелками, обозначающими направление потока. Такое представление линий магнитного потока принято в электротехнике и позволяет определить приближенно длину области, через которую он проходит. Горизонтальные области магнитной системы показаны на рис. 3,б и получены разбивкой по высоте электромагнита, начиная от его основания. Область  $k = 1$  ограничена плоскостями основания магнитной системы и верхнего торца рабочей катушки. Следующая область  $k = 2$  ограничена сверху плоскостью нижнего торца подвижного элемента. Область  $k = 3$  ограничена сверху плоскостью верхнего торца подвижного элемента; область  $k = 4$  ограничена сверху плоскостью верхнего торца электромагнита;



область  $k = 5$  соответствует свободному полупространству над плоскостью верхнего торца электромагнита.

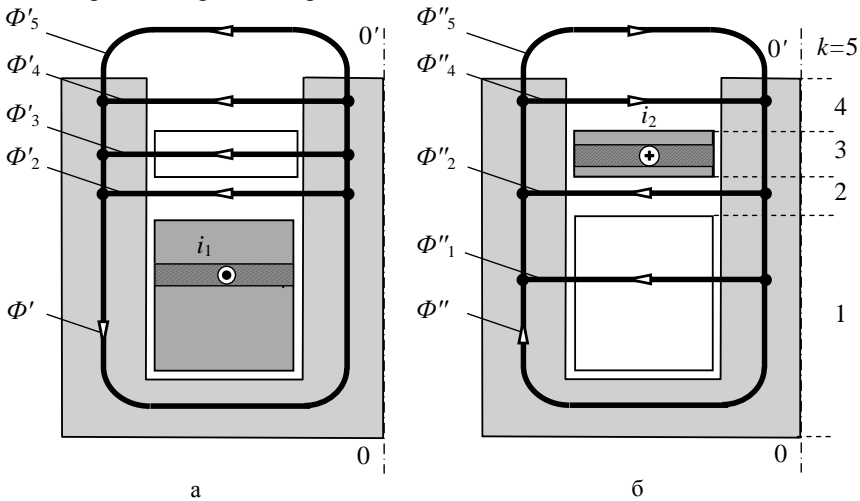


Рис 3.

Направления магнитных потоков выбраны для момента времени, когда направления токов соответствуют направлениям, показанным на рис. 3. В соответствии с принципом наложения, результирующие потоки схемы определяются по соотношениям:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \Phi' - \Phi''; \\
 \Phi_1 &= \Phi''_1; \\
 \Phi_2 &= \Phi'_2 + \Phi''_2; \\
 \Phi_3 &= \Phi'_3; \\
 \Phi_4 &= \Phi'_4 - \Phi''_4; \\
 \Phi_5 &= \Phi'_5 - \Phi''_5,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $\Phi''$  – полный магнитный поток магнитной системы и его составляющие от токов катушки и подвижного элемента;  $\Phi_k$ ,  $\Phi'_k$ ,  $\Phi''_k$  – магнитный поток  $k$ -го участка магнитной системы и его составляющие.

Полный поток определяется по формуле

$$\Phi = \sum_k \Phi_k. \tag{11}$$

Следует заметить, что потоки в соотношениях (10) и (11) являются переменными, и зависимости их составляющих от времени повторяют форму зависимости порождающих их токов.

Для расчета магнитных потоков составляется схема замещения магнитной цепи. На рис. 4,а,б приведены такие схемы, составленные для расчета магнитных потоков от токов рабочей катушки и подвижного элемента. Схемы содержат сосредоточенные компоненты магнитодвижущих сил и магнитные проводимости, величины которых являются исходными данными.

Обозначения на схемах:  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  – магнитодвижущие силы, создаваемые токами рабочей катушки и вихревыми токами подвижного элемента;  $G'_k$ ,  $G''_k$  – магнитные проводимости участков магнитной системы.

