

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Харьковский политехнический институт»

И. Ф. Домнин, В. П. Северин, Е. Н. Никулина

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
АНАЛИЗА И СИНТЕЗА
В РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ**

Учебное пособие
по курсу «Основы радиоэлектроники»

для студентов направления 6.040302 «Прикладная физика»

Утверждено
редакционно-издательским
советом НТУ «ХПИ»,
протокол № 1 от 07.06.2013 г.

Харьков
НТУ «ХПИ»
2014

УДК 519.6(075)

ББК 22.19я73

Д12

Рецензенты :

Л. Ф. Черногор, д-р физ.-мат. наук, проф., Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина;

Н. В. Ткачук, д-р техн. наук, проф., Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Розглянуто числові методи аналізу і синтезу в радіоелектроніці, які основані на матричних методах розв'язання систем диференціальних рівнянь та методах оптимізації. Наведено математичні моделі генераторів електричних імпульсів, для яких розв'язуються задачі аналізу та синтезу.

Призначено для студентів технічних спеціальностей.

Домнин И. Ф.

Д 12 Численные методы анализа и синтеза в радиоэлектронике: учеб. пособие / И. Ф. Домнин, В. П. Северин, Е. Н. Никулина. – Х. : НТУ «ХПИ», 2014. – 164 с. – На рус. яз.

ISBN 978-617-05-0100-4

Рассмотрены численные методы анализа и синтеза в радиоэлектронике, основанные на матричных методах решения систем дифференциальных уравнений и методах оптимизации. Приводятся математические модели генераторов электрических импульсов, для которых решаются задачи анализа и синтеза.

Предназначено для студентов технических специальностей.

Ил. 35. Табл. 3. Библиогр.: 31 назва.

УДК 519.6(075)

ББК 22.19я73

ISBN 978-617-05-0100-4

© Домнин И.Ф., Северин В.П., Никулина Е.Н., 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ	7
1.1. Закон Ома	7
1.2. Первый закон Кирхгофа	11
1.3. Второй закон Кирхгофа	13
1.4. Переменный ток в цепи с индуктивностью	14
1.5. Переменный ток в цепи с индуктивностью и емкостью	21
Контрольные вопросы	24
2. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	26
2.1. Вычисление функции веса	26
2.2. Вычисление матричной экспоненты	28
2.3. Вычисление переходной функции	30
2.4. Методы вычисления матричной экспоненты и ее интеграла	32
2.5. Решение однородных систем дифференциальных уравнений	35
2.6. Решение нелинейных систем дифференциальных уравнений	36
2.7. Общий алгоритм матричных методов	39
Контрольные вопросы	40
3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЯМЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА	42
3.1. Вычисление экстремумов переходного процесса	42
3.2. Вычисление показателей отклонения и колебательности	46
3.3. Вычисление времени переходного процесса	47
3.4. Задача оптимизации прямых показателей качества	52
3.5. Пошаговый принцип решения задач оптимизации	54
3.6. Пошаговый подход к оптимизации прямых показателей	61
Контрольные вопросы	67
4. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА	69
4.1. Теоретические основы одномерной оптимизации	69
4.2. Интервал неопределенности	71
4.3. Метод Свенна	76

4.4. Метод деления интервала пополам	79
4.5. Метод золотого сечения	82
4.6. Метод адаптации шага	84
4.7. Метод квадратичной аппроксимации	86
Контрольные вопросы	88
5. МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ	91
5.1. Теоретические основы многомерной оптимизации	91
5.2. Метод наискорейшего спуска	95
5.3. Метод Ньютона	99
5.4. Методы сопряжённых градиентов	103
5.5. Квазиньютоновские методы	107
5.6. Метод Нелдера – Мида	111
5.7. Метод Хука – Дживса	117
Контрольные вопросы	122
6. МОДЕЛИРОВАНИЕ, АНАЛИЗ И СИНТЕЗ	
РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ	124
6.1. Уравнения типовых элементов в радиоэлектронике	124
6.2. Математическая модель генератора импульсов тока	125
6.3. Анализ процессов в генераторе импульсов тока	127
6.4. Синтез параметров генератора импульсов тока	128
6.5. Генераторы импульсов напряжения	133
6.6. Математическая модель генератора импульсов напряжения	137
6.7. Анализ процессов в генераторе импульсов напряжения	140
Контрольные вопросы	141
7. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ	144
7.1. Правила дифференцирования	144
7.2. Элементы векторной алгебры	147
7.3. Матрицы и действия с ними	150
7.4. Дифференцирование функций многих переменных	154
7.5. Формула Тейлора	157
7.6. Квадратичные формы	158
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	161

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы анализа и синтеза широко применяются в технике, физике, экономике и других областях. По численным методам опубликованы монографии и учебники с высоким математическим уровнем изложения материала. В то же время учебных пособий по численным методам анализа и синтеза радиоэлектронных систем, рассчитанных на подготовку специалистов по прикладной физике, явно недостаточно.

Предлагаемое учебное пособие учитывает специфику математической подготовки студентов высших технических учебных заведений. В основу пособия положены современные численные методы анализа и синтеза, основанные на матричных методах решения систем дифференциальных уравнений и методах оптимизации.

В первом разделе рассматриваются основные законы электротехники, необходимые для математического моделирования радиоэлектронных схем. Приводится закон Ома для участка проводника, обосновываются законы Кирхгофа, которые позволяют рассчитать разветвленную цепь постоянного тока. Рассматривается цепь, содержащая индуктивность и источник переменной ЭДС. Выполняется анализ цепи переменного квазистационарного тока, которая содержит последовательно соединенные ЭДС, индуктивность и емкость.

Второй раздел посвящен матричным методам интегрирования систем дифференциальных уравнений. Приведены алгоритмы построения переходных процессов для различных моделей радиоэлектронных схем. Анализ алгоритмов позволил разработать общий алгоритм матричного метода интегрирования систем дифференциальных уравнений, позволяющий решать задачи анализа радиоэлектронных схем.

В третьем разделе рассмотрены алгоритмы вычисления массива экстремумов переходных процессов в радиоэлектронных схемах. Предложены формулы вычисления показателей отклонения и колеба-

тельности, вычисления времени переходных процессов в радиоэлектронных схемах. Предложен метод вычисления вектора прямых критериев качества в виде единого вычислительного процесса.

Четвертый раздел посвящен основам методов одномерной оптимизации. Представлены метод Свенна для поиска интервала неопределенности, методы деления интервала пополам, золотого сечения, адаптации шага и квадратичной интерполяции с тремя точками.

В пятом разделе рассматриваются положения теории многомерной безусловной оптимизации. Дается определение экстремума функции многих переменных, формулируются условия экстремума. Приводятся градиентный метод наискорейшего спуска, метод Ньютона с использованием вторых частных производных функции, методы сопряженных градиентов, квазиньютоновские методы, методы Нелдера – Мида и Хука – Дживса.

Шестой раздел посвящен математическому моделированию, анализу и синтезу различных радиоэлектронных схем. Рассмотрены уравнения типовых элементов радиоэлектронных схем, которые применяются при математическом моделировании. Приводится математическая модель генератора импульсов тока. Решается задача анализа для генератора импульсов тока матричным методом интегрирования. Синтез параметров нескольких высоковольтных источников, обеспечивающих получение в нагрузке заданного импульса тока, выполняется методами оптимизации. Рассмотрен генератор Маркса для создания импульсов высокого напряжения, приведены математические модели генератора Маркса и результаты расчетов переходных процессов.

Для всех рассмотренных методов приведены алгоритмы, которые позволяют облегчить понимание методов.

В седьмом разделе обобщается основной справочный материал, необходимый для изучения численных методов анализа и синтеза радиоэлектронных схем.

Для усвоения материала достаточно владения стандартными курсами высшей математики и разделом «Электричество и магнетизм» курса физики.

1. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Для математического моделирования радиоэлектронных схем рассматриваются основные законы электротехники. Приводится закон Ома для участка проводника, не содержащего источника электродвижущей силы. Обосновываются первый и второй законы Кирхгофа, которые позволяют рассчитать любую разветвленную цепь постоянного тока. Рассматривается цепь, содержащая индуктивность и источник переменной ЭДС. Выполняется анализ цепи переменного квазистационарного тока, которая содержит последовательно соединенные ЭДС, индуктивность и емкость.

1.1. Закон Ома

В нормальном, несверхпроводящем металлическом проводнике имеет место закон Ома. Для участка проводника, не содержащего источник электродвижущей силы (гальванического элемента, аккумулятора, динамомашины, термопары, источника фотоэдс и т. д.), закон Ома заключается в том, что сила тока пропорциональна разности потенциалов на концах участка. Коэффициент пропорциональности обозначается $1/R$, и величину R называют *сопротивлением*. Поэтому закон Ома для участка цепи без ЭДС имеет вид

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{u}{R}, \quad (1.1)$$

где $u = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов.

По сложившейся традиции направлением тока считается направление движения положительных зарядов, поэтому если потенциал начальной точки участка φ_1 больше потенциала конечной точки φ_2 , то ток течет от точки 1 к точке 2. В действительности в металлических проводниках ток переносят электроны, которые движутся от точки 2 к

точке 1, если $\varphi_1 > \varphi_2$.

Закон Ома не является универсальной связью между током и напряжением. Для металлов (в несверхпроводящем состоянии) закон Ома справедлив вплоть до весьма больших плотностей тока. Для полупроводников и газов пропорциональность между I и u наблюдается лишь при малых u . Термоэлектронный ток в вакууме не подчиняется закону Ома даже и при малых u – в этом случае сила тока пропорциональна $u^{3/2}$. В вольтовой дуге с увеличением тока напряжение падает (падающая вольтамперная характеристика), так что не может быть и речи о выполнении закона Ома.

Выражение (1.1), однако, записывают даже в случае, когда закон Ома не выполняется. Тогда оно служит определением сопротивления $R = u/I$. Если сопротивление не зависит от величины тока, закон Ома выполняется. Если сопротивление само меняется с изменением тока (как, например, сопротивление газа при газовом разряде), то никакой пропорциональности между u и I нет, а значит, нет и закона Ома.

Электродвижущая сила.

Рассмотрим цепь, состоящую из источника тока и сопротивления (рис. 1.1), подключенного к полюсам источника, которые мы обозначили буквами A и K (анод и катод). Тогда в формуле (1.1) φ_1 – это потенциал

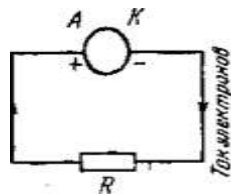


Рис. 1.1. Электродвижущая сила

полюса A , а φ_2 – потенциал K . Для того чтобы ток был постоянным необходимо, чтобы φ_1 и φ_2 не менялись со временем (точнее, требуется, чтобы не менялась разность $\varphi_1 - \varphi_2$, но в данном случае оба требования эквивалентны). Для этого нужно, чтобы *заряды* полюсов A и K не менялись со временем, несмотря на то, что каждую секунду определенное число электронов уходит с полюса K и столько же приходит на полюс A . Внутри источника должны действовать силы, кото-

рые бы за секунду переносили все пришедшие на полюс A электроны обратно на полюс K . Этим силам придется преодолеть притяжение электронов к A и отталкивание их от K , т. е. они должны действовать против сил потенциального электрического поля, создаваемого зарядами полюсов и других точек цепи, где такие заряды имеются.

Отсюда ясно, что действие источника ЭДС может быть вызвано силами любого происхождения, но только не теми, которые создаются неподвижными электрическими зарядами, т. е. не силами потенциального электрического поля. Такие силы принято называть *сторонними*. Фактически это могут быть индукционные электрические силы, т. е. силы вихревого электрического поля, созданного переменным магнитным полем, «химические» силы в аккумуляторах и гальванических элементах и др.

Рассмотрим простой, хотя и воображаемый, источник сторонних сил механического происхождения. Возьмем проводящее кольцо (рис. 1.2) с разрезом AK . Воображаемым «пинцетом» будем извлекать электроны из A и препровождать их через зазор AK в K . Тогда в K создастся избыточный отрицательный заряд, в A – избыточный положительный (избыток положительных ионов), и электроны под действием сил электрического поля устремятся по кольцу от K к A . Путь из A в K они совершат уже не под действием электрических сил, а против них, под действием механических сил нашего «пинцета».

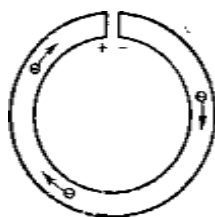


Рис. 1.2. Проводящее кольцо

Во внешней цепи KA работу совершают электрические силы – она расходуется на выделение тепла. Однако вся эта работа полностью возмещается работой сторонних сил в зазоре AK . Это видно из того, что электрическое поле в кольце со временем не уменьшается, значит, и энергия его не меняется. Итак, истинным работником в цепи являются сторонние силы. Электриче-

ские силы тратят лишь то, что они получают от сторонних.

Поскольку мы выяснили, что в источниках сторонней ЭДС действуют, помимо потенциальных электрических сил, еще и силы другого происхождения, необходимо обобщить закон Ома так, чтобы он подходил также и для тех участков цепи, где есть сторонние силы. Запишем закон Ома (1.1) в виде

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (1.2)$$

где R_{12} – сопротивление участка $1 \rightarrow 2$. Стоящая справа разность потенциалов есть, как известно, работа потенциальных электрических сил над $+1$ зарядом на данном участке. Если на участке $1 \rightarrow 2$ (рис. 1.3), кроме этих сил, есть еще сторонние силы, следует добавить в правую часть формулы (1.2) еще и работу этих сторонних сил. Обозначим работу сторонних сил над $+1$ зарядом на участке $1 \rightarrow 2$ через ε_{12} и назовем эту величину *электродвижущей силой* на участке $1 \rightarrow 2$. Тогда закон Ома для такого участка запишется в виде

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (1.3)$$

Стоящую в правой части формулы работу потенциальных и сторонних сил над $+1$ зарядом на участке $1 \rightarrow 2$ называют *напряжением* на этом участке.

Под R_{12} надо понимать полное сопротивление участка (включая сопротивление источника ЭДС). В правой части ЭДС считаем *положительной*, если при движении в направлении $1 \rightarrow 2$ мы проходим источник ЭДС от минуса к плюсу. Знак силы тока I нужно взять положительным, если ток течет в направлении $1 \rightarrow 2$, и отрицательным в обратном случае. Если направление тока неясно, можно приписать ему

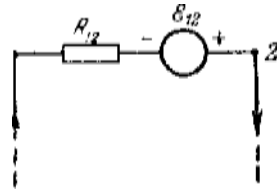


Рис. 1.3. Участок цепи со сторонней ЭДС

любое направление, тогда истинный знак тока получится из решения уравнения (1.3).

Из закона Ома (1.3), подходящего для любого участка цепи, можно получить в качестве частного случая закон Ома для всей цепи. Для этого нужно, зафиксировав точку 1, двигать точку 2 через всю цепь до слияния ее с точкой 1 (рис. 1.4). Тогда в правой части уравнения (1.3) разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ обратится в нуль, и уравнение примет вид

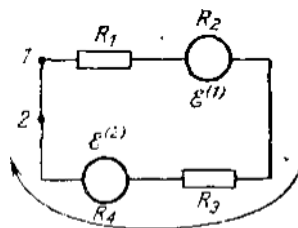


Рис. 1.4. Закон Ома для всей цепи

$$IR = \varepsilon \quad (1.4)$$

или

$$I = \frac{\varepsilon}{R}, \quad (1.5)$$

где R – полное сопротивление всей цепи, а ε – алгебраическая сумма всех ЭДС.

Полная ЭДС во всей цепи равна работе сторонних сил над +1 зарядом во всей цепи.

Работа сторонних сил во всей цепи, т. е. на замкнутом пути, равна ЭДС, включенной в цепь, а не нулю. Это лишний раз подчеркивает, что *сторонние силы не потенциальны*.

1.2. Первый закон Кирхгофа

Законы Кирхгофа позволяют рассчитать любую, как угодно разветвленную цепь постоянного тока. *Первый закон Кирхгофа* формулируется так: сумма токов, приходящих в точку разветвления, равна сумме токов, уходящих из нее.

Иначе говоря, алгебраическая сумма токов, приходящих в точку разветвления, равна нулю (рис. 1.5).

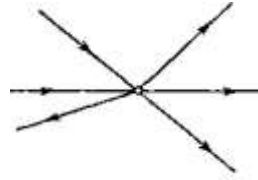


Рис. 1.5. Алгебраическая сумма токов

Этот закон кажется почти очевидным. В действительности же он представляет собой не всегда существующий частный случай закона непрерывности тока, который мы сейчас рассмотрим.

Пусть проводящее тело A (рис. 1.6) имеет в данный момент времени заряд q . Если алгебраическая сумма токов $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$

равна нулю, т. е. если сумма токов приходящих (обозначим ее I_2) равна сумме токов уходящих (I_1), то заряд q не будет меняться со временем. Однако может быть и такой случай, когда приходящие и уходящие токи не компенсируются. Ток через сечение проводника равен заряду, проходящему через это сечение за секунду. Поэтому разность $I_2 - I_1$ есть заряд, до-

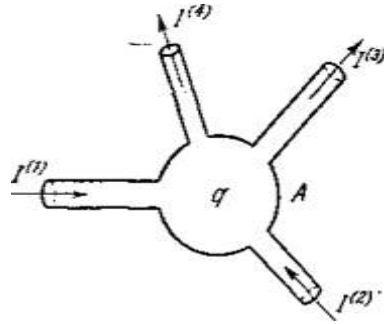


Рис. 1.6. Закон непрерывности тока

бавляющийся к заряду q за секунду. Если за время Δt секунд заряд q изменился на Δq , то за 1 с его изменение будет равно $\Delta q/\Delta t$. Следовательно,

$$I_2 - I_1 = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

Это уравнение носит название закона непрерывности тока: разность между суммой токов, приходящих в замкнутую область про-

странства, и суммой токов, из нее уходящих, равна изменению заряда этой области за секунду.