Магнитодвижущие силы равны:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= i_1(t) \cdot w_1; \\ P_2(t) &= i_2(t) \cdot w_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Магнитные проводимости рассматриваются только для воздушных участков магнитной цепи, в соответствии с допущением модели о бесконечности магнитной проницаемости ферромагнитного материала. При этом на схеме рис. 3,б ветвь с магнитным потоком  $\Phi''$  шунтирует ветви с потоками  $\Phi''_1$ ,  $\Phi''_2$  и при расчете по соотношениям (7) они не учитываются.

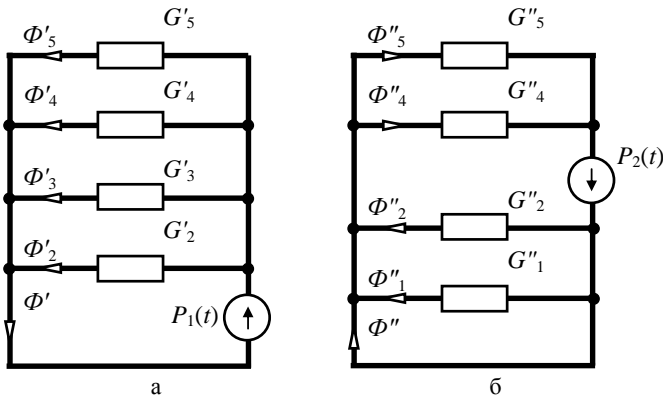


Рис. 4.

Приближенный расчет магнитных проводимостей воздушных участков может проводиться по известным формулам исходя из геометрии объемов, по которым проходят магнитные потоки с учетом их направления [8],

$$G_k = \mu_0 \frac{S_k}{l_k}, \quad (13)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость воздушного участка, равная магнитной постоянной вакуума;  $S_k$  – средняя площадь сечения участка, через которое проходит магнитный поток;  $l_k$  – его средняя длина.

Более точный расчет магнитных проводимостей воздушных участков в рамках метода трубок Ротерса дает применение разбивки укрупненных участков прохождения магнитных потоков на более мелкие. Повышение точности здесь достигается за счет возможности учесть магнитные потоки рассеяния и выпучивания [9]. Расчет проводимостей этих более мелких трубок также проводится по формуле (13).

Системы уравнений, связывающих магнитодвижущие силы и потоки схем, составляются в соответствии с законами Кирхгофа для магнитной цепи:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi'_k}{G'_k} &= P_1(t), \quad k = 2, 3, 4, 5; & (14) \\ \sum_k \Phi'_k &= 0; \\ \frac{\Phi''_k}{G''_k} &= P_2(t), \quad k = 4, 5; \\ \sum_k \Phi''_k &= 0. \end{aligned}$$

Полученные в результате расчета магнитные потоки используются для расчета потোকосцеплений и электродинамической силы. Приближенная величина силы  $F(t)$  равна

$$F(t) = -\frac{d}{dx}(W_\delta) = \frac{\Phi_\delta^2(t)}{2\mu_0 S_\delta}, \quad (15)$$

где  $W_\delta$  – энергия поля в рабочей области электромагнита;  $\Phi_\delta(t)$  – магнитный поток в рабочей области;  $S_\delta$  – площадь поверхности, через которую проходит рабочий магнитный поток.

Для рассматриваемой конструкции электромагнита рабочей является область  $k = 3$  (рис. 3), через которую проходит магнитный поток  $\Phi_\delta(t) = \Phi'_3$ , а площадь  $S_\delta$  определяется как площадь внутренней цилиндрической поверхности подвижного элемента.

С учетом (9) и (15) математическая модель (1) преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_C(t) = R_1 \cdot i_1(t) + w_1^2 \cdot G_{11} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - w_1 \cdot w_2 \cdot G_{12} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - w_1 \cdot w_2 \cdot i_2(t) \cdot \frac{dG_{12}}{dt}; \\ 0 = R_2 \cdot i_2(t) - w_2^2 \cdot G_{22} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + w_1 \cdot w_2 \cdot G_{21} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + w_1 \cdot w_2 \cdot i_1(t) \cdot \frac{dG_{12}}{dt}; \\ u_C(t) = U_{C0} - \frac{1}{C} \int_0^{t_1} i_1(t) \cdot dt; \\ m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{\Phi_\delta^2(t)}{2\mu_0 S_\delta} - F_c. \end{array} \right. \quad (16)$$

Граничные и начальные условия для этой системы уравнений соответствуют (5).