В цепи постоянного тока заряд, содержащийся в любой области цепи, не должен меняться со временем, иначе будут меняться потенциалы, а следовательно, и ток. Поэтому для цепи постоянного тока в (1.6) надо положить $\Delta q/\Delta t = 0$, т. е. $I_2 = I_1$, а это и есть первый закон Кирхгофа.

1.3. Второй закон Кирхгофа

Рассмотрим как угодно разветвленную цепь постоянного тока, содержащую источники ЭДС и сопротивления (рис. 1.7). Цель расчета цепи заключается в определении токов на всех ее участках. Обозначим токи на участках $I_1, I_2, I_3, I_4 \dots$ и произвольным образом зададим их предполагаемые направления (поскольку они заранее не известны). Выберем теперь произвольный замкнутый контур, например $ABCD$, зададим направление обхода этого контура (например, против часовой стрелки) и запишем закон Ома (1.3) для каждого из участков:

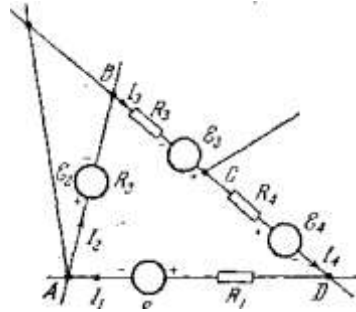


Рис. 1.7. Разветвленная цепь постоянного тока

$$I_1 R_1 = \varphi_D - \varphi_A + \varepsilon_1, \quad I_2 R_2 = \varphi_A - \varphi_B + \varepsilon_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_B - \varphi_C + \varepsilon_3, \quad I_4 R_4 = \varphi_C - \varphi_D + \varepsilon_4;$$

здесь каждая из ЭДС должна быть записана с соответствующим знаком. Складывая эти уравнения, получим

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4.$$

Разности потенциалов выпадают. Следовательно, в произвольном замкнутом контуре, выбранном из разветвленной цепи, сумма падений напряжения (произведений IR) равна сумме ЭДС. Это и есть второй закон Кирхгофа:

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i . \quad (1.7)$$

Заметим, что, поскольку разности потенциалов все равно выпадают, второй закон Кирхгофа целиком относится и к случаю «распределенной ЭДС», т. е. к случаю, когда непотенциальное электрическое поле возникает в самих проводах вследствие электромагнитной индукции.

Можно доказать, что уравнений, полученных с применением первого и второго законов Кирхгофа, достаточно для определения токов, а, следовательно, и всех других величин.

В некоторых случаях можно обойтись при расчете цепи без законов Кирхгофа. Сюда относятся цепи, содержащие только последовательно или параллельно соединенные проводники, и некоторые более сложные случаи, когда из соображений симметрии или других можно найти так называемое *эквивалентное сопротивление* разветвленного участка цепи. Например, сопротивление R , эквивалентное нескольким параллельно соединенным проводникам, как известно, определяется по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots = \sum_i \frac{1}{R_i} .$$

1.4. Переменный ток в цепи с индуктивностью

Рассмотрим переменный ток настолько малой частоты, чтобы его можно было считать *квазистационарным*. Ток называется квазистационарным в том случае, если его магнитное поле в каждый момент времени практически такое же, какое было бы у тока стационарного

(постоянного), так же распределенного в пространстве и имеющего величину, совпадающую с мгновенной величиной переменного. Электрическое поле зарядов в квазистационарной цепи также совпадает со статическим полем распределения зарядов в данный момент.

Магнитное поле проводника с током создается всем проводником в целом, поэтому для квазистационарности необходимо, чтобы время распространения электромагнитного поля (электромагнитной волны) вдоль всей цепи было мало по сравнению с периодом переменного тока. Обозначив размеры цепи l , получим условие квазистационарности в виде

$$l/c \ll T. \quad (1.8)$$

Поскольку период $T = 1/\nu = \lambda/c$, условие (1.8) означает, что размеры цепи должны быть во много раз меньше длины волны, имеющей период, равный периоду тока:

$$l \ll \lambda. \quad (1.9)$$

Если размеры цепи $l \approx 10$ м, то условию квазистационарности с запасом удовлетворяют токи с частотой порядка 101–105 Гц. Однако в длинных линиях l может быть очень большим, условие квазистационарности может нарушаться, и это надо учитывать при расчете.

К квазистационарному переменному току применим закон Ома, однако это вовсе не означает, что в замкнутой цепи с внешней ЭДС ε (имеются в виду внешние источники без учета ЭДС самоиндукции) сила тока равна ε/R . Дело как раз в наличии ЭДС самоиндукции, величина которой не задана, а определяется быстротой изменения тока. Емкость, включенная в цепь, вносит дополнительные осложнения.

Рассмотрим сначала цепь, содержащую индуктивность и источник переменной ЭДС ε (генератор переменного тока). Пусть индуктивность цепи будет L , а полное омическое сопротивление R (рис. 1.8). Внешняя ЭДС пусть меняется со временем по гармоническому закону $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$, где ω – частота, а ε_0 – амплитуда ЭДС. Аргу-

мент косинуса (в данном случае ωt) называется *фазой*.

Закон Ома для всей цепи запишется в виде

$$IR = \varepsilon_0 \cos \omega t - L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (1.10)$$

(произведение IR равно сумме всех ЭДС, содержащихся в цепи). При гармонически меняющейся ЭДС сила тока тоже будет меняться гармонически с той же частотой, но со сдвигом по фазе, который нам надлежит определить. Итак, допустим, что

$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Такая запись означает, что ток отстает от ЭДС на угол φ (сдвиг по фазе на угол φ). Электродвижущую силу самоиндукции $-LdI/dt$ можно теперь вычислить по правилам дифференциального исчисления. Получается

$$-L \frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \sin(\omega t - \varphi) = -L\omega I_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, уравнение (1.10) можно записать в виде

$$I_0 R \cos(\omega t - \varphi) - L\omega I_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon_0 \cos \omega t. \quad (1.11)$$

Изобразим все три члена этого уравнения на так называемой векторной диаграмме. Каждая величина A , меняющаяся со временем по закону $A = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$, изображается на диаграмме проекцией на ось x вектора, имеющего длину A_0 и составляющего с этой осью угол $\omega t + \alpha$ (рис. 1.9). Со временем угол $\omega t + \alpha$ увеличивается, и вектор вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω , не меняя своей длины. Вектор тока, проекция которого на ось x равна $I_0 R \cos(\omega t - \varphi)$, отстает по фазе от вектора ЭДС на угол φ . Отсюда – указанное на рис. 1.10 взаимное расположение векторов. Вектор с про-

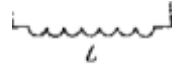


Рис. 1.8. Индуктивность

екцией $L\omega I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$ опережает вектор тока на $\pi/2$, как это видно из рисунка. Векторная сумма векторов, проекции которых стоят в левой части (1.11), должна давать ЭДС. Из диаграммы видно, что это означает, что $I_0^2 R^2 + I_0^2 L^2 \omega^2 = \varepsilon_0^2$, т. е.

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}. \quad (1.12)$$

Из этого же прямоугольного треугольника вытекает, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}, \quad (1.13)$$

чем определяется отставание тока от ЭДС.

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad (1.14)$$

называется *полным сопротивлением*. Говорят, что оно «состоит» из активного R и индуктивного $L\omega$ сопротивлений. Смысл названия «полное сопротивление» в том, что амплитуда тока I_0 связана с амплитудой ЭДС ε_0 соотношением, подобным закону Ома:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}. \quad (1.15)$$

Другого смысла термин «полное сопротивление» не имеет. В частности, выделяющееся в цепи тепло не равно $I^2 Z$. Тепло выделяется только на активном сопротивлении R , а не на индуктивном $L\omega$.

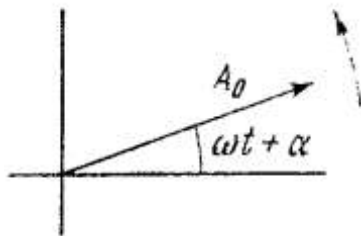


Рис. 1.9. Векторная диаграмма

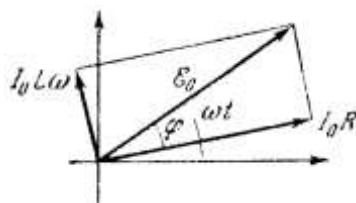


Рис. 1.10. Диаграмма проекций

Можно доказать, что тепло в джоулях, выделяющееся за секунду и представляющее собой тепловую мощность, равно

$$Q = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos \varphi = I_a \cdot \varepsilon_a \cdot \cos \varphi, \quad (1.16)$$

где

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}. \quad (1.17)$$

Под «действующими» значениями тока и ЭДС понимаются

$$I_a = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad \varepsilon_a = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}. \quad (1.18)$$

Именно эти действующие ток и напряжение измеряются обычными амперметром и вольтметром в цепи переменного тока.

Выражение для выделяющегося тепла легко преобразовать к виду

$$Q = I_a^2 \cdot R. \quad (1.19)$$

Для этого надо найти $\cos \varphi$ из (1.17) и воспользоваться формулами (1.15) и (1.18).

Задача об установлении тока при замыкании цепи с *постоянной ЭДС* (рис. 1.11) полностью аналогична механической задаче о падении тела в вязкой среде под действием силы тяжести; например о падении шарика в вязкой жидкости. Согласно второму закону Ньютона, произведение массы на ускорение $\Delta v / \Delta t$ равно сумме силы тяжести F (в случае падения в жидкости – за вычетом архимедовой силы) и силы трения $F_f = -rv$, пропорциональной скорости и направленной в сторону, ей противоположную:

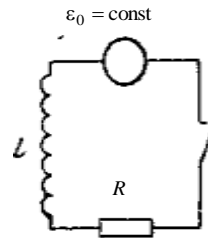


Рис. 1.11. Замкнутая цепь с постоянной ЭДС

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F - rv. \quad (1.20)$$

Уравнение, определяющее установление тока при замыкании цепи (закон Ома), $IR = \varepsilon_0 - L\Delta I/\Delta t$ можно записать в виде, совершенно аналогичном формуле (1.20):

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \varepsilon_0 - RI. \quad (1.21)$$

Сила тока здесь аналогична скорости, ЭДС – силе, индуктивность – массе и сопротивление – коэффициенту r при скорости в выражении для силы трения.

Скорость падающего тела вначале растет, в результате чего растет сила трения, а ускорение уменьшается, пока не обратится в нуль. Тогда, как видно из (1.20), скорость достигает значения $v_{\max} = F/r$. Это и есть максимальное значение скорости. При дальнейшем падении скорость будет оставаться постоянной. Аналогично этому ток увеличивается, пока не достигнет значения $I_{\max} = \varepsilon_0/R$, нормального для постоянного тока. Скорость тела, строго говоря, устанавливается лишь через бесконечно большое время, аналогично ведет себя и ток.

Можно доказать, что время установления постоянной скорости – порядка нескольких m/r , а время установления тока – порядка нескольких $\tau = L/R$. За время t , равное нескольким τ , ток практически достигнет максимального значения. График нарастания тока со временем показан на рис. 1.12.

Умножим уравнение (1.21) на $I\Delta t$ и перепишем его в виде

$$\varepsilon_0 I \Delta t = I^2 R \Delta t + LI \Delta I. \quad (1.22)$$

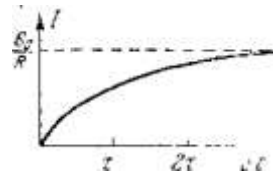


Рис. 1.12. Нарастание тока

Физический смысл полученного уравнения ясен: $\varepsilon_0 I \Delta t$ – работа постоянной ЭДС (см. рис. 1.11) за время Δt , член $I^2 R \Delta t$ – выделенное за то же время тепло, $LI \Delta I$ – работа ЭДС, затраченная на увеличение тока в катушке индуктивности. Эта последняя работа превращается в энергию магнитного поля катушки.

Следовательно, приращение магнитной энергии катушки равно $dW_m = LI dI$. Вся работа, затраченная внешней ЭДС, чтобы довести ток до максимального значения, т. е. на создание магнитного поля в катушке, равна

$$W_m = \int_0^I LI dI .$$

Итак,

$$W_m = \frac{LI^2}{2} . \quad (1.23)$$

Предположим, что в катушке отсутствует ферромагнитный сердечник, иначе L зависел бы от тока.

Аналогично этому, работа силы тяжести, действующей на падающее в жидкости тело, частично превращается в тепло, а частично идет на увеличение кинетической энергии. Формула $E_k = mv^2/2$ вполне аналогична (1.23), и снова отмечаем, что L аналогична массе, а скорость соответствует силе тока.

Если подставить в (1.23) коэффициент самоиндукции соленоида $L = \mu\mu_0 N^2 S/l$ и воспользоваться тем, что в соленоиде $B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 NI/l$, то энергия магнитного поля в соленоиде выразится так:

$$W_m = \frac{BH}{2} V , \quad (1.24)$$

где V – объем, занимаемый полем и равный объему соленоида.

Плотность магнитной энергии, т. е. энергия, приходящаяся на единицу объема, будет

$$\omega_m = \frac{BH}{2}. \quad (1.25)$$

Эта формула вполне аналогична формуле для плотности электрической энергии и относится к любому, не обязательно однородному и постоянному во времени магнитному полю.

1.5. Переменный ток в цепи с индуктивностью и емкостью

Рассмотрим цепь переменного квазистационарного тока, которая содержит последовательно соединенные ЭДС, индуктивность и емкость (рис. 1.13).

На тех участках цепи, где нет ни внешней ЭДС, ни ЭДС самоиндукции, заряды движутся по проводнику под действием потенциального электрического поля. Величина IR представляет собой падение потенциала на сопротивлении цепи R . На конденсаторе тоже будет существовать падение потенциала, равное q/C (q – заряд конденсатора, а C – его емкость). Сумма падений потенциала равна сумме включенной в цепь внешней ЭДС ε и ЭДС самоиндукции $-L\Delta I/\Delta t$:

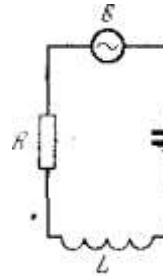


Рис. 1.13. Цепь переменного тока

$$IR + \frac{q}{C} = \varepsilon - L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (1.26)$$

Эти качественные соображения, справедливые для квазистационарного тока, подтверждаются расчетом.

Предположим снова, как в подразделе 1.4, что $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$, а си-

ла тока $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Величина $L \Delta I / \Delta t = L \omega I_0 \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$, т. е. опережает ток на $\pi/2$. Заряд конденсатора q , наоборот, отстает от тока на $\pi/2$. Можно доказать, что

$$q = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{I_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Итак, в присутствии R , C и L должно выполняться равенство

$$I_0 R \cos(\omega t - \varphi) + \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + I_0 L \omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon_0 \cos \omega t.$$

На рис. 1.14 это равенство изображено в виде векторной диаграммы. Три вектора в левой части равенства должны в сумме давать ЭДС. Из рис. 1.14 видно, что все рассуждения 1.4 остаются в силе, надо только вместо $I_0 L \omega$ взять величину $I_0(L\omega - 1/(\omega C))$. Итак, получим

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{Z}, \quad (1.27)$$

где полное сопротивление Z равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (1.28)$$

Выражение $1/(\omega C)$ называется *емкостным* сопротивлением, а вся скобка $L\omega - 1/\omega C$ – *реактивным*, в отличие от активного сопротивле-

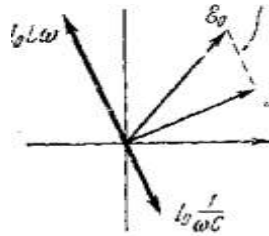


Рис. 1.14. Векторная диаграмма для цепи с индуктивностью и емкостью

ния R .

Сдвиг фаз φ между током и ЭДС, как видно из рис. 1.14, определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (1.29)$$

Если в цепи отсутствует емкость, должны получить формулы (1.13) и (1.14). Переход к этому случаю совершается, если положить $C = \infty$, а не $C = 0$. Отсутствие емкости означает, что пластины конденсатора сближены до соприкосновения (при этом $C = \infty$), а не разведены на большое расстояние (при этом $C = 0$).

Как видно из формулы (1.29), фаза тока может как отставать от фазы ЭДС (если $L\omega > 1/\omega C$), так и опережать ее (если $L\omega < 1/\omega C$).

Для мощности, выделяющейся в цепи, получаем то же выражение (1.15), но косинус сдвига фаз будет теперь уже равен

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1.30)$$

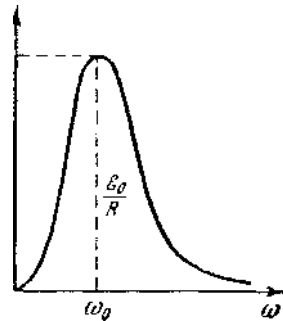


Рис. 1.15. Зависимость амплитуды тока от частоты

Он может стать равным единице, если подобрать индуктивность и емкость цепи так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. При этом амплитуда тока $I_0 = \varepsilon_0/Z$ станет максимальной. Зависимость амплитуды от частоты источника ЭДС показана на рис. 1.15. При условии, что $L\omega = 1/\omega C$, т. е. что частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (1.31)$$

амплитуда максимальна, и ее величина $I_0 = \varepsilon_0/R$ определяется омическим сопротивлением.

Физическая причина резкого возрастания тока при приближении частоты источника ω к $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ заключается в том, что контур с индуктивностью и емкостью способен к собственным электрическим колебаниям, т. е. колебаниям без источника внешней ЭДС. Максимум тока получается при совпадении частоты ЭДС ω с частотой собственных колебаний ω_0 . Такое совпадение называется *резонансом*.

При резонансе источник совершает наибольшую, а не наименьшую работу, что видно из (1.16). При резонансе достигают наибольшего значения сразу две величины в этой формуле: I_0 и $\cos \varphi$. Последняя при резонансе равна единице. Без вычислений ясно, что при резонансе ток максимален и меняется в фазе с ЭДС, поэтому выделяется наибольшее количество тепла.

Контрольные вопросы

1. Приведите закон Ома для участка проводника без ЭДС.
2. Дайте определение сопротивления.
3. Укажите область применимости закона Ома.
4. Какие еще существуют зависимости между током и напряжением участка электрической цепи, кроме закона Ома?
5. Какие силы принято называть сторонними?
6. Приведите закон Ома для всей электрической цепи.
7. Являются ли сторонние силы потенциальными?
8. Сформулируйте первый закон Кирхгофа.
9. Приведите закон непрерывности тока и его уравнение.
10. Укажите связь между законом непрерывности тока и первым законом Кирхгофа для цепи постоянного тока.

11. Сформулируйте второй закон Кирхгофа.
12. Достаточно ли уравнений, полученных с применением законов Кирхгофа, для определения всех токов в электрической цепи?
13. Можно ли обойтись при расчете цепи без законов Кирхгофа?
14. Какой ток называется квазистационарным?
15. Приведите условие квазистационарности тока?
16. Запишите закон Ома для цепи, содержащей индуктивность и источник переменной ЭДС.
17. Как вычисляется электродвижущая сила самоиндукции?
18. Дайте определение полного сопротивления электрической цепи с индуктивностью.
19. Запишите уравнение тепловой мощности электрической цепи с индуктивностью.
20. Какие ток и напряжение измеряются обычными амперметром и вольтметром в цепи переменного тока?
21. Дайте механический аналог задачи об установлении тока при замыкании цепи с постоянной ЭДС.
22. Приведите график нарастания тока со временем в электрической цепи с индуктивностью и постоянной ЭДС.
23. Запишите формулу для энергии магнитного поля в соленоиде.
24. Запишите формулу для плотности магнитной энергии.
25. Представьте цепь переменного тока, которая содержит последовательно соединенные ЭДС, индуктивность и емкость.
26. Дайте определение емкостного сопротивления.
27. Запишите формулу для мощности, выделяющейся в цепи с индуктивностью и емкостью.
28. Объясните способность к собственным электрическим колебаниям электрического контура с индуктивностью и емкостью.
29. Дайте определение резонанса в электрическом контуре с индуктивностью и емкостью.
30. Охарактеризуйте электрические величины электрического контура с индуктивностью и емкостью при резонансе.

2. МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассмотрены матричные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, унифицированы и обобщены алгоритмы построения переходных процессов в различных моделях радиоэлектронных схем. Анализ алгоритмов позволил разработать общий алгоритм матричного метода интегрирования систем дифференциальных уравнений, позволяющий решать задачи анализа радиоэлектронных схем.

2.1. Вычисление функции веса

В общем случае переходные процессы в радиоэлектронных схемах могут быть определены только путем численного интегрирования соответствующей системы дифференциальных уравнений (СДУ). Рассмотрим методы решения СДУ для построения переходных процессов.

Существует множество методов интегрирования СДУ. Матричные методы интегрирования, основанные на вычислении матричной экспоненты, эффективно применяются для интегрирования как жестких, так и нежестких СДУ. Представим алгоритмы матричных методов для решения линейных и нелинейных СДУ.

Линейная неоднородная СДУ с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U, \quad \mathbf{X}_0 = 0, \quad y = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ и \mathbf{X}_0 – векторы состояния и начальных условий; \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы состояния и входа; U – входное воздействие; \mathbf{C} и $y = y(t)$ – матрица и координата выхода. Рассмотрим численное решение СДУ (2.1) на интервале $[0, T_f]$ при L шагах постоянной длины $h = T_f/L$.

Введем дискретные значения моментов времени $t_k = kh$, $k = \overline{0, L}$ и

обозначим $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$, $Y_k = y(t_k)$. В соответствии с (2.1)

$$Y_k = \mathbf{C}\mathbf{X}_k, \quad k = \overline{0, L}. \quad (2.2)$$

Функцией веса линейной модели (2.1) называется реакция $y(t)$ системы на входной сигнал в виде δ -функции $U = \delta(t)$. Функция веса находится по формулам:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}, \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t). \quad (2.3)$$

При $t = h$ имеем

$$\mathbf{X}(h) = e^{\mathbf{A}h}\mathbf{B}. \quad (2.4)$$

Перепишем формулу (2.3), заменяя t на $t + h$:

$$\mathbf{X}(t + h) = e^{\mathbf{A}(t+h)}\mathbf{B} = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}h}\mathbf{B} = e^{\mathbf{A}h}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B},$$

то есть

$$\mathbf{X}(t + h) = e^{\mathbf{A}h}\mathbf{X}(t). \quad (2.5)$$

Матричную экспоненту обозначим

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A}h) = e^{\mathbf{A}h}. \quad (2.6)$$

Таким образом, на основании формул (2.4)–(2.6) приходим к рекуррентным выражениям

$$\mathbf{X}_0 = 0, \quad \mathbf{X}_1 = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A}h)\mathbf{B}, \quad \mathbf{X}_k = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A}h)\mathbf{X}_{k-1}, \quad k = \overline{2, L}. \quad (2.7)$$

Составим алгоритм вычисления функции веса на основании вычисления матричной экспоненты и выражений (2.7) и (2.2).

Алгоритм 2.1. Вычисление функции веса

Входные параметры: \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – матрицы состояния, входа и выхода, T_f и L – конец интервала и число шагов интегрирования.

Выходные параметры: \mathbf{T} и \mathbf{Y} – массивы моментов времени и значений функции веса.

1. Положить $h = T_f/L$, $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A}h)$.

2. Положить $T_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $\mathbf{X} = \Phi \mathbf{B}$, $T_1 = h$, $Y_1 = \mathbf{C}\mathbf{X}$, $k = 2$.

3. Положить $\mathbf{X} = \Phi \mathbf{X}$.

4. Положить $T_k = T_{k-1} + h$, $Y_k = \mathbf{C}\mathbf{X}$.

5. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

6. Остановиться.

Таким образом, вычисление функции веса сводится к вычислению матричной экспоненты.

2.2. Вычисление матричной экспоненты

Точность и трудоемкость матричных методов решения СДУ существенно зависит от точности и трудоемкости вычисления матричной экспоненты или ее интеграла. Модифицируем формулы и приведем алгоритмы вычисления матричной экспоненты и ее интеграла, повышающие точность и снижающие трудоемкость вычислений.

Матричная экспонента представляет собой равномерно сходящийся матричный ряд

$$\Phi(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots, \quad (2.8)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица; \mathbf{E} – единичная матрица.

Для ускорения сходимости ряда (2.8) при большой норме матрицы $\|\mathbf{A}\|$ зададим малое число $\varepsilon > 0$, определим положительное целое

$$l = \min\{k \mid \|\mathbf{A}\|/2^k < \varepsilon\} \quad (2.9)$$

и перейдем к матрице

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}/2^l, \quad (2.10)$$

для которой $\|\mathbf{B}\| < \varepsilon$. Тогда, вычислив матричную экспоненту $\Phi_0 = \Phi(\mathbf{B})$ и применив рекуррентную формулу

$$\Phi_k = \Phi(2^k \mathbf{B}) = \Phi_{k-1}^2, \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.11)$$

получим искомую матричную экспоненту $\varphi(\mathbf{A}) = \varphi_l$. Применение формулы (2.11) при больших значениях l приводит к существенному накоплению погрешности. Для уменьшения погрешности округления вводят матричную функцию $\psi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A}) - \mathbf{E}$. В этом случае, задавая $\delta > 0$ и ограничиваясь конечным числом членов матричного ряда, вычислим

$$\psi_0 = \psi(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{B}^i}{i!}, \quad (2.12)$$

где

$$m = \min \left\{ i \mid \left\| \frac{\mathbf{B}^i}{i!} \right\| / \|\psi_0\| < \delta \right\}. \quad (2.13)$$

Учитывая формулу (2.11), получим рекуррентное соотношение

$$\psi_k = \psi_{k-1}(2\mathbf{E} + \psi_{k-1}), \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.14)$$

где $\psi_k = \varphi(2^k \mathbf{B}) - \mathbf{E}$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{E} + \psi_l. \quad (2.15)$$

Положительные числа ε и δ , определяющие объем и точность вычислений, были определены на основании вычислительных экспериментов. Полученные оптимальные по точности и трудоемкости значения составили $\varepsilon = 0,1$, $\delta = 10^{-12}$. По выражениям (2.9), (2.10), (2.12)–(2.15) составим алгоритм вычисления матричной экспоненты матрицы \mathbf{A} , реализующий функцию $\varphi(\mathbf{A})$.

Алгоритм 2.2. Вычисление матричной экспоненты

Входной параметр: \mathbf{A} – квадратная матрица.

Выходной параметр: φ – матричная экспонента.

1. Положить $\varepsilon = 0,1$, $\delta = 10^{-12}$, $N_A = \|\mathbf{A}\|$.

2. Если $N_A < \varepsilon$, положить $l = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, иначе, вычислить

$$l = \lceil \log_2(N_A/\varepsilon) \rceil, \mathbf{B} = \mathbf{A}/2^l.$$

3. Положить $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{B}$, $\mathbf{C} = \mathbf{B}$, $i = 1$.

4. Если $\|\mathbf{C}\| > \delta \|\boldsymbol{\varphi}\|$, положить $i = i + 1$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{B}/i$, $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{C}$, иначе, перейти к п. 6.

5. Перейти к п. 4.

6. Положить $\mathbf{D} = 2\mathbf{E}$, $i = 1$.

7. Если $l = 0$, перейти к п. 10.

8. Положить $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{D} + \boldsymbol{\varphi})$, $i = i + 1$.

9. Если $i < l$, перейти к п. 8.

10. Положить $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varphi}$.

11. Остановиться.

Матричную экспоненту в формуле (2.6) вычислим по этому алгоритму, заменяя в нем матрицу \mathbf{A} матрицей $\mathbf{A}h$.

2.3. Вычисление переходной функции

Переходной функцией системы (2.1) называется реакция $y(t)$ на входной сигнал в виде единичной функции $U = 1(t)$. Переходная функция находится по формулам

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}, \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t). \quad (2.16)$$

Положим в этой формуле t равным $t + h$:

$$\mathbf{X}(t + h) = e^{\mathbf{A}(t+h)} \mathbf{X}_0 + \int_0^{t+h} e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}. \quad (2.17)$$

Умножая (2.16) на $e^{\mathbf{A}h}$ и вычитая полученное выражение из (2.17), имеем:

$$\mathbf{X}(t+h) = e^{\mathbf{A}h}\mathbf{X}(t) + \int_0^h e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}. \quad (2.18)$$

Матричную экспоненту (2.6) и ее интеграл

$$\Phi(\mathbf{A}, h) = \int_0^h e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (2.19)$$

вычислим алгоритмами 2.2 и 2.4. Обозначая

$$\mathbf{g} = \Phi(\mathbf{A}, h)\mathbf{B}, \quad (2.20)$$

перепишем формулу (2.18):

$$\mathbf{X}(t+h) = \varphi(\mathbf{A}h)\mathbf{X}(t) + \mathbf{g}. \quad (2.21)$$

Переходя к дискретным моментам времени, по формуле (2.21) получим рекуррентные выражения

$$\mathbf{X}_0 = 0, \quad \mathbf{X}_k = \varphi(\mathbf{A}h)\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{g}, \quad k = \overline{1, L}. \quad (2.22)$$

Составим алгоритм вычисления переходной функции методом матричной экспоненты и ее интеграла по формулам (2.20), (2.22) и (2.2).

Алгоритм 2.3. Вычисление переходной функции

Входные параметры: \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – матрицы состояния, входа и выхода, T_f и L – конец интервала и число шагов интегрирования.

Выходные параметры: \mathbf{T} и \mathbf{Y} – массивы моментов времени и значений переходной функции.

1. Положить $h = T_f/L$, $\mathbf{X} = 0$, $(\varphi, \mathbf{g}) = \text{ExpVec}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, h)$.

2. Положить $T_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $k = 1$.

3. Положить $\mathbf{X} = \varphi\mathbf{X} + \mathbf{g}$.

4. Положить $T_k = T_{k-1} + h$, $Y_k = \mathbf{C}\mathbf{X}$.

5. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

6. Остановиться.

Здесь постоянные параметры выражений (2.22) – матрицу $\Phi(\mathbf{A}h)$ и вектор \mathbf{g} целесообразно вычислять с помощью единого алгоритма 2.5, реализующего функцию $(\Phi, \mathbf{g}) = \text{ExpVec}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, h)$.

2.4. Методы вычисления матричной экспоненты и ее интеграла

Подставляя в выражение (2.8) $\mathbf{A}t$ вместо \mathbf{A} и интегрируя его от 0 до h , получим матричный ряд для интеграла матричной экспоненты:

$$\Phi(\mathbf{A}, h) = \int_0^h e^{\mathbf{A}t} dt = h \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}h}{2!} + \frac{(\mathbf{A}h)^2}{3!} + \frac{(\mathbf{A}h)^3}{4!} + \dots \right]. \quad (2.23)$$

Для ускорения сходимости ряда (2.23) при большой норме $\|\mathbf{A}h\|$ зададим $\varepsilon > 0$, определим положительное целое число

$$l = \min \{ k \mid \|\mathbf{A}h\|/2^k < \varepsilon \} \quad (2.24)$$

и обозначим $s = h/2^l$. Задавая $\delta > 0$ и учитывая конечное число слагаемых матричного ряда (2.23), вычислим

$$\Phi_0 = \Phi(\mathbf{A}, s) = s \sum_{i=0}^m \frac{(\mathbf{A}s)^i}{(i+1)!}, \quad (2.25)$$

где

$$m = \min \left\{ i \mid \left\| \frac{(\mathbf{A}s)^i}{(i+1)!} \right\| / \|\Phi_0\| < \delta \right\}. \quad (2.26)$$

Полагая

$$\Phi_0 = \mathbf{E} + \mathbf{A}\Phi_0, \quad (2.27)$$

перейдем от матрицы $\Phi_0 = \Phi(\mathbf{A}, s)$ к матрице $\Phi_l = \Phi(\mathbf{A}, h)$ по рекур-

рентным соотношениям:

$$\Phi_k = \Phi_{k-1}(E + \varphi_{k-1}), \quad \varphi_k = \varphi_{k-1}^2, \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.28)$$

где

$$\Phi_k = \Phi(\mathbf{A}, 2^k s), \quad \varphi_k = \varphi(\mathbf{A}2^k s) = e^{\mathbf{A}2^k s}.$$

По выражениям (2.24)–(2.28) составим алгоритм вычисления интеграла матричной экспоненты с матрицей \mathbf{A} и верхним пределом интегрирования h , реализующий функцию $\Phi(\mathbf{A}, h)$.

Алгоритм 2.4. Вычисление интеграла матричной экспоненты

Входные параметры: \mathbf{A} – квадратная матрица, h – верхний предел интегрирования.

Выходной параметр: Φ – интеграл матричной экспоненты.

1. Положить $\varepsilon = 0,1$, $\delta = 10^{-12}$, $N_A = \|\mathbf{A}\|$.
2. Если $N_A h < \varepsilon$, положить $l = 0$, $s = h$, иначе, вычислить $l = \lceil \log_2(N_A h / \varepsilon) \rceil$, $s = h/2^l$.
3. Положить $\mathbf{B} = \mathbf{A}s$, $\mathbf{C} = 0,5\mathbf{B}$, $\Phi = \mathbf{E} + \mathbf{C}$, $i = 2$.
4. Если $\|\mathbf{C}\| > \delta\|\Phi\|$, положить $i = i + 1$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{B}/i$, $\Phi = \Phi + \mathbf{C}$, иначе, перейти к п. 6.
5. Перейти к п. 4.
6. Положить $\Phi = s\Phi$, $\varphi = \mathbf{E} + \mathbf{A}\Phi$, $i = 1$.
7. Если $l = 0$, перейти к п. 10.
8. Положить $\Phi = \Phi(\mathbf{E} + \varphi)$, $\varphi = \varphi\varphi$, $i = i + 1$.
9. Если $i < l$, перейти к п. 8.
10. Остановиться.

При вычислении переходной функции по формуле (2.22) одновременно используются матричная экспонента $\varphi(\mathbf{A}h)$ и ее интеграл $\Phi(\mathbf{A}, h)$, по которым вычисляется вектор $\mathbf{g} = \Phi(\mathbf{A}, h)\mathbf{B}$. Однако в этом случае вместо применения формул (2.28) вектор \mathbf{g} и матричную экс-

поненту Φ проще вычислять по менее трудоемким рекуррентным формулам:

$$\mathbf{g}_0 = \Phi_0 \mathbf{B}, \quad \mathbf{g}_k = (\mathbf{E} + \Phi_{k-1}) \mathbf{g}_{k-1}, \quad \Phi_k = \Phi_{k-1}^2, \quad k = \overline{1, l}.$$

По выражениям (2.24)–(2.28) составим алгоритм вычисления параметров для переходной функции, реализующий функцию $(\Phi, \mathbf{g}) = \text{ExpVec}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, h)$.

Алгоритм 2.5. Параметры вычисления переходной функции

Входные параметры: \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы состояния и входа, h – шаг интегрирования. Выходные параметры: Φ – матричная экспонента, \mathbf{g} – произведение интеграла матричной экспоненты на матрицу входа.