Несмотря на нелинейный характер зависимостей основных переменных модели (16) (токов, магнитных потоков и перемещения подвижного элемента), с ее помощью удастся учесть пространственную конфигурацию магнитных потоков в магнитной системе. Основные недостатки этой модели связаны с тем, что не учитывается магнитная проводимость магнитной системы электромагнита и поверхностный эффект в токопроводящих элементах привода. Это приводит к тому, что неточно учитываются величины магнитных потоков и динамическая составляющая собственной индуктивности рабочей катушки, определяющие в конечном итоге величину силы в индукционно-динамическом приводе.

**Усовершенствованная математическая модель индукционно-динамического привода автоматического выключателя.** Усовершенствование математической модели предлагается провести путем введения в уравнения (16) составляющих, учитывающих динамические индуктивности рабочей катушки и подвижного элемента, обусловленные поверхностным эффектом в переходном процессе импульсного разряда конденсаторной батареи, и составляющих магнитной проводимостей стали магнитной системы.

Как показывают экспериментальные исследования, вследствие импульсного разряда токи рабочей катушки и подвижного элемента имеют широкий частотный спектр. Следствием этого является существенный поверхностный эффект и перераспределение плотности тока с возрастанием ее величины по мере приближения к наружной поверхности катушки либо подвижного элемента. Средний радиус витка (либо слоя) катушки при этом увеличивается и возрастает индуктивность катушки. Различия индуктивности при низкой и высокой частоте можно оценить на примере кругового кольца прямоугольного сечения и выполненного из медного провода. Так, при радиусе оси кольца 50 мм, ширине и толщине сечения кольца соответственно 5 и 10 мм в [6] приведены числовые величины индуктивности при низкой  $L$  и весьма высокой

частоте  $L_f$  (когда ток можно считать сосредоточенным в весьма тонком поверхностном слое):  $L = 1,751 \cdot 10^{-7}$  Гн,  $L_f = 1,595 \cdot 10^{-7}$  Гн. Различие составляет 10 %.

Учет динамической индуктивности проводится введением в производные потокосцеплений модели составляющих падений напряжения на динамической индуктивности рабочей катушки и подвижном элементе:

$$\frac{d\Psi_1(t)}{dt} = w_1^2 \cdot G_{11} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - w_1 \cdot w_2 \cdot G_{12} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - w_1 \cdot w_2 \cdot i_2(t) \cdot \frac{dG_{12}}{dt} + \left[ w_1^2 \cdot i_1(t) \cdot \frac{dG_{11}}{dt} \right]; \quad (17)$$

$$\frac{d\Psi_2(t)}{dt} = -w_2^2 \cdot G_{22} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} + w_1 \cdot w_2 \cdot G_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + w_1 \cdot w_2 \cdot i_1(t) \cdot \frac{dG_{12}}{dt} - \left[ w_2^2 \cdot i_2(t) \cdot \frac{dG_{22}}{dt} \right].$$

В соотношениях (17) добавочные составляющие выделены квадратными скобками.

Для расчета динамической индуктивности можно воспользоваться формулой для индуктивности кругового кольца [6] прямоугольного сечения, полагая, что радиус кольца является переменной величиной, зависящей от времени, а частота – низкая [6]:

$$L_{nn}(t) = \mu_0 r_n(t) \left[ \ln \frac{8r_n(t)}{a_n + \rho_n} - 0,5 \right] \quad (n = 1, 2), \quad (18)$$

где  $L_{nn}(t)$  – динамическая индуктивность кольца;  $n$  – индекс, принимающий значения 1 и 2 соответственно для рабочей катушки и подвижного элемента;  $r_n(t)$  – зависимость среднего радиуса оси кольца от времени;  $a_n$  – высота кольца;  $\rho_n$  – толщина кольца.