1. Положить $\varepsilon = 0,1$, $\delta = 10^{-12}$, $N_A = \|\mathbf{A}\|$.
2. Если $N_A h < \varepsilon$, положить $l = 0$, $s = h$, иначе, вычислить $l = \lceil \log_2(N_A h / \varepsilon) \rceil$, $s = h / 2^l$.
3. Положить $\mathbf{B} = \mathbf{A}s$, $\mathbf{C} = 0,5\mathbf{B}$, $\Phi = \mathbf{E} + \mathbf{C}$, $i = 2$.
4. Если $\|\mathbf{C}\| > \delta \|\Phi\|$, положить $i = i + 1$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{B}/i$, $\Phi = \Phi + \mathbf{C}$, иначе, перейти к п. 6.
5. Перейти к п. 4.
6. Положить $\Phi = s\Phi$, $\varphi = \mathbf{E} + \mathbf{A}\Phi$, $\mathbf{g} = \Phi\mathbf{B}$, $i = 1$.
7. Если $l = 0$, перейти к п. 10.
8. Положить $\mathbf{g} = (\mathbf{E} + \Phi)\mathbf{g}$, $\Phi = \Phi\Phi$, $i = i + 1$.
9. Если $i < l$, перейти к п. 8.
10. Остановиться.

Алгоритмы 2.2, 2.4, 2.5 применяются в матричных методах решения СДУ для вычисления переходных процессов.

2.5. Решение однородных систем дифференциальных уравнений

Частным случаем модели (2.1) является линейная однородная СДУ с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}_0 = 0, \quad y = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (2.29)$$

где $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ и \mathbf{X}_0 – векторы состояния и начальных условий; \mathbf{A} – матрица состояния; \mathbf{C} и $y = y(t)$ – матрица и координата выхода. Решение этой системы находится по формуле:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}_0. \quad (2.30)$$

Рассмотрим решение СДУ (2.29) на интервале $[0, T_f]$ при L шагах постоянной длины $h = T_f/L$. Введем значения моментов времени $t_k = kh$, $k = \overline{0, L}$ и обозначим $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k)$. Положим в формуле (2.30) t равным $t+h$:

$$\mathbf{X}(t+h) = e^{\mathbf{A}(t+h)} \mathbf{X}_0. \quad (2.31)$$

Умножая равенство (2.30) на $e^{\mathbf{A}h}$ и вычитая полученное выражение из равенства (2.31), имеем:

$$\mathbf{X}(t+h) = e^{\mathbf{A}h} \mathbf{X}(t). \quad (2.32)$$

Обозначая $\Phi(\mathbf{A}h) = e^{\mathbf{A}h}$, перепишем (2.32) для дискретных моментов времени:

$$\mathbf{X}_k = \Phi(\mathbf{A}h) \mathbf{X}_{k-1}, \quad k = \overline{1, L}. \quad (2.33)$$

По (2.33) составим алгоритм метода матричной экспоненты интегрирования СДУ (2.29), где матричная экспонента вычисляется по алгоритму 2.2.

Алгоритм 2.6. Метод матричной экспоненты

Входные параметры: \mathbf{A} и \mathbf{C} – матрицы состояния и выхода; T_f и L – конец интервала и число шагов интегрирования.

Выходные параметры: \mathbf{T} и \mathbf{Y} – массивы моментов времени и значений переходного процесса.

1. Положить $h = T_f / L$, $\mathbf{X} = 0$, $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A}h)$.
2. Положить $T_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $k = 1$.
3. Положить $\mathbf{X} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{X}$.
4. Положить $T_k = T_{k-1} + h$, $Y_k = \mathbf{C}\mathbf{X}$.
5. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.
6. Остановиться.

2.6. Решение нелинейных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим нелинейную СДУ общего вида Коши

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, U), \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0), \quad (2.34)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{X}, U)$ – векторная функция правых частей СДУ. Для решения такой СДУ применим матричные системные методы. Рекуррентная формула системного метода первой степени имеет вид:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1} + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A}, h)\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, U), \quad k = \overline{1, L}, \quad (2.35)$$

где $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{A}, h)$ – интеграл матричной экспоненты (2.19). Здесь $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X})$ – якобиан векторной функции правых частей СДУ. На основании формулы (2.35) составим алгоритм системного метода первой степени.

Алгоритм 2.7. Системный метод первой степени

Входные параметры: $\mathbf{f}(\mathbf{X}, U)$ – векторная функция правых частей

СДУ, \mathbf{C} – матрица выхода, T_f и L – конец интервала и число шагов интегрирования.

Выходные параметры: \mathbf{T} и \mathbf{Y} – массивы моментов времени и значений переходного процесса.

1. Положить $h = T_f / L$, $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X})$, $\Phi = \Phi(\mathbf{A}, h)$.
2. Положить $T_0 = 0$, $Y_0 = \mathbf{0}$, $k = 1$.
3. Положить $\mathbf{f}_X = \mathbf{f}(\mathbf{X}, U)$, $\mathbf{X} = \mathbf{X} + \Phi \mathbf{f}_X$.
4. Положить $T_k = T_{k-1} + h$, $Y_k = \mathbf{C}\mathbf{X}$.
5. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.
6. Остановиться.

Составим алгоритм вычисления якобиана, реализующий функцию $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{X})$.

Алгоритм 2.8. Вычисление якобиана

Входные параметры: $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ – векторная функция правых частей СДУ, \mathbf{X} – вектор-столбец значений переменных.

Выходной параметр: \mathbf{J} – якобиан.

1. Положить $n = \dim X$, $l = 12$, $d_{\min} = 10^{-20}$.
2. Вычислить $\mathbf{f}_X = \mathbf{f}(\mathbf{X})$.
3. Вычислить $f_{\max} = \max_j |f_{Xj}|$, $\alpha = 10^l \varepsilon_m$, $d_f = \alpha f_{\max}$.
4. Положить $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$, $i = 1$.
5. Вычислить $d = \alpha X_i$.
6. Если $d < d_f$, положить $d = d_f$.
7. Если $d < d_{\min}$, положить $d = d_{\min}$.
8. Положить $Y_i = X_i + d$.
9. Вычислить $\mathbf{f}_Y = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$.
10. Положить $\mathbf{J}_i = (\mathbf{f}_Y - \mathbf{f}_X) / d$, $Y_i = X_i$.
11. Если $i < n$, положить $i = i + 1$ и перейти к п. 5.
12. Остановиться.

В этом алгоритме операция $\dim \mathbf{X}$ выдает размерность вектора \mathbf{X} , параметр l задает количество желаемых верных знаков элементов якобиана, параметр d определяет приращение независимых переменных, \mathbf{J}_i обозначает столбец якобиана с номером i . Приращение независимых переменных вычисляется с учетом значений этих переменных, предполагаемого значения максимального модуля элемента якобиана, максимального модуля элемента значения векторной функции и ограничивается снизу для предотвращения деления на нуль.

Системный метод второй степени применяется для решения СДУ (2.34) и основан на формулах:

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k-1}, U), \quad K_2 = f[\mathbf{X}_{k-1} + \Phi(\mathbf{A}, h/2)K_1, U],$$

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1} + \Phi(\mathbf{A}, h/2)[2K_2 - \mathbf{A}\Phi(\mathbf{A}, h/2)K_1], \quad k = \overline{1, L},$$

где

$$\Phi(\mathbf{A}, h/2) = \int_0^{h/2} e^{\mathbf{A}t} dt,$$

$\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X})$ – якобиан правых частей СДУ. Составим алгоритм этого метода.

Алгоритм 2.9. Системный метод второй степени

Входные параметры: $f(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ – векторная функция правых частей СДУ, \mathbf{C} – матрица выхода, T_f и L – конец интервала и число шагов интегрирования.

Выходные параметры: T и Y – массивы моментов времени и значений переходного процесса.

1. Положить $h = T_f / L$, $\mathbf{X} = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{X})$, $\Phi = \Phi(\mathbf{A}, h/2)$,
 $\mathbf{A} = \mathbf{A}\Phi$.

2. Положить $T_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $k = 1$.

3. Положить $\mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{X}, U)$, $\mathbf{K}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{X} + \Phi\mathbf{K}_1, U)$,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} + \Phi(2\mathbf{K}_2 - \mathbf{AK}_1).$$

4. Положить $T_k = T_{k-1} + h$, $Y_k = \mathbf{CX}$.

5. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

6. Остановиться.

2.7. Общий алгоритм матричных методов

Алгоритмы рассмотренных матричных методов решения СДУ отличаются шагами 1, 3, состоят из начальной части с вычислением матричных параметров метода и итерационной части с вычислением значений вектора переменных состояния. На основании алгоритмов 2.1, 2.3, 2.6, 2.7, 2.9 составим общий алгоритм матричных методов интегрирования с постоянным шагом.

Алгоритм 2.10. Матричный метод интегрирования

Входные параметры: \mathbf{S} – СДУ, \mathbf{C} – матрица выхода, T_f и L – конец интервала и число шагов интегрирования.

Выходные параметры: \mathbf{T} и \mathbf{Y} – массивы моментов времени и значений переходного процесса.

1. Положить $h = T_f / L$, $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, $\mathbf{P} = \text{Start}(\mathbf{S}, h, \mathbf{X})$.

2. Положить $T_0 = 0$, $Y_0 = \mathbf{0}$, $k = 1$.

3. Положить $\mathbf{X} = \text{Step}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$.

4. Положить $T_k = T_{k-1} + h$, $Y_k = \mathbf{CX}$.

5. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

6. Остановиться.

Функция $\mathbf{P} = \text{Start}(\mathbf{S}, h, \mathbf{X})$ вычисляет массив матричных параметров метода интегрирования: для алгоритма 2.3 $\mathbf{P} = \{\boldsymbol{\phi}, \mathbf{g}\}$. Функция $\mathbf{X} = \text{Step}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$ вычисляет вектор переменных интегрирования на одном шаге. Начальная часть алгоритма реализуется шагами 1–2, а итерационная часть – шагами 3–5.

Таким образом, разработаны алгоритмы матричных методов решения линейных и нелинейных СДУ, применимые также для решения жестких систем, характеризующихся большим числом обусловленности якобиана векторной функции правых частей СДУ.

Применим представленные численные методы интегрирования и их алгоритмы к вычислению прямых показателей качества переходных процессов в схемах радиоэлектроники.

Контрольные вопросы

1. Запишите линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Дайте определение функции веса линейной модели.
3. Запишите формулы для вычисления функции веса линейной модели.
4. Составьте алгоритм для вычисления функции веса линейной модели.
5. Представьте матричную экспоненту в виде матричного ряда.
6. Запишите формулы для вычисления матричной экспоненты.
7. Составьте алгоритм для вычисления матричной экспоненты.
8. Дайте определение переходной функции для линейной модели.
9. Запишите формулы для вычисления переходной функции линейной модели.
10. Составьте алгоритм для вычисления переходной функции линейной модели.
11. Запишите формулы для вычисления интеграла матричной экспоненты.
12. Составьте алгоритм для вычисления интеграла матричной экспоненты.
13. Составьте алгоритм вычисления параметров переходной функции для матричного метода интегрирования.
14. Запишите линейную однородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

15. Запишите формулы для решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

16. Составьте алгоритм решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

17. Запишите нелинейную систему дифференциальных уравнений в общем виде.

18. Запишите формулы для решения нелинейной системы дифференциальных уравнений системным методом первой степени.

19. Составьте алгоритм решения нелинейной системы дифференциальных уравнений системным методом первой степени.

20. Дайте определение якобиана векторной функции.

21. Составьте алгоритм вычисления якобиана векторной функции.

22. Запишите формулы для решения нелинейной системы дифференциальных уравнений системным методом второй степени.

23. Составьте алгоритм решения нелинейной системы дифференциальных уравнений системным методом второй степени.

24. Что общего в алгоритмах матричных методов решения систем дифференциальных уравнений и чем они отличаются?

25. Составьте общий алгоритм решения систем дифференциальных уравнений матричными методами интегрирования.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЯМЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА

На основании алгоритмов построения переходных процессов и квадратичной интерполяции упрощены формулы и предложены алгоритмы вычисления массива экстремумов переходной и весовой функций радиоэлектронных схем. Предложены формулы вычисления показателей отклонения и колебательности по массивам экстремумов переходной и весовой функций, вычисления времени переходных процессов в радиоэлектронных схемах. Предложены формулы вычисления прямых критериев оптимальности радиоэлектронных схем. На основании алгоритмов вычисления массива экстремумов и времени процесса предложен алгоритм вычисления вектора прямых критериев в виде единого для всех критериев вычислительного процесса.

3.1. Вычисление экстремумов переходного процесса

Вычисление прямых показателей качества (ППК) схем радиоэлектроники связано с вычислением экстремумов переходных процессов. Рассмотрим вычисление экстремумов переходной и весовой функций.

Пусть $y(t)$ – переходная или весовая функция с начальным значением $y_0 = y(0)$ и установившимся конечным значением $y_\infty = y(\infty)$. Начальное значение для обеих функций $y_0 = 0$, конечное значение переходной функции $y_\infty = 1$, а функции веса – $y_\infty = 0$. Массив моментов времени $\mathbf{T} = (T_0, T_1, \dots, T_L)$ и массив соответствующих им значений переходной и весовой функций $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_L)$ вычислим алгоритмами 2.1 и 2.3 до момента времени T_f , после которого значения функций можно считать постоянными.

Рассмотрим отклонение функций от установившегося значения

$$z(t) = y(t) - y_\infty. \quad (3.1)$$

Для переходной функции $z(0) = -1$, для функции веса $z(0) = 0$, для обеих функций $z(\infty) = 0$. Перейдем от массива \mathbf{Y} к массиву отклонений $\mathbf{Z} = (Z_0, Z_1, \dots, Z_L)$ по формуле (3.1): $Z_k = Y_k - \overline{y_\infty}$, $k = \overline{0, L}$. Характерные точки кривой $z(t)$, определяющие ППК, можно вычислить аппроксимацией этих точек по массивам \mathbf{T} и \mathbf{Z} с использованием различных интерполяционных многочленов, например многочленов Лагранжа. Чем выше степень многочлена, тем выше точность интерполяции. Однако при высокой степени многочлена затрудняется определение значений координат характерных точек, требующее решения алгебраических уравнений. Поэтому применим квадратичную интерполяцию, а невысокую ее точность скомпенсируем уменьшением шага интегрирования.

Последовательно для $k = \overline{2, L}$ найдем $u_{lk} = Z_{k-2} - Z_{k-1}$, $u_{rk} = Z_k - Z_{k-1}$. Если для некоторого k будет выполняться неравенство $u_{lk}u_{rk} > 0$, то интервал $[T_{k-2}, T_k]$ содержит экстремум с номером i и точки (T_{k-2}, Z_{k-2}) , (T_{k-1}, Z_{k-1}) , (T_k, Z_k) можно использовать в квадратичной интерполяции, $i = \overline{1, m}$, m – число экстремумов. Для повышения точности машинных вычислений перейдем от координат t и z к относительным координатам $v = t - T_{k-1}$ и $u = z - Z_{k-1}$. Парабола, проходящая через среднюю точку (T_{k-1}, Z_{k-1}) , в новых координатах имеет уравнение

$$u = \alpha_{1k}v + \alpha_{2k}v^2. \quad (3.2)$$

Обозначая

$$v_{lk} = T_{k-2} - T_{k-1}, \quad v_{rk} = T_k - T_{k-1}, \quad u_{lk} = Z_{k-2} - Z_{k-1}, \quad u_{rk} = Z_k - Z_{k-1}, \quad (3.3)$$

для коэффициентов α_{1k} и α_{2k} параболы (3.2) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{1k}v_{lk} + \alpha_{2k}v_{lk}^2 = u_{lk}, \\ \alpha_{1k}v_{rk} + \alpha_{2k}v_{rk}^2 = u_{rk}, \end{cases}$$

решая которую найдем

$$\alpha_{1k} = D_{1k}/D_k, \quad \alpha_{2k} = D_{2k}/D_k. \quad (3.4)$$

С обозначениями (3.3)

$$D_k = v_{lk}v_{rk}(v_{rk} - v_{lk}), \quad D_{1k} = p_kv_{rk} - q_kv_{lk}, \quad D_{2k} = q_k - p_k, \quad (3.5)$$

$$p_k = u_{lk}v_{rk}, \quad q_k = u_{rk}v_{lk}. \quad (3.6)$$

Экстремум принадлежит интервалу $[T_{k-2}, T_k]$, если выполняется условие

$$u_{lk}u_{rk} > 0. \quad (3.7)$$

Аппроксимируя кривую $z(t)$ в окрестности экстремума параболой (3.2), дифференцируя ее уравнение по v и приравнивая нулю полученную производную, с учетом (3.4) вычислим значение координат i -го экстремума:

$$v_{ei} = -\alpha_{1k}/(2\alpha_{2k}) = -D_{1k}/(2D_{2k}), \quad Z_{ei} = Z_{k-1} + v_{ei}(\alpha_{1k} + \alpha_{2k}v_{ei}).$$

Подставляя выражения (3.4), после преобразований получим

$$Z_{ei} = Z_{k-1} - D_{1k}^2/(4D_kD_{2k}). \quad (3.8)$$

Для методов интегрирования с постоянным шагом h формулы вычисления экстремумов упрощаются. В этом случае в обозначениях (3.3) $v_{lk} = -h$, $v_{rk} = h$ и вместо формул (3.5) получим:

$$D_k = -2h^3, \quad D_{1k} = (u_{lk} - u_{rk})h^2, \quad D_{2k} = -(u_{lk} + u_{rk})h. \quad (3.9)$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.8), имеем

$$Z_{ei} = Z_{k-1} - (u_{lk} - u_{rk})^2 / [8(u_{lk} + u_{rk})].$$

Перепишем последнюю формулу в виде

$$Z_{ei} = Z_{k-1} - d_k r_k / 2, \quad (3.10)$$

где

$$d_k = (u_{lk} - u_{rk}) / 2, \quad s_k = u_{lk} + u_{rk}, \quad r_k = d_{uk} / s_{uk}. \quad (3.11)$$

На основании алгоритма 2.10 общего матричного метода интегрирования с постоянным шагом по формулам (3.3), (3.7), (3.10) и (3.11) составим алгоритм вычисления массива экстремумов при постоянном шаге.

Алгоритм 3.1. Вычисление массива экстремумов при постоянном шаге

Входные параметры: **S** – СДУ, **C** – матрица наблюдения, T_f и L – конец интервала и число шагов интегрирования, y_∞ – установившееся значение процесса.

Выходной параметр: **E** – массив экстремумов.

1. Положить $h = T_f / L$, $\mathbf{X} = 0$, $\mathbf{P} = \text{Start}(\mathbf{S}, h, \mathbf{X})$.
2. Положить $Z_0 = -y_\infty$, $\mathbf{X} = \text{Step}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$, $Z_1 = \mathbf{C}\mathbf{X} - y_\infty$.
3. Положить $\mathbf{E} = \emptyset$, $k = 2$.
4. Положить $\mathbf{X} = \text{Step}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$, $Z_2 = \mathbf{C}\mathbf{X} - y_\infty$.
5. Вычислить $u_l = Z_0 - Z_1$, $u_r = Z_2 - Z_1$.
6. Если $u_l u_r > 0$, положить $d = (u_l - u_r) / 2$, $s = u_l + u_r$, $r = d / s$, $Z_e = Z_1 - dr / 2$, $\mathbf{E} = (\mathbf{E}, Z_e)$.
7. Положить $Z_0 = Z_1$, $Z_1 = Z_2$.
8. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 4.
9. Остановиться.

До вычисления первого экстремума массив **E** пустой, а с каждым новым значением экстремума он расширяется. Размерность массива $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ значений экстремумов переходной функции

$m = \dim \mathbf{E}$ равна числу экстремумов переходной или весовой функции в интервале времени $[0, T_f]$. Если массив \mathbf{E} пустой, положим $m = 0$. При условии, что в рассматриваемом интервале времени переходный процесс практически завершился, число m позволяет судить о характере переходной или весовой функции.

3.2. Вычисление показателей отклонения и колебательности

Максимальное отклонение и показатели колебательности являются важнейшими прямыми показателями качества переходных процессов в радиоэлектронных схемах. Рассмотрим вычисление этих показателей для переходной и весовой функций по экстремумам этих функций.

Покажем, как с помощью массива экстремумов \mathbf{E} вычислить показатели максимального отклонения и колебательности. Если $m > 0$, найдем максимальный элемент массива $E_{\max} = \max_i E_i$. Для переходной функции определим перерегулирование

$$\sigma = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ \lfloor E_{\max} \rfloor, & m > 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Здесь применяется операция срезки $\lfloor x \rfloor$ величины x : $\lfloor x \rfloor = \max\{x, 0\}$.

Для функции веса определим максимальное отклонение:

$$\sigma = \max_i |E_i|. \quad (3.13)$$

Показатели колебательности можно определить различными способами. Например, показатель колебательности переходной функции определим как максимальный размах колебаний по формуле

$$\zeta = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \\ \max_i |E_{2i-1} - E_{2i}|, & m > 1, i = 1, \overline{[m/2]}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Показатель затухания колебаний переходной функции определим как максимум отношения амплитуд $A_i = |E_i|$:

$$\lambda = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, \\ \max_i \{A_i/A_{i-1}\}, & m > 1, i = \overline{2, m}. \end{cases} \quad (3.15)$$

В отличие от переходной функции функция веса устойчивой системы всегда имеет хотя бы один экстремум. Поэтому при вычислении показателей колебательности функции веса первый экстремум не будем учитывать. Аналогично формулам (3.14), (3.15) определим показатели колебательности функции веса:

$$\zeta = \begin{cases} 0, & m = \overline{0, 2}, \\ \max_i |E_{2i} - E_{2i+1}|, & m > 2, i = \overline{1, [(m-1)/2]}, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & m = \overline{0, 2}, \\ \max_i \{A_i/A_{i-1}\}, & m > 2, i = \overline{3, m}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Таким образом, формулы (3.12)–(3.17) совместно с алгоритмом 3.1 позволяют вычислить показатели отклонения и колебательности переходной и весовой функций. Перейдем к вычислению времени переходного процесса.

3.3. Вычисление времени переходного процесса

Время переходного процесса определяет такую важную характеристику радиоэлектронной схемы, как быстродействие. Рассмотрим задачу вычисления времени процесса на примерах переходной и весовой функций.

Пусть $y(t)$ – переходная или весовая функция радиоэлектронной схемы. Перейдем к отклонению $z(t)$ функций от установившегося значения по формуле (3.1). Время процесса t_c определяется макси-

мальным моментом времени попадания отклонения $z(t)$ в заданный интервал $[-\delta_z, \delta_z]$, что соответствует условиям:

$$|z(t_c)| = \delta_z, \quad t > t_c \Rightarrow |z(t)| < \delta_z.$$

Параметр интервала времени процесса δ_z определяется необходимой статической точностью схемы. Для асимптотически устойчивых схем

$$t_c = \max\{t \mid |z(t)| = \delta_z, t \in [0, \infty)\}. \quad (3.18)$$

Поскольку моментов времени попадания кривой $z(t)$ в заданный интервал может быть несколько, обозначим их через t_i , где i – номер момента, $i = \overline{1, n_i}$, n_i – число таких моментов. Как и координаты экстремумов, моменты t_i найдем параболической интерполяцией участков кривой $z(t)$ по трем ее последовательным точкам (T_{k-2}, Z_{k-2}) , (T_{k-1}, Z_{k-1}) , (T_k, Z_k) , полученным численным интегрированием. Момент времени попадания отклонения $z(t)$ в заданный интервал $[-\delta_z, \delta_z]$ принадлежит интервалу $[T_{k-1}, T_k]$, если

$$|Z_{k-1}| \geq \delta_z \wedge |Z_k| < \delta_z. \quad (3.19)$$

Обозначая

$$v_i = t_i - T_{k-1}, \quad u_i = \delta_z \operatorname{sign} Z_{k-1} - Z_{k-1} \quad (3.20)$$

и аппроксимируя $z(t)$ в интервале $[T_{k-2}, T_k]$ параболой (3.2), получим для вычисления v_i квадратное уравнение

$$\alpha_{2k} v_i^2 + \alpha_{1k} v_i = u_i.$$

Если окажется, что $\alpha_{2k} = 0$ или $D_{2k} = 0$, то есть три точки лежат на одной прямой, то $v_i = u_i / \alpha_{1k}$, или

$$v_i = u_i D_k / D_{1k}. \quad (3.21)$$

Если же $\alpha_{2k} \neq 0$, то решением квадратного уравнения найдем два значения

$$v_{i1} = v_{0i} + S_i, \quad v_{i2} = v_{0i} - S_i, \quad (3.22)$$

где

$$v_{0i} = -\alpha_{1k}/(2\alpha_{2k}), \quad S_i = \sqrt{v_{0i}^2 + u_i/\alpha_{2k}},$$

или по (3.4)

$$v_{0i} = -D_{1k}/(2D_{2k}), \quad S_i = \sqrt{v_{0i}^2 + u_i D_k/D_{2k}}. \quad (3.23)$$

Выберем из двух значений v_{i1} и v_{i2} значение v_i , удовлетворяющее условию

$$0 \leq v_i \leq v_r. \quad (3.24)$$

Если $v_{0i} \leq 0$, то $v_i = v_{0i} + S_i$. Если же $v_{0i} > 0$, то $v_i = v_{0i} - S_i$. Момент времени пересечения заданного значения функции u_i определим как

$$t_i = T_{k-1} + v_i. \quad (3.25)$$

Применение метода интегрирования с постоянным шагом h позволяет упростить формулы вычисления времени регулирования. В этом случае в обозначениях (3.4) вместо формул для определителей (3.5) применим формулы (3.9). Если $D_{2k} = 0$, то есть $u_{lk} + u_{rk} = 0$, то вместо (3.21) получим

$$v_i = -2u_i h / (u_{lk} - u_{rk}). \quad (3.26)$$

Если же $u_{lk} + u_{rk} \neq 0$, то вычислим

$$v_{0i} = \frac{u_{lk} - u_{rk}}{2(u_{lk} + u_{rk})} h, \quad S_i = h \sqrt{\frac{(u_{lk} - u_{rk})^2}{4(u_{lk} + u_{rk})^2} + \frac{2u_i}{u_{lk} + u_{rk}}}. \quad (3.27)$$

С обозначениями (3.11) перепишем формулы (3.26) и (3.27) в виде:

$$v_i = -hu_i/d_k, \quad v_{0i} = r_k h, \quad S_i = h\sqrt{r_k^2 + 2u_i/s_k}. \quad (3.28)$$

В соответствии с (3.18) время процесса определим как

$$v_i = \begin{cases} v_{0i} + S_i, & v_{0i} \leq 0, \\ v_{0i} - S_i, & v_{0i} > 0, \end{cases} \quad t_i = T_{k-1} + v_i, \quad t_c = \max t_i. \quad (3.29)$$

Момент времени t_i вычисляется при каждом вхождении кривой $z(t)$ в интервал $[-\delta_z, \delta_z]$. Если таких вхождений несколько, то в качестве времени переходного процесса выбирается максимальное значение t_i . По формулам (3.28), (3.29) составим алгоритм вычисления момента времени пересечения относительного значения ординаты при постоянном шаге интегрирования, который реализует функцию $t = \text{Cross}(h, u, u_l, u_r, T_{k-1})$.

Алгоритм 3.2. Вычисление момента времени при постоянном шаге

Входные параметры: h – шаг интегрирования, u – относительная ордината искомой точки, u_l и u_r – относительные ординаты крайних точек, T_{k-1} – абсцисса средней точки.

Выходной параметр: t – значение абсциссы искомой точки.

1. Вычислить $d = 0,5(u_l - u_r)$, $s = u_l + u_r$.
2. Если $s = 0$, вычислить $h_0 = -hu/d$ и перейти к п. 5.
3. Вычислить $r = d/s$, $v_0 = rh$, $S = h\sqrt{r^2 + 2u/s}$.
4. Если $v_0 > 0$, положить $v = v_0 - S$, иначе положить $v = v_0 + S$.
5. Вычислить $t = T_{k-1} + v$.
6. Остановиться.

По формуле (2.36) составим алгоритм вычисления момента попадания процесса в заданный интервал при постоянном шаге интегрирования, реализующий функцию $t = \text{Hit}(h, u_l, u_r, T_{k-1}, Z_{k-1}, \delta_z)$.

Алгоритм 3.3. Время попадания в интервал при постоянном шаге

Входные параметры: h – шаг интегрирования, u_l и u_r – относи-

тельные ординаты крайних точек, T_{k-1} и Z_{k-1} – абсцисса и ордината средней точки, δ_z – параметр интервала времени регулирования.

Выходной параметр: t – момент времени попадания процесса в интервал.

1. Вычислить $u = \delta_z \text{sign } Z_{k-1} - Z_{k-1}$.
2. Вычислить $t = \text{Cross}(h, u, u_l, u_r, T_{k-1})$.
3. Остановиться.

На основании алгоритма 2.10 метода интегрирования и алгоритма 3.3 составим алгоритм вычисления времени процесса при постоянном шаге.

Алгоритм 3.4. Вычисление времени процесса

Входные параметры: \mathbf{S} – СДУ, \mathbf{C} – матрица наблюдения, T_f – конец интервала интегрирования, L – число шагов интегрирования, y_∞ – установившееся значение процесса, δ_z – параметр интервала времени процесса.

Выходной параметр: t_c – значение времени процесса.

1. Положить $h = T_f / L$, $\mathbf{X} = 0$, $Z_0 = -y_\infty$, $\mathbf{P} = \text{Start}(\mathbf{S}, h, \mathbf{X})$.
2. Положить $\mathbf{X} = \text{Step}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$, $T_1 = h$, $Z_1 = \mathbf{C}\mathbf{X} - y_\infty$.
3. Положить $B_1 = (|Z_1| \geq \delta_z)$, $k = 2$.
4. Положить $\mathbf{X} = \text{Step}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$, $T_2 = T_1 + h$, $Z_2 = \mathbf{C}\mathbf{X} - y_\infty$.
5. Положить $u_l = Z_0 - Z_1$, $u_r = Z_2 - Z_1$, $B_2 = (|Z_2| < \delta_z)$.
6. Если $B_2 \wedge B_1$, вычислить $t_c = \text{Hit}(h, u_l, u_r, T_1, Z_1, \delta_z)$.
7. Положить $Z_0 = Z_1$, $T_1 = T_2$, $Z_1 = Z_2$, $B_1 = \neg B_2$.
8. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 4.
9. Если B_1 , положить $t_c = T_f$.
10. Остановиться.

Итак, методы вычисления прямых показателей качества разработаны в виде расчетных формул и алгоритмов.

3.4. Задача оптимизации прямых показателей качества

Для радиоэлектронных схем рассмотренные прямые критерии качества – максимальное отклонение управляемой величины, колебательность и время переходного процесса являются важнейшими критериями, определяющими безопасность, надежность и быстродействие схем. В то же время эти критерии имеют различные приоритеты.

Для всех радиоэлектронных схем критерием с наивысшим приоритетом является максимальное отклонение σ наблюдаемой величины. В целях безопасности работы схемы максимальное отклонение не должно превышать заданного значения σ_m . В противном случае возможно повреждение элементов электронной схемы.

Следующим по приоритету является размах колебаний переходного процесса ζ . При колебаниях в схеме с определенными значениями амплитуды и частоты возможно накопление усталостных напряжений в схеме и последующее ее разрушение. В целях безопасности и надежности схемы этот показатель также не должен превышать заданного значения ζ_m . Но при этом возможны колебания в окрестности установившегося значения процесса с различной степенью затухания. Поэтому показатель затухания колебаний процесса λ также не должен превышать заданного значения λ_m .

Последний из рассматриваемых прямых критериев – время установления процесса t_c определяет быстродействие схем. Этот критерий также влияет на безопасность и надежность работы радиоэлектронных схем. Время установления должно быть минимальным при выполнении ограничений, накладываемых на предыдущие критерии. Поскольку в радиоэлектронных схемах могут протекать как быстрые, так и медленные процессы, перейдем к относительному значению времени переходного процесса $\tau = t_c/T_f$, где T_f – время наблюдения процесса.

Для того чтобы обеспечить требования, предъявляемые к прямым

критериям качества, будем рассматривать критерии как функции вектора \mathbf{x} варьируемых параметров схемы: $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$, $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$, $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$, $\tau = \tau(\mathbf{x})$. Задачу оптимизации прямых критериев можно сформулировать следующим образом:

$$\min_{\mathbf{x} \in D} \tau(\mathbf{x}), \quad D = \{ \mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_m, \zeta(\mathbf{x}) \leq \zeta_m, \lambda(\mathbf{x}) \leq \lambda_m \}. \quad (3.30)$$

Допустимая область D определяется ограничениями критериев. Вводя обозначения для функций задачи (3.30)

$$g_1(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma_m, \quad g_2(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}) - \zeta_m, \quad g_3(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) - \lambda_m, \quad f(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}),$$

представим ее как задачу нелинейного программирования (НП) – минимизировать скалярную целевую функцию $f(\mathbf{x})$ в допустимой области D , определяемой ограничениями в виде неравенств:

$$\min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}), \quad D = \{ \mathbf{x} \mid g_1(\mathbf{x}) \leq 0, g_2(\mathbf{x}) \leq 0, g_3(\mathbf{x}) \leq 0 \}. \quad (3.31)$$

Эта задача является частным случаем общей задачи НП с произвольным числом ограничений в виде неравенств и равенств. Особенностью задачи (3.31) является то, что все входящие в нее функции вычисляются в едином вычислительном процессе при помощи численного интегрирования СДУ схем, требующего существенных временных затрат. Поэтому метод НП для решения этой задачи должен быть эффективным. В то же время попытки применить существующие методы НП оказались неэффективными, поскольку эти методы были разработаны для решения общих задач НП, в которых целевая функция и функции ограничений вычисляются и обрабатываются методом оптимизации отдельно. Метод НП в процессе оптимизации должен обеспечить одновременное выполнение двух задач: удовлетворение ограничений и уменьшение целевой функции. В рассматриваемой задаче целесообразно математическую модель задачи оптимизации представить в виде единой векторной функции.