Для определения зависимости  $r_n(t)$ , входящей в соотношение (18), предлагается следующая рабочая гипотеза. Она основана на том, что глубина проникновения электромагнитной волны в объем, заполненный электропроводным материалом, зависит от частоты. С увеличением частоты глубина проникновения электромагнитной волны уменьшается.

Функция тока  $i_n(t)$  ( $n = 1, 2$ ) на интервале времени  $(0, t_1)$  условно разбивается на  $Q$  элементарных кусочно-постоянных импульсов тока  $I_n(q)$  одинаковой длительности  $\Delta t$ . На рис. 5 показана функция тока электромагнита индукционно-динамического привода с выделенным элементарным импульсом тока  $I_n(q)$  на интервале  $q$ .

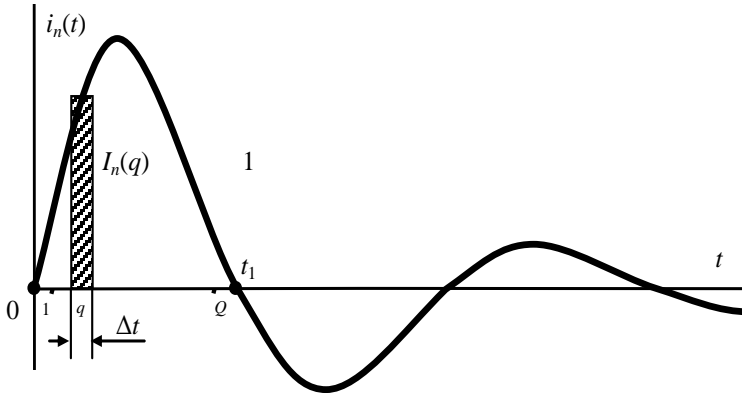


Рис. 5

Каждый из импульсов  $\Delta I_n$  представляется в виде спектра гармоник (коэффициентов разложения в ряд Фурье [10]):

$$I_{nv}(q) = \frac{1}{t_1} \cdot \eta_v \int_0^{t_1} i_n(t) \cdot \delta(q) \cdot e^{-jv \cdot \omega t} dt, \quad (19)$$

где  $I_{nv}(q)$  – амплитуда тока гармоники порядка  $v$ ;  $\eta_v$  – коэффициент равный 0,5 при  $v = 0$  и 1 – при  $v > 0$ ;  $\delta(q)$  – дельта-функция;  $j$  – мнимая единица;  $\omega$  – циклическая частота.

Расчет гармоник токов проводится по соотношению (19) для всех импульсов токов.

Прямоугольное сечение проводника  $s_n$  разделяется условно на слои, приближающиеся к поверхности по мере увеличения частоты гармоники. Для гармоники порядка  $v$  определяется радиус  $r_v$  как расстояние от оси кольца  $V$  до оси слоя  $V_v$  (рис. 6).

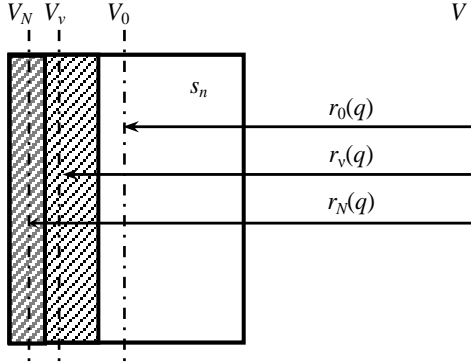


Рис. 6.

На рис. 6 использованы обозначения:  $r_v(q)$  – средний радиус слоя, по которому протекает ток гармоники порядка  $v$ ,  $v = \overline{(0, N)}$ ;  $N$  – число учитываемых гармоник разложения функции тока.