3.5. Пошаговый принцип решения задач оптимизации

Для решения задач параметрического синтеза радиоэлектронных схем методами оптимизации используется принцип пошагового удовлетворения ограничений. Основная идея пошагового принципа заключается в том, что все ограничения в задаче оптимизации радиоэлектронной схемы упорядочиваются естественным образом в процессе проектирования. Для каждой пробной точки поиска оптимального решения ограничения проверяются последовательно до тех пор, пока не встретится первое нарушенное ограничение. Все выполненные предыдущие ограничения являются пассивными и не влияют на последующий поиск, а нарушенное ограничение считается активным и определяет направление поиска на данном шаге с целью сделать активное ограничение пассивным. Это позволяет в процессе поиска допустимой точки последовательно увеличивать общее количество выполненных ограничений, приближаясь к допустимой области, в которой выполняются все ограничения. В соответствии с предложенным подходом разработан следующий пошаговый метод его реализации.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in R^p$ – вектор варьируемых параметров. Этот вектор также можно рассматривать как точку пространства варьируемых параметров R^p . Рассмотрим задачу математического программирования в следующей постановке: минимизировать целевую функцию $f(\mathbf{x})$ при ограничениях

$$g_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k = \overline{1, M}. \quad (3.32)$$

Относительно функций $f(\mathbf{x})$ и $g_k(\mathbf{x})$, где $k = \overline{1, M}$, примем допущение, что все они определены в пространстве R^p . Область $D \subset R^p$, в которой все M ограничений (3.32) выполняются, является допустимой областью поиска решения. Будем полагать, что $D \neq \emptyset$ и решение задачи \mathbf{x}^* существует. Краткую формулировку этой задачи представим в следующем виде:

$$\min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D = \{ \mathbf{x} \mid g_k(\mathbf{x}) \leq 0, k = \overline{1, M} \} \subset R^p. \quad (3.33)$$

Будем полагать, что ограничения являются достаточно сложными и выбор значения вектора \mathbf{x} , принадлежащего допустимой области D , является нетривиальной задачей. Для математического описания решения задачи (3.33) пошаговым методом приведем некоторые определения. Вначале введем области ограничений. В общем случае M ограничениям (3.32) соответствуют области ограничений G_1, G_2, \dots, G_M :

$$G_k = \{ \mathbf{x} \mid g_k(\mathbf{x}) \leq 0 \}, \quad k = \overline{1, M}, \quad (3.34)$$

где $g_k(\mathbf{x})$ – функция ограничения с номером k , одновременно служащая при нарушении этого ограничения штрафом за его нарушение. Все ограничения задач параметрического синтеза радиоэлектронных схем определяют допустимую область пространства варьируемых параметров:

$$D = \{ \mathbf{x} \mid g_k(\mathbf{x}) \leq 0, k = \overline{1, M} \}. \quad (3.35)$$

Очевидно, что эту область можно определить и как пересечение областей ограничений (3.34):

$$D = \bigcap_{i=1}^M G_i. \quad (3.36)$$

Для системы областей ограничений (3.34) определим квазидопустимые области:

$$D_1 = G_1, \quad D_k = D_{k-1} \cap G_k, \quad k = \overline{2, M}. \quad (3.37)$$

В соответствии с (3.35)–(3.36) допустимая область совпадает с последней из квазидопустимых областей – $D = D_M$, причем квазидопустимые области образуют систему вложенных областей:

$$D = D_M \subseteq D_{M-1} \subseteq \dots \subseteq D_1 \subseteq R^p. \quad (3.38)$$

Очевидно, что если $\mathbf{x} \in D_k$, то $\mathbf{x} \in D_i$ для всех $i < k$. В силу допущения $D \neq \emptyset$ и соотношения (3.35) квазидопустимые области образуют систему непустых вложенных областей. Из квазидопустимых областей с помощью разностей множеств построим непересекающиеся области уровней ограничений:

$$H_0 = R^p \setminus D_1, \quad H_k = D_k \setminus D_{k+1}, \quad k = \overline{1, M-1}, \quad H_M = D_M. \quad (3.39)$$

По этому определению область уровня ограничений H_k – это область, для любой точки которой выполняется ровно k первых ограничений, а следующее ограничение с номером $k+1$ нарушается. Если же точка не принадлежит H_k , то она находится в другой области уровня и для нее выполняется другое число первых ограничений.

На основании выражений (3.37) и (3.39) области уровней ограничений можно сформировать только по областям ограничений (3.34):

$$H_0 = R^p \setminus G_1, \quad H_k = \left(\bigcap_{i=1}^k G_i \right) \setminus G_{k+1}, \quad k = \overline{1, M-1}, \quad H_M = \bigcap_{i=1}^M G_i.$$

Однако выражения (3.37) и (3.39) задают области уровней несколько проще.

Для большей наглядности можно представить, что область H_0 находится на нулевом уровне системы ограничений (3.32), область H_1 – на первом уровне и так далее. Образно говоря, все области уровней образуют рельеф типа ступенчатой пирамиды. Таким образом, в силу построений (3.37) и (3.39) последняя область уровней (верхняя часть пирамиды) совпадает с допустимой областью – $H_M = D$. Любая точка $\mathbf{x} \in R^p$ принадлежит одной и только одной области уровней: $\mathbf{x} \in H_k$, $k = \overline{0, M}$. Индекс k -той области уровней H_k , которой принадлежит точка \mathbf{x} , назовем уровнем этой точки. Очевидно, что уровень произ-

вольной точки \mathbf{x} является кусочно-постоянной функцией этой точки. Назовем эту функцию функцией уровня:

$$F_1(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}), \quad F_1(\mathbf{x}) \in \{0, 1, \dots, M\}. \quad (3.40)$$

Максимальное значение $F_1(\mathbf{x}) = M$ соответствует допустимой области D .

Активным является то ограничение, которое в последовательности ограничений (3.32) задачи (3.33) нарушается первым. В силу определений (3.34), (3.37), (3.39) в области H_0 нарушается первое из ограничений (3.32), поэтому оно активно: $g_1(\mathbf{x}) > 0$. Таким образом, в этой области мерой нарушения ограничения может служить неотрицательная функция штрафа $g_1(\mathbf{x})$, убывающая в направлении границы области H_1 . В области H_1 , если только $H_1 \neq \emptyset$, первое ограничение выполняется, но активно второе ограничение: $g_2(\mathbf{x}) > 0$. Мерой нарушения этого ограничения может служить неотрицательная штрафная функция $g_2(\mathbf{x})$, убывающая в направлении границы области H_2 . Итак, в любой непустой области H_k при $k = \overline{0, M-1}$ мерой нарушения активного ограничения является соответствующая штрафная функция $g_{k+1}(\mathbf{x})$. Для перехода из области H_{k-1} в область H_k необходимо минимизировать в этой области лишь одну штрафную функцию $g_k(\mathbf{x})$ при выполнении всех предыдущих ограничений.

Для реализации пошагового принципа формируются двумерные векторные целевые функции. В этих векторных функциях первая проекция – функция уровня $F_1(\mathbf{x})$ равна числу последовательно выполненных ограничений, а вторая проекция – функция штрафа $F_2(\mathbf{x})$ соответствует штрафу первого нарушенного ограничения. В области уровня H_k с номером k выполняется ровно k ограничений, а следующее ограничение с номером $k+1$ нарушается. Степень нарушения этого ограничения отображает его функция $g_{k+1}(\mathbf{x})$. Обозначая целе-

вую функцию задачи оптимизации $g_{M+1}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, двумерную векторную целевую функцию пошагового подхода сформируем на основании областей уровней:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{ (k(\mathbf{x}), g_{k+1}(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in H_k, k = \overline{0, M} \}. \quad (3.41)$$

Таким образом, любую точку поиска $\mathbf{x} \in R^p$ характеризуют две величины: количество выполненных ограничений $F_1(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})$ и значение штрафной функции активного ограничения $F_2(\mathbf{x}) = g_{k+1}(\mathbf{x})$.

Функция $F_1(\mathbf{x})$ является кусочно-постоянной функцией и может принимать значения от 0 до M . Если $F_1(\mathbf{x}) < M$, то в точке \mathbf{x} выполняются не все ограничения и она является недопустимой. Если же $F_1(\mathbf{x}) = M$, то в точке \mathbf{x} выполняются все ограничения и она является допустимой. Функцию $F_1(\mathbf{x})$, характеризующую уровень выполнения ограничений для точки пространства варьируемых параметров, целесообразно назвать функцией уровня. Таким образом, чтобы из недопустимой точки перейти в допустимую, необходимо максимизировать функцию уровня $F_1(\mathbf{x})$.

Функция уровня является постоянной в достаточно малой окрестности любой точки \mathbf{x} , за исключением граничных точек выполнения ограничений, и по ней самой затруднительно установить направление ее возрастания. Поэтому для максимизации функции уровня применяется вторая функция $F_2(\mathbf{x})$, характеризующая величину нарушения активного ограничения. Эту функцию целесообразно назвать функцией штрафа. Минимизация функции штрафа приведет к выполнению активного ограничения, а значит, к возрастанию количества выполненных ограничений, то есть к росту функции уровня $F_1(\mathbf{x})$.

Итак, реализация пошагового метода заключается в следующей стратегии: на каждом шаге метода минимизируется функция штрафа $F_2(\mathbf{x})$ при неубывании функции уровня $F_1(\mathbf{x})$. Как только активное

ограничение удовлетворяется, оно становится пассивным, $F_1(\mathbf{x})$ возрастает, и начинается следующий шаг метода. Переход из любой недопустимой точки пространства варьируемых параметров в допустимую точку выполняется не более чем за m шагов. Предложенную стратегию реализации пошагового метода можно осуществить в едином вычислительном процессе. Для этого требуется оптимизировать вектор-функцию $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ с учетом приоритета ее составляющих: первую составляющую, имеющую приоритет, необходимо максимизировать, а вторую – минимизировать. Задачу оптимизации двумерной векторной функции пошагового подхода с учетом приоритета ее составляющих обозначим в виде

$$\text{вектор } \mathbf{F}(\mathbf{x}) . \quad (3.42)$$

В этой записи подразумевается, что оптимизации (максимизации или минимизации) подвергается иерархическая последовательность двух функций $F_1(\mathbf{x})$ и $F_2(\mathbf{x})$. Это означает, что приоритет максимизации функции $F_1(\mathbf{x})$ выше приоритета минимизации функции $F_2(\mathbf{x})$. Максимизация функции $F_1(\mathbf{x})$, позволяющая попасть в допустимую область D , осуществляется путем минимизации функции $F_2(\mathbf{x})$. В допустимой же области D функция $F_2(\mathbf{x})$ в силу определения (3.41) совпадает с целевой функцией $f(\mathbf{x})$, и ее минимизация приведет к решению задачи (3.33). Таким образом, если решение \mathbf{x}^* задачи (3.42) существует, то оно совпадет с решением задачи (3.33). Преимущество постановки и решения задачи (3.42) по сравнению с исходной задачей (3.33) заключается в следующих обстоятельствах.

Во-первых, вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, в отличие от функций ограничений и целевой функции задачи (3.33), определена во всем пространстве варьируемых параметров. От функций ограничений (3.32) и целевой функции теперь лишь требуется, чтобы они были определены не во всем пространстве R^p , а лишь в соответствующих квазидопусти-

мых областях: $g_1(\mathbf{x})$ – в R^p , $g_2(\mathbf{x})$ – в D_1 , $g_k(\mathbf{x})$ – в D_{k-1} , $k = \overline{3, M-1}$, $f(\mathbf{x})$ – в D . Причем функция $g_k(\mathbf{x})$ положительна в области уровней H_{k-1} и убывает в направлении следующей области уровней H_k . Это означает, что все ограничения можно считать жесткими по отношению к функциям последующих ограничений и к самой целевой функции. То есть целевая функция $f(\mathbf{x})$ может существовать только в допустимой области D . Следовательно, постановка задачи (3.42) позволяет решать более широкий класс задач, чем постановка (3.33).

Во-вторых, в силу определения (3.41), вычисление функций $F_1(\mathbf{x})$ и $F_2(\mathbf{x})$ в точках, исключая точки допустимой области, сводится к вычислению только некоторых из функций $g_k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, M}$, и $f(\mathbf{x})$. В общем случае это снижает трудоемкость перемещения точки поиска в допустимую область.

В-третьих, задача (3.42) учитывает особенности реальных задач – иерархию ограничений и возможность вычисления критериев качества в едином вычислительном процессе.

Поскольку первую проекцию векторной функции (3.41) необходимо увеличивать, а вторую – уменьшать, причем первая проекция имеет приоритет, то некоторые два ее значения $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ и $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ сравним следующей бинарной операцией «лучше» \prec :

$$\mathbf{U} \prec \mathbf{V} = \begin{cases} 1, & U_1 > V_1 \vee U_1 = V_1 \wedge U_2 < V_2, \\ 0, & U_1 < V_1 \vee U_1 = V_1 \wedge U_2 \geq V_2. \end{cases} \quad (3.43)$$

Эту операцию можно реализовать по следующему алгоритму.

Алгоритм 3.5. Сравнение значений двумерной векторной функции

Входные параметры: \mathbf{U} , \mathbf{V} – значения векторной функции.

Выходной параметр: B – булевский результат сравнения.

1. Положить $B = 0$.

2. Если $U_1 > V_1$, то положить $B=1$ и перейти к п. 5.
3. Если $U_1 < V_1$, то перейти к п. 5.
4. Если $U_2 < V_2$, то положить $B=1$.
5. Остановиться.

Для реализации предложенного пошагового подхода можно модифицировать любой численный метод безусловной минимизации функций многих переменных. Рассмотрим пошаговый подход к оптимизации прямых показателей качества радиоэлектронных схем.

3.6. Пошаговый подход к оптимизации прямых показателей

Рассмотренные методы и алгоритмы вычисления прямых показателей качества – максимального отклонения, колебательности и времени процесса учитывают ограничение наблюдения процессов по времени концом T_f интервала интегрирования СДУ и применимы только для устойчивых систем. В то же время при численной оптимизации этих показателей точки оптимизационного поиска могут попадать в неустойчивую область пространства варьируемых параметров, когда отклонение управляемой величины неограниченно возрастает. Поэтому при формировании прямых критериев оптимальности на основании прямых показателей качества необходимо учитывать также ограничение наблюдения процессов по отклонению: $z \in [z_{\min}, z_{\max}]$.

Для вычисления прямых критериев качества зададим область изменения отклонения $z(t)$, ограниченную как по времени, так и по отклонению:

$$\Omega = \{(t, z) \mid t \in [0, T_f], z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}. \quad (3.44)$$

Обозначим $z_m = z_{\max}$ и зададим $z_{\min} = -z_m$. Наблюдая процесс в области Ω до достижения ее границы по переменным t или z , определим все критерии качества процесса. Пусть на границе по t

$z_f = z(T_f)$ – значение отклонения на конце интервала интегрирования, а на границе по z t_m – время первого достижения этой границы, $r = t_m/T_f$ – его относительное значение, $r \in (0, 1]$.

Максимальное отклонение σ и показатель колебательности ζ определяются по формулам (3.11)–(3.15) на основании массива экстремумов переходной или весовой функций \mathbf{E} размерности m . Если граница области Ω по z не достигается $|z| < z_m$, то эти показатели ограничены: $\sigma \in [0, z_m)$, $\zeta \in [0, 2z_m)$. В противном случае при существовании $|z| = z_m$ для критерия показателей сформируем штраф, превосходящий верхнюю грань показателя, и тем больший, чем меньше относительное значение r времени t_m .

Если при некотором значении вектора варьируемых параметров \mathbf{x} система неустойчива, то отклонение $z(\mathbf{x}, t)$ нарушает границы области (3.44) z_m или $-z_m$ при некотором значении переменной времени $t = t_m(\mathbf{x})$. Сформируем штрафную функцию $\Delta r(\mathbf{x})$ нарушения неравенства $|z(\mathbf{x}, t)| \leq z_m$ по формулам:

$$r(\mathbf{x}) = t_m(\mathbf{x})/T_f, \quad \Delta r(\mathbf{x}) = 1 - r(\mathbf{x}). \quad (3.45)$$

При выполнении неравенства $|z(\mathbf{x}, t)| \leq z_m$ преобразуем формулы (3.12)–(3.17), (3.29) вычисления прямых критериев качества. Для переходной функции

$$\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lfloor z_f(\mathbf{x}) \rfloor, & m = 0, \\ \lfloor E_{\max}(\mathbf{x}) \rfloor, & m > 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\zeta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & m = \overline{0, 1}, \\ \max_i |E_{2i-1}(\mathbf{x}) - E_{2i}(\mathbf{x})|, & m > 1, \quad i = \overline{1, [m/2]}. \end{cases} \quad (3.47)$$

Для функции веса

$$\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} |z_f(\mathbf{x})|, & m = 0, \\ \max_i |E_i(\mathbf{x})|, & m > 0, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\zeta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & m = \overline{0, 2}, \\ \max_i |E_{2i}(\mathbf{x}) - E_{2i+1}(\mathbf{x})|, & m > 2, \quad i = \overline{1, [(m-1)/2]}. \end{cases} \quad (3.49)$$

Относительное время процесса для обеих функций определяется формулой

$$\tau(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 + |z_f(\mathbf{x})|/z_m, & |z_f(\mathbf{x})| > \delta_z, \\ \max\{t/T_f \mid |z(\mathbf{x}, t)| = \delta_z, t \in [0, T_f]\}, & |z_f(\mathbf{x})| \leq \delta_z. \end{cases} \quad (3.50)$$

Задача оптимизации прямых критериев $\sigma(\mathbf{x})$, $\zeta(\mathbf{x})$ и $\tau(\mathbf{x})$ с учетом возможной принадлежности вектора варьируемых параметров неустойчивой области имеет три ограничения, которым отвечают области:

$$G_1^{(1)} = \{\mathbf{x} \mid |z(\mathbf{x})| \leq z_m\}, \quad G_2^{(1)} = \{\mathbf{x} \mid \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_m\}, \quad G_3^{(1)} = \{\mathbf{x} \mid \zeta(\mathbf{x}) \leq \zeta_m\}. \quad (3.51)$$

Для переходной функции зададим значения ограничений $z_m = 1$, $\sigma_m = 0,05$ и $\zeta_m = 0,065$. Сформируем по областям (3.51) при $m = 3$ на основании (3.37), (3.39) области уровней ограничений, через которые с учетом обозначений

$$\Delta\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma_m, \quad \Delta\zeta(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x}) - \zeta_m, \quad \Delta\lambda(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) - \lambda_m \quad (3.52)$$

определим двумерную векторную целевую функцию

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (0; \Delta r(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_0, \\ (1; \Delta\sigma(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_1, \\ (2; \Delta\zeta(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_2, \\ (3; \tau(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_3. \end{cases} \quad (3.53)$$

На основании алгоритмов 3.1–3.4 и формул (3.45)–(3.50) составим алгоритм вычисления значений функции (3.53).

Алгоритм 3.6. Вычисление пошаговой векторной функции прямых критериев

Входные параметры: \mathbf{S} – СДУ, \mathbf{C} – матрица наблюдения, T_f – конец интервала интегрирования, L – число шагов интегрирования, y_∞ – установившееся значение процесса, δ_z – параметр интервала времени установления, z_m – ограничение отклонения процесса, σ_m и ζ_m ограничения прямых критериев, H – начальный уровень.

Выходной параметр: \mathbf{F} – значение векторной функции.

1. Положить $h = T_f/L$, $T_0 = 0$, $\mathbf{X} = 0$, $Z_0 = -y_\infty$,

$\mathbf{P} = \text{Start}(\mathbf{S}, h, \mathbf{X})$.

2. Положить $\mathbf{X} = \text{Step}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$, $T_1 = h$, $Z_1 = \mathbf{C}\mathbf{X} - y_\infty$.

3. Положить $\mathbf{E} = \emptyset$, $B_1 = (|Z_1| \geq \delta_z)$, $k = 2$.

4. Положить $\mathbf{X} = \text{Step}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{P})$, $T_2 = T_1 + h$, $Z_2 = \mathbf{C}\mathbf{X} - y_\infty$.

5. Положить $u_l = Z_0 - Z_1$, $u_r = Z_2 - Z_1$, $a_2 = |Z_2|$, $B_2 = (a_2 < \delta_z)$.

6. Если $a_2 > z_m$, положить $u = z_m \text{sign } Z_2 - Z_1$, $t_m = \text{Cross}(h, u, u_l, u_r, T_1)$, $r = t_m/T_f$, $\mathbf{F} = (H; 1-r)$ и перейти к п. 22.

7. Если $u_l u_r > 0$, положить $d = (u_l - u_r)/2$, $s = u_l + u_r$, $r = d/s$, $Z_e = Z_1 - dr/2$, $\mathbf{E} = (\mathbf{E}, Z_e)$.

8. $B_2 \wedge B_1$, вычислить $t_c = \text{Hit}(h, u_l, u_r, T_1, Z_1, \delta_z)$.

9. Положить $T_0 = T_1$, $Z_0 = Z_1$, $T_1 = T_2$, $Z_1 = Z_2$, $B_1 = -B_2$.

10. Если $k < L$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 4.

11. Положить $H = H + 1$.

12. Если $y_\infty > 0$, положить $\sigma = \max\{\max E_i, Z_2, 0\}$, $j = 1$, иначе, положить $\sigma = \max\{\max |E_i|, |Z_2|\}$, $j = 2$.

13. Положить $\Delta = \sigma - \sigma_m$.

14. Если $\Delta > 0$, положить $\mathbf{F} = (H; \Delta)$ и перейти к п. 22.
15. Положить $H = H + 1$, $m = \dim \mathbf{E}$.
16. Если $m > j$, положить $\mathbf{P} = \mathbf{E}(j : 2 : (m-1))$, $\mathbf{S} = \mathbf{E}((j+1) : 2 : m)$, $\mathbf{D} = \mathbf{P} - \mathbf{S}$, $\zeta = \max |D_i|$, иначе, положить $\zeta = 0$.
17. Положить $\Delta = \zeta - \zeta_m$.
18. Если $\Delta > 0$, положить $\mathbf{F} = (H; \Delta)$ и перейти к п. 22.
19. Положить $H = H + 1$.
20. Если B_1 , положить $\tau = 1 + |Z_2|$, иначе, положить $\tau = \tau/T_f$.
21. Положить $\mathbf{F} = (H; \tau)$.
22. Остановиться.

Значения векторной функции (3.53) во всех точках вычисляются численным методом решения СДУ. Для уменьшения числа операций в случае линейной СДУ за счет исключения интегрирования для неустойчивых точек применим ограничения устойчивости из критерия Рауса – Гурвица.

Для того чтобы система с характеристическим многочленом

$$\alpha(\mathbf{x}, s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i(\mathbf{x}) s^{n-i}$$

степени n была устойчива при некотором значении варьируемого вектора переменных параметров \mathbf{x} , необходимо и достаточно, чтобы выполнялась полная система условий из двух групп неравенств:

$$\alpha_i(\mathbf{x}) > 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad \rho_k(\mathbf{x}) > 0, \quad k = \overline{2, n-1}, \quad (3.54)$$

где $\rho_k(\mathbf{x})$ – элементы первого столбца таблицы Рауса. Эта система условий определяет в пространстве R^p вектора переменных параметров \mathbf{x} область устойчивости D . Системе неравенств (3.54) соответствуют области выполнения ограничений

$$\Omega_1 = \{ \mathbf{x} \mid \alpha_i(\mathbf{x}) > 0, i = \overline{0, n} \}, \quad \Omega_k = \{ \mathbf{x} \mid \rho_k(\mathbf{x}) > 0 \}, \quad k = \overline{2, n-1}. \quad (3.55)$$

Расширим систему областей ограничений (3.50) в соответствии с (3.54) до $m = n + 1$ ограничений:

$$G_1^{(2)} = \Omega_1, \quad G_k^{(2)} = \Omega_k, \quad k = \overline{2, n-1}, \quad G_n^{(2)} = G_2^{(1)}, \quad G_{n+1}^{(2)} = G_3^{(1)}. \quad (3.56)$$

Поскольку функции коэффициентов характеристического многочлена $\alpha_i(\mathbf{x})$ вычисляются независимо друг от друга, то первую группу неравенств (3.54) можно представить как одно векторное ограничение, степень нарушения которого в области H_0 отобразим одной аддитивной штрафной функцией:

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \lfloor -\alpha_i(\mathbf{x}) \rfloor. \quad (3.57)$$

По функциям (3.57), $\rho_k(\mathbf{x})$, $k = \overline{2, n-1}$, (3.52), функции относительного времени регулирования $\tau(\mathbf{x})$ и областям уровней H_k , $k = \overline{0, n+1}$, полученным по (3.56), (3.37), (3.39) при $M = n + 1$, сформируем векторную целевую функцию:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (0; P(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_0, \\ (k; -\rho_{k+1}(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_k, \quad k = \overline{1, n-2}, \\ (n-1; \Delta\sigma(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_{n-1}, \\ (n; \Delta\zeta(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_n, \\ (n+1; \tau(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in H_{n+1}. \end{cases} \quad (3.58)$$

На основании формул (3.55), (3.57) сформируем алгоритм вычисления векторной штрафной функции, реализующий функцию $(\mathbf{F}, B) = \text{StepStab}(\alpha, h)$.

Алгоритм 3.7. Вычисление векторной штрафной функции

Входные параметры: α – массив коэффициентов характеристиче-

ского многочлена, h – значение счетчика ограничений.

Выходные параметры: \mathbf{F} – значение векторной штрафной функции при неустойчивости, B – признак устойчивости системы.

1. Положить $n = \dim \alpha - 1$, $B = 1$, $P = 0$, $i = 0$.
2. Если $\alpha_i \leq 0$, положить $P = P - \alpha_i$, $B = 0$.
3. Если $i < n$, положить $i = i + 1$ и перейти к п. 2.
4. Если $-B$, положить $\mathbf{F} = (h; P)$ и перейти к п. 12.
5. Положить $\rho = \alpha$, $m = n - 1$, $k = 2$.
6. Положить $h = h + 1$, $\gamma = \rho_{k-2} / \rho_{k-1}$, $i = k$.
7. Положить $\rho_i = \rho_i - \gamma \rho_{i+1}$.
8. Если $i < m$, положить $i = i + 2$ и перейти к п. 7.
9. Если $\rho_k \leq 0$, положить $\mathbf{F} = (h; -\rho_k)$, $B = 0$ и перейти к п. 12.
10. Если $k < m$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 6.
11. Положить $\mathbf{F} = (h + 1; 0)$.
12. Остановиться.

В этом алгоритме параметр h представляет счетчик числа выполненных ограничений устойчивости с начальным значением $h = 0$.

Алгоритм вычисления значений функции (3.58) составлен из алгоритма 3.6 и алгоритма 3.7.

Контрольные вопросы

1. Зачем вычисляются экстремумы переходных процессов?
2. Как вычисляются экстремумы переходных процессов?
3. Зачем применяется квадратичная интерполяция при вычислении экстремумов переходных процессов?
4. Запишите формулы для вычисления экстремумов переходных процессов.
5. Составьте алгоритм для вычисления экстремумов переходных процессов.
6. Запишите формулы для вычисления максимального отклонения

переходного процесса.

7. Запишите формулы для вычисления размаха колебаний.

8. Запишите формулы для вычисления показателя затухания колебаний переходного процесса.

9. Чем определяется быстродействие переходных процессов в радиоэлектронных схемах?

10. Чем определяется время переходного процесса?

11. Запишите формулы для времени переходного процесса.

12. Составьте алгоритм для вычисления момента времени пересечения относительного значения ординаты переходного процесса.

13. Составьте алгоритм вычисления момента попадания процесса в заданный интервал.

14. Составьте алгоритм вычисления времени процесса.

15. Перечислите прямые показатели качества переходных процессов в радиоэлектронных схемах.

16. Укажите приоритет прямых показателей качества переходных процессов.

17. Представьте задачу оптимизации прямых критериев качества переходных процессов.

18. Какой тип задачи оптимизации прямых критериев качества?

19. Какой принцип используется для решения задач параметрического синтеза радиоэлектронных схем?

20. Какая идея пошагового удовлетворения ограничений?

21. Запишите векторную целевую функцию пошагового подхода и операцию сравнения ее значений.

22. Запишите векторную целевую функцию для оптимизации прямых критериев качества переходного процесса.

23. Составьте алгоритм вычисления векторной целевой функции.

4. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА

Даны теоретические основы методов одномерной оптимизации, приведены рекомендуемые алгоритмы. Изучается метод Свенна для поиска интервала неопределенности унимодальной целевой функции. Представлены методы деления интервала пополам, золотого сечения, адаптации шага и квадратичной интерполяции с тремя точками.

4.1. Теоретические основы одномерной оптимизации

Методы одномерного поиска предназначены для вычисления экстремума целевой функции $f(x)$ одной переменной $x \in R$.

Если в некоторой точке x^* функция $f(x)$ принимает значение $f^* = f(x^*)$, наименьшее по сравнению с ее значениями в некоторой окрестности этой точки $C_\varepsilon(x^*) = (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, то точка x^* называется *точкой минимума* функции $f(x)$, а число f^* называют просто *минимумом* функции (рис. 4.1).

Если же для всех $x \in C_\varepsilon(x^*)$ и $x \neq x^*$ будет $f(x) > f(x^*)$, то в точке x^* функция $f(x)$ имеет *максимум* f^* . Минимум и максимум имеют общее название *экстремум*.

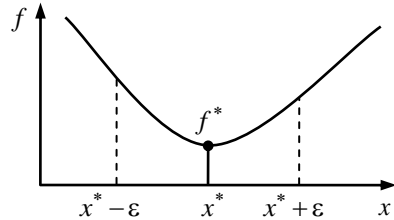


Рис. 4.1. Минимум функции

Для исследования функции $f(x)$ на экстремум используют понятие производной этой функции

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4.1)$$

Первая производная на основании определения (4.1) вычисляется по формуле конечной разности

$$f'_x = \frac{f(x+h) - f_x}{h}, \quad (4.2)$$

где x – точка, в которой вычисляется производная; f_x – значение функции в точке x ; h – малое приращение аргумента. Погрешность этой формулы составляет $o(h)$.

Необходимый признак существования экстремума функции одной переменной $f(x)$ в точке x^* представляется следующей теоремой.

Т е о р е м а 1. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x^* экстремум, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.*

Необходимым и достаточным признаком существования экстремума функции $f(x)$ в точке x^* является изменение знака производной $f'(x)$ при переходе через точку x^* (рис. 4.2). Если при возрастании переменной x производная $f'(x)$ в точке x^* меняет знак с минуса на плюс, то это точка минимума функции (рис. 4.2, а). Если же знак $f'(x)$ в точке x^* меняется с плюса на минус, то это точка максимума (рис. 4.2, б). Поэтому имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ имела в точке x^* экстремум, необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ при переходе через эту точку меняла знак.*

Исследовать функцию на экстремум можно и с помощью второй производной.

Решение задачи одномерной оптимизации – это значение переменной x^* , которое доставляет минимум целевой функции. Решение

задачи безусловной оптимизации определяют равенствами:

$$f(x^*) = \min f(x) \quad \text{или} \quad x^* = \arg \min f(x).$$

Оптимальное значение целевой функции обозначается через $f^* = f(x^*)$.

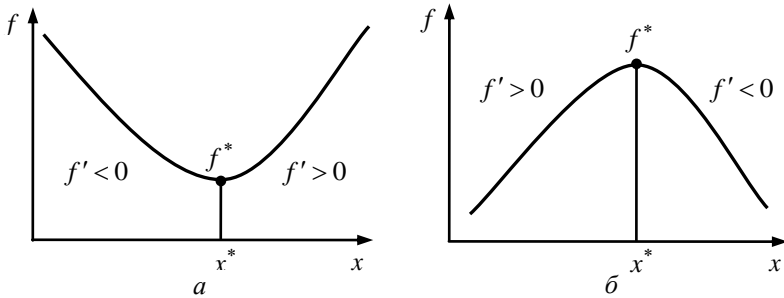


Рис. 4.2. Необходимый и достаточный признак экстремума

Метод одномерного поиска – это метод для выполнения итерационного процесса решения задачи одномерной оптимизации, который позволяет исключить полный перебор вариантов и получить решение задачи x^* более рациональным способом. Любой метод одномерного поиска формирует последовательность точек $\{x_k\}$ на множестве R , которая должна сходиться к решению задачи оптимизации: $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x^*$. Эффективность метода одномерного поиска определяется как полученной точностью решения задачи оптимизации, так и величиной затраченных на ее решение вычислительных ресурсов.

4.2. Интервал неопределенности

Функция $f(x)$ называется *строго убывающей* в интервале $X \subseteq R$, если для любых $u, v \in X$, $u < v$ выполняется неравенство

$f(u) > f(v)$ (рис. 4.3, а). Для дифференцируемой строго убывающей функции $f'(x) < 0$. Функция $f(x)$ называется *строго возрастающей* в интервале $X \subseteq R$, если для любых $u, v \in X$, $u < v$ будет $f(u) < f(v)$ (рис. 4.3, б). Для дифференцируемой строго возрастающей функции $f'(x) > 0$.

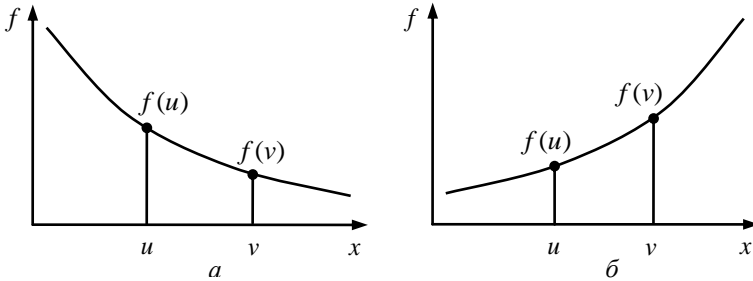


Рис. 4.3. Убывающая и возрастающая функции

Функция $f(x)$ называется *унимодальной*, если существует единственная точка ее минимума x^* и слева от x^* эта функция строго убывает, а справа от x^* строго возрастает (рис. 4.4, а, б). Это означает, что для любых $u, v \in R$, $u < v < x^*$ выполняется неравенство $f(u) > f(v)$, а для любых $u, v \in R$, таких что $x^* < u < v$, выполняется неравенство $f(u) < f(v)$. Для дифференцируемой унимодальной функции $f'(x) < 0$ для любого $x < x^*$ и $f'(x) > 0$ при любом $x > x^*$ (рис. 4.2, а).

Унимодальная функция не обязательно непрерывна (рис. 4.4, б).

Функция $f(x)$ называется *выпуклой* в интервале $X \subseteq R$, если для всех $u, v \in X$ и $\lambda \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v). \quad (4.2)$$

Если это неравенство является строгим для всех $u, v \in R$, $u \neq v$ и $\lambda \in (0; 1)$, то функция $f(x)$ называется *строго выпуклой*. Функция $f(x)$ называется (строго) *вогнутой*, если $-f(x)$ (строго) выпукла.

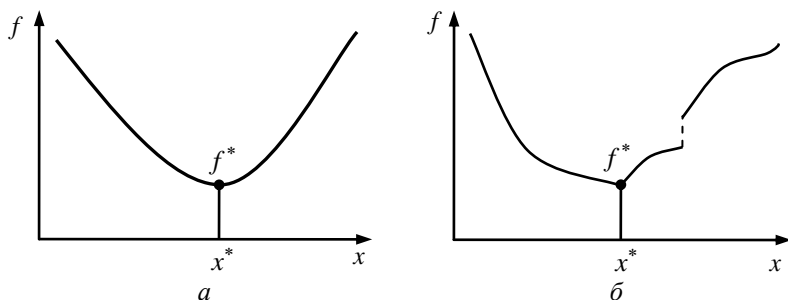


Рис. 4.4. Унимодальные функции

Возьмем $u, v, \lambda \in (0; 1)$ и определим $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$, $y = f(w)$, $z = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$. Точка (w, y) лежит на графике функции, а точка (w, z) – на графике секущей (рис. 4.5, а). Неравенство (4.2) примет вид $y \leq z$. Выпуклость функции $f(x)$ геометрически означает, что любая точка произвольной хорды графика $f(x)$ располагается не ниже соответствующей точки самого графика и любая касательная к графику $f(x)$ расположена не выше графика самой функции. Если $f(x)$ дважды дифференцируемая и строго выпуклая, то $f''(x) > 0$. Для дифференцируемой строго вогнутой функции $f''(x) < 0$ (рис. 4.5, б).

Если строго выпуклая функция имеет минимум, то этот минимум единственный. Такая функция является унимодальной. Однако определению унимодальной функции могут удовлетворять и функции, не являющиеся непрерывными и выпуклыми.

Если функция обладает свойством унимодальности, то локальный минимум является и глобальным минимумом. Если функция не унимодальная, то возможно наличие нескольких локальных минимумов.