Мгновенная величина радиуса  $r_v(t)$  определяется по соотношению:

$$r_v(t) = \frac{\sum_{v=0}^N r_v(q) \cdot I_{nv}(q)}{I_n(q)}. \quad (20)$$

Входящие в соотношение (20) величины радиусов определены по интервалам времени:

$$\frac{t_1}{Q} \cdot (q-1) \leq t \leq \frac{t_1}{Q} \cdot q. \quad (21)$$

Как видно из соотношения (21) задание времени проводится дискретно для сокращения объема вычислений.

В качестве базовой зависимости глубины проникновения электромагнитной волны в объем проводника можно воспользоваться экспериментальными данными, приведенными в [11].

Переход к динамическим проводимостям  $\frac{dG_{nn}}{dt}$  выполняется в соответствии с соотношением:

$$\frac{dG_{nn}}{dt} = w_n^{-2} \cdot \frac{dL_{nn}}{dt} \quad (n=1, 2). \quad (22)$$

Динамические проводимости (22) подставляются в уравнения (17).

Для расчета магнитных потоков в магнитной системе электромагнита составляется схема замещения магнитной цепи с учетом конечных величин

проводимостей участков из ферромагнитного материала (рис. 7). Для упрощения на схемах введена общая нумерация ветвей и узлов, которые показаны в кружках:  $k$  – номер ветви,  $k = (\overline{1, K})$ ;  $j$  – номер узла,  $j = (\overline{1, J})$ .

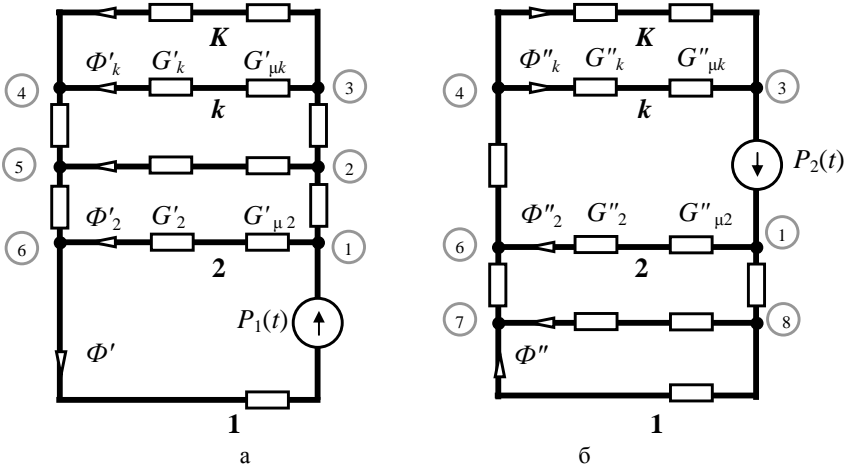


Рис. 7.

Величины магнитодвижущих сил определяются по соотношению (12).

Проводимости участков магнитной системы, выполненных из ферромагнитного материала, на схеме отмечены индексом  $m$  и определяются по аналогии с проводимостями воздушных участков:

$$G_{\mu k} = \mu \frac{S_{\mu k}}{l_{\mu k}}, \quad (23)$$

где  $\mu$  – магнитная проницаемость участка из ферромагнитного материала;  $S_{\mu k}$  – средняя площадь сечения этого участка,  $l_{\mu k}$  – его средняя длина.

С учетом соотношений (17) и уравнений для магнитной цепи, аналогичных уравнениям (14) с учетом (23), математическая модель индукционно-динамического привода автоматического выключателя представляется в виде:



$$\left\{ \begin{array}{l}
u_C(t) = R_1 \cdot i_1(t) + w_1^2 \cdot G_{11} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + w_1^2 \cdot i_1(t) \cdot \frac{dG_{11}}{dt} - \\
\quad - w_1 \cdot w_2 \cdot G_{12} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - w_1 \cdot w_2 \cdot i_2(t) \cdot \frac{dG_{12}}{dt}; \\
0 = R_2 \cdot i_2(t) - w_2^2 \cdot G_{22} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} - w_2^2 \cdot i_2(t) \cdot \frac{dG_{22}}{dt} + \\
\quad + w_1 \cdot w_2 \cdot G_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + w_1 \cdot w_2 \cdot i_1(t) \cdot \frac{dG_{12}}{dt}; \\
u_C(t) = U_{C0} - \frac{1}{C} \int_0^{t_1} i_1(t) \cdot dt; \\
\sum_k \left( \frac{\Phi'_k}{G'_k} + \frac{\Phi'_k}{G'_{\mu k}} \right) = P_1(t) \quad k = (\overline{1, K}); \\
\sum_k \left( \frac{\Phi''_k}{G''_k} + \frac{\Phi''_k}{G''_{\mu k}} \right) = P_2(t); \\
\sum_j \Phi'_j = 0 \quad j = (\overline{1, J}); \\
\sum_j \Phi''_j = 0; \\
m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{\Phi_\delta^2(t)}{2\mu_0 S_\delta} - F_c; \\
\mu = \mu(B, H).
\end{array} \right. \quad (24)$$

Предложенная модель, по сравнению с известной, требует знания зависимости магнитной проницаемости ферромагнитного материала магнитной системы, что учтено последним соотношением (24).

### Выводы.

1. Существующие математические модели индукционно-динамического привода автоматического выключателя строятся как системы уравнений относительно нелинейных функций токов электромагнита, подвижного элемента и его перемещения в зависимости от времени в интервале срабатывания привода. Решение этих уравнений возможно только с использованием численных методов и стремление получить точный результат не всегда сопровождается учетом физики процессов. В этой связи оправданным становится использование приближенных моделей, построенных на основе методов схем замещения электрической и магнитной цепей электромагнита. Известная модель имеет низкую точность, поскольку магнитная проводимость ферромагнитных участков магнитной системы принята равной бесконечности.

2. Предложена усовершенствованная модель индукционно-динамического привода автоматического выключателя, которая учитывает конечные величины магнитной проводимости магнитной системы электромагнита, поверхностный эффект при импульсном характере токов рабочей катушки и подвижного элемента. Для полноты модель, содержащая уравнения электрической цепи и сил, действующих на подвижный элемент, дополнена уравнениями магнитной цепи с учетом конечных величин магнитных проводимостей участков магнитной системы. Предложенная модель в большей мере отражает физику процессов распределения токов и магнитных потоков в электромагните при его срабатывании и повышает точность моделирования.

3. Предложено соотношение для расчета динамических проводимостей рабочей катушки и подвижного элемента, возникающих вследствие поверхностного эффекта.

**Список литературы:** 1. *Могилевский Г.В.* Гибридные электрические аппараты низкого напряжения. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 232 с. 2. *Курбатов П.А., Аринчин С.А.* Численный расчет электромагнитных полей. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 168 с. 3. *Карпенко Л.Н.* Быстродействующие электродинамические отключающие устройства. – Л.: Энергия, 1973. – 158 с. 4. *Чальян К.М.* Методы расчета электромагнитных параметров токопроводов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 280 с. 5. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1973. – 752 с. 6. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей: Справочная книга. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 488 с. 7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с. 8. *Таев И.С.* Электрические аппараты. Общая теория. – М.: Энергия, 1977. – 272 с. 9. *Луников В.С., Варшамова И.С., Лелюк Н.А., Гридин Н.Ю.* Проводимости воздушных зазоров магнитных систем со сложной геометрией // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2006. – № 36. – С. 71-79. 10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Перев. со второго американского перераб. изд. – М.: Наука, 1974. – 832 с. 11. *Чунихин А.А., Яламов И.С.* Исследование распределения тока в диске и катушке индукционно-динамического привода // Электротехническая промышленность. Сер. Аппараты высокого напряжения, трансформаторы, силовые конденсаторы. – 1978. – Вып. 9 (89). – С. 6-9.

*Поступила в редколлегию 10.09.08*