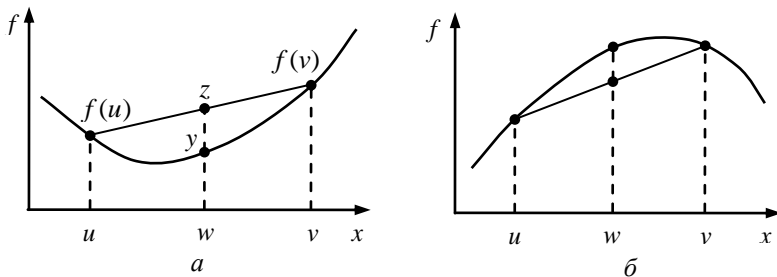


Рис. 4.5. Выпуклая и вогнутая функции

Интервал $[a, b] \subset R$, содержащий неизвестную точку минимума x^* функции $f(x)$, называется *интервалом неопределенности*. Если известно, что $x^* \in [a, b]$, но само значение x^* не известно заранее, то $[a, b]$ – интервал неопределенности.

Одномерный поиск минимума целевой функции обычно состоит из двух этапов: поиска интервала неопределенности и его уменьшения.

При поиске интервала неопределенности из некоторой начальной точки последовательно осуществляются шаги до тех пор, пока значения функции в пробных точках не перестанут уменьшаться. Если найдены такие три различные точки функции $f(x)$, что значение функции во внутренней точке не превосходит ее значений в крайних точках, то крайние точки являются границами интервала неопределенности. Пусть при $a < c < b$ выполняются неравенства $f(a) > f(c)$, $f(c) \leq f(b)$. Тогда $[a, b]$ – интервал неопределенности, что показано на рис. 4.6. Ме-

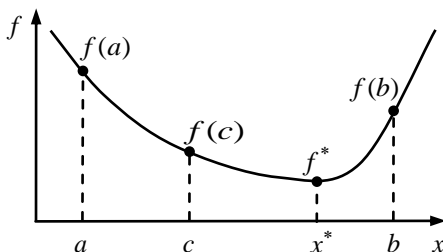


Рис. 4.6. Интервал неопределенности

тоды уменьшения интервала неопределенности основаны на следующей теореме.

Теорема 3. Пусть $[a, b]$ – интервал неопределенности унимодальной функции $f(x)$, минимум которой f^* достигается в точке x^* , а точки u, v лежат внутри интервала, $a < u < v < b$, $f_u = f(u)$ и $f_v = f(v)$. Тогда, если $f_u < f_v$, то $x^* \in [a, v]$, если же $f_u \geq f_v$, то $x^* \in [u, b]$.

Эту теорему называют *правилом исключения интервалов*. Действительно, из нее следует, что если выполняется неравенство $f_u < f_v$, то полуоткрытый интервал $(v, b]$ заведомо не содержит точку минимума x^* и его следует исключить, приняв в качестве нового интервала неопределенности интервал $[a, v]$ меньшей длины, чем исходный интервал $[a, b]$ (рис. 4.7, а). Если же выполняется противоположное неравенство $f_u \geq f_v$, то не содержит точку минимума x^* полуоткрытый интервал $[a, u)$, и его следует исключить, приняв в качестве нового интервала неопределенности меньший интервал $[u, b]$ (рис. 4.7, б).

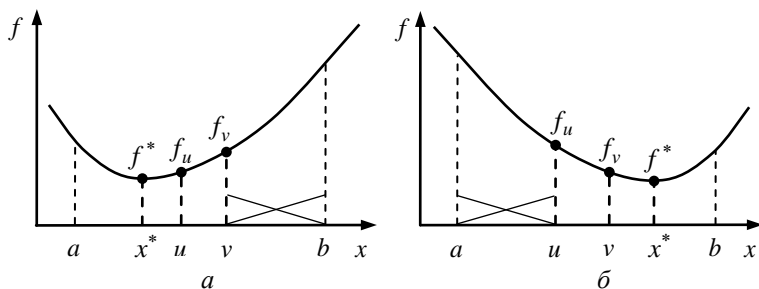


Рис. 4.7. Правило исключения интервалов

По правилу исключения интервалов строят процедуру поиска

точки минимума функции путем вычисления ее значений во внутренних точках текущего интервала неопределенности и последующего исключения частей этого интервала путем сравнения значений функции во внутренних точках. Поиск завершится, когда интервал неопределенности уменьшится до заданной длины. На этом принципе основывается большинство методов одномерного поиска.

4.3. Метод Свенна

Свенн предложил метод удвоения шага для поиска интервала неопределенности $[a, b]$ унимодальной функции $f(x)$, в котором задается начальная точка x_0 и начальный шаг $h > 0$. В точке x_0 вычисляется значение функции $f_0 = f(x_0)$ и выполняется переход к следующей точке $x_1 = x_0 + h$ с вычислением значения функции $f_1 = f(x_1)$. Если $f_1 < f_0$, то выполняются итерации в положительном направлении относительно точки x_0 по рекуррентной формуле удвоения шага

$$x_{k+1} = x_k + 2^k h, \quad k = \overline{1, m} \quad (4.3)$$

с вычислением значений функции $f_k = f(x_k)$ до тех пор, пока не будет получена точка с не меньшим значением функции, чем значение функции в предыдущей

точке: $f_{m-1} > f_m$,

$f_m \leq f_{m+1}$. Соответ-

ствующий процесс вычислений для

значения $m = 2$

представлен на

рис. 4.8. В этом слу-

чае будут определены концы интервала

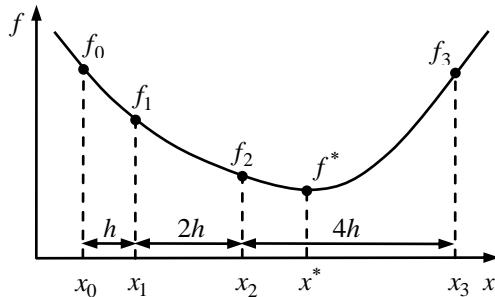


Рис. 4.8. Поиск в положительном направлении

неопределенности $a = x_{m-1}$, $b = x_{m+1}$ со значениями функции $f_a = f_{m-1}$, $f_b = f_{m+1}$ и внутренней точка интервала $c = x_m$ со значением функции $f_c = f_m$. Таким образом, аналогично рис. 4.5 имеем интервал неопределенности $[a, b]$.

Если после начального шага $f_1 \geq f_0$, то направление поиска меняется на противоположное и определяются $x_2 = x_0 - h$, $f_2 = f(x_2)$. Если $f_2 \geq f_0$, то интервал неопределенности найден и $a = x_2$, $b = x_1$, $f_a = f_2$, $f_b = f_1$, $c = x_0$, $f_c = f_0$ (рис. 4.9).

Если же $f_2 < f_0$, то итерации выполняются в отрицательном направлении по формуле удвоения шага:

$$x_{k+1} = x_k - 2^{k-1}h, \quad k = \overline{2, n} \quad (4.4)$$

с вычислением значений функции $f_k = f(x_k)$ до тех пор, пока значения функции не перестанут уменьшаться: $f_{n-1} > f_n$, а $f_n \leq f_{n+1}$, что представлено на рис. 4.10. Таким образом, будет определен интервал неопределенности со значениями концов $a = x_{n+1}$, $b = x_{n-1}$,

$f_a = f_{n+1}$, $f_b = f_{n-1}$ и внутренняя точка интервала $c = x_n$ со значением функции $f_c = f_n$. Итак, методом Свенна определяются границы интервала неопределенности. В любом случае интервал неопределенности $[a, b]$ определяется тремя последними точками поиска метода Свенна x_{n-1} , x_n , x_{n+1} .

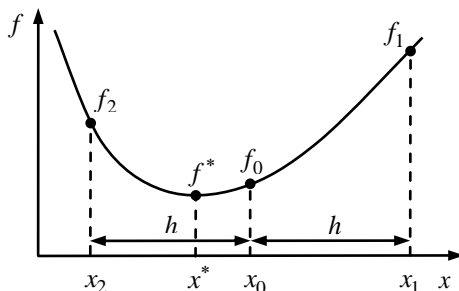


Рис. 4.9. Изменение направления поиска

При этом становятся известными значения функции на концах интервала неопределенности $f_a = f(a)$ и $f_b = f(b)$, а также внутренняя точка интервала c и значение функции в ней $f_c = f(c)$ (рис. 4.5).

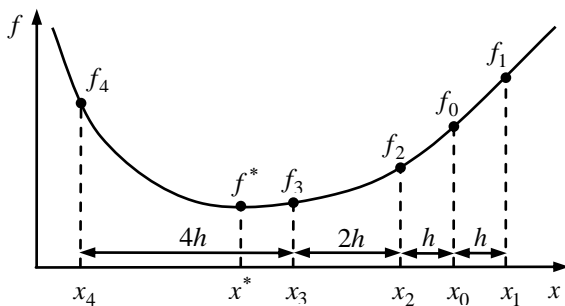


Рис. 4.10. Поиск в отрицательном направлении

В методе Свенна используются только значения целевой функции, поэтому это метод нулевого порядка. Метод Свенна с использованием формул (4.3) и (4.4) можно реализовать по следующему алгоритму.

Алгоритм метода Свенна

Входные параметры: f – целевая функция, c – начальная точка поиска; h – начальный шаг.

Выходные параметры: \mathbf{P} – массив всех точек поиска; \mathbf{F} – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – границы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; c и f_c – внутренняя точка интервала и значение в ней функции.

1. Вычислить $f_c = f(c)$, $b = c + h$, $f_b = f(b)$.
2. Положить $i = 1$, $P_i = c$, $F_i = f_c$, $i = i + 1$, $P_i = b$, $F_i = f_b$.
3. Если $f_b \geq f_c$, то перейти к шагу 8.
4. Положить $a = c$, $f_a = f_c$, $c = b$, $f_c = f_b$, $h = 2h$.
5. Вычислить $b = c + h$, $f_b = f(b)$.
6. Положить $i = i + 1$, $P_i = b$, $F_i = f_b$.

7. Если $f_b < f_c$, то перейти к шагу 4, иначе перейти к шагу 15.
8. Вычислить $a = c - h$, $f_a = f(a)$.
9. Положить $i = i + 1$, $P_i = a$, $F_i = f_a$.
10. Если $f_a \geq f_c$, то перейти к шагу 15.
11. Положить $b = c$, $f_b = f_c$, $c = a$, $f_c = f_a$, $h = 2h$.
12. Вычислить $a = c - h$, $f_a = f(a)$.
13. Положить $i = i + 1$, $P_i = a$, $F_i = f_a$.
14. Если $f_a < f_c$, то перейти к шагу 11.
15. Если $a > b$, то положить $d = a$, $f_d = f_a$, $a = b$, $f_a = f_b$, $b = d$, $f_b = f_d$.
16. Остановиться.

На шагах 1–8 выполняется поиск интервала в положительном направлении, а на шагах 9–14 – в отрицательном направлении.

4.4. Метод деления интервала пополам

Для уменьшения интервала неопределенности функции одной переменной существуют *пассивные* и *последовательные* стратегии поиска. При пассивной стратегии все точки, в которых вычисляются значения функции, определены заранее. В последовательных методах точки поиска выбирают с учетом результатов предыдущих вычислений.

Метод деления интервала пополам. На первой итерации разделим интервал неопределенности $[a, b]$ длины $L = b - a$ пополам точкой $c = (a + b)/2$ и вычислим в ней значение целевой функции $f_c = f(c)$. В результате получим два меньших интервала: $[a, c]$ и $[c, b]$ (рис. 4.11).

Разделим интервал $[a, c]$ пополам точкой $u = (a + c)/2$ и вычислим в ней значение функции $f_u = f(u)$. Если $f_u < f_c$, то исключим интервал $(c, b]$ и получим интервал неопределенности $[a, c]$ с извест-

ной средней точкой (u, f_u) . Если же $f_u \geq f_c$, то разделим интервал $[c, b]$ пополам точкой $v = (c + b)/2$ и вычислим в ней значение целевой функции $f_v = f(v)$.

Если $f_v < f_c$, то исключим интервал $[a, c]$ и получим новый интервал неопределенности $[c, b]$ с известной средней точкой (v, f_v)

(рис. 4.12). Если же

$f_v \geq f_c$, то исключаются крайние интервалы $[a, u]$ и $(v, b]$, а интервал $[u, v]$ становится

новым интервалом неопределенности с известной средней точкой (c, f_c)

(рис. 4.13).

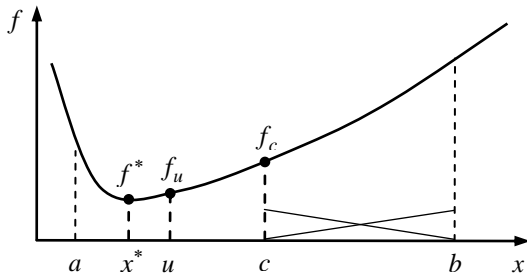


Рис. 4.11. Исключение правого интервала

После двух или трех вычислений целевой функции будет найден новый интервал неопределенности, вдвое меньший исходного интервала, с известной средней точкой.

В последующих итерациях, которые выполняются аналогично первой, но без вычисления средней точки, интервал неопределенности будет делиться пополам уже после одного или двух вычислений целевой функции. Итерации продолжаются до тех пор, пока

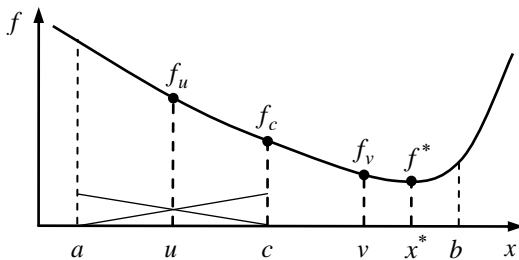


Рис. 4.12. Исключение левого интервала

длина интервала неопределенности не станет меньше заданного значения ε .

В результате n вычислений функции получим конечный интервал неопределенности длины L_n и соответствующую ему эффективность метода r_n :

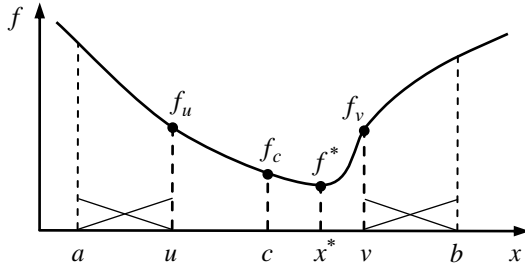


Рис. 4.13. Исключение крайних интервалов

$$\frac{L}{2^{n-1}} \leq L_n \leq \frac{L}{2^{(n-1)/2}}, \quad \frac{1}{2^{n-1}} \leq r_n \leq \frac{1}{2^{(n-1)/2}}.$$

Алгоритм метода деления интервала пополам

Входные параметры: f – целевая функция; \mathbf{P} и \mathbf{F} – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a, b – концы интервала неопределенности; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: \mathbf{P} – массив всех точек поиска; \mathbf{F} – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; c и f_c – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $c = (a+b)/2$, $f_c = f(c)$.
2. Положить $i = i + 1$, $P_i = c$, $F_i = f_c$.
3. Вычислить $u = (a+c)/2$, $f_u = f(u)$, $L = c - a$.
4. Положить $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$.
5. Если $f_u < f_c$, то положить $b = c$, $c = u$, $f_c = f_u$ и перейти к шагу 9.
6. Вычислить $v = (c+b)/2$, $f_v = f(v)$, $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.
7. Если $f_v < f_c$, то положить $a = u$, $c = v$, $f_c = f_v$ и перейти к

шагу 9.

8. Положить $a = u$, $b = v$.

9. Если $L > \varepsilon$, то перейти к шагу 3.

10. Остановиться.

В этом алгоритме на шагах 1 и 3 вычисляются средние точки интервала и левой половины интервала, а на шаге 6 – средняя точка правой половины интервала. Точки сравниваются на шагах 5 и 7.

4.5. Метод золотого сечения

Метод золотого сечения использует принципы золотого сечения и симметрии для двух внутренних точек деления интервала неопределенности $[a, b]$. Золотым сечением называется деление отрезка на две части так, что отношение длин отрезка и его большей части равно отношению длин большей и меньшей частей. Это отношение обозначают через τ и вводят параметр t :

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad t = \frac{1}{\tau} = \tau - 1, \quad t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,6180339887 \ 498949 \dots \quad (4.6)$$

Две первые точки определяются по золотому сечению:

$$x_1 = b - tL, \quad x_2 = a + tL,$$

где $x_1 < x_2$. В этих точках вычисляются значения функции $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$ и применяется правило исключения интервалов, после чего интервал неопределенности уменьшается в τ раз и имеет длину $L_2 = tL$. Оставшаяся внутренняя точка делит новый интервал неопределенности также по золотому сечению.

Если на некоторой итерации известна внутренняя точка x_k интервала $[a_k, b_k]$, то симметричная ей точка находится по формуле

$$x_{k+1} = a + b - x_k.$$

Путем сравнения x_k и x_{k+1} , $f_k = f(x_k)$ и $f_{k+1} = f(x_{k+1})$ по правилу исключения интервалов уменьшается интервал неопределенности.

На каждой итерации метода золотого сечения вычисляется значение функции только в одной внутренней точке, а вторая точка со своим значением функции переходит из предыдущей итерации. После этого применяется правило исключения интервалов, и интервал неопределенности уменьшается в τ раз. Итерации продолжаются до тех пор, пока длина интервала неопределенности не станет меньше допустимой погрешности ε , то есть пока не выполнится условие $L_n < \varepsilon$.

В результате n вычислений функции получим интервал длины L_n и соответствующую ему эффективность метода r_n :

$$L_n = \tau^{n-1} L = \frac{L}{\tau^{n-1}}, \quad r_n = \frac{1}{\tau^{n-1}}.$$

Алгоритм метода золотого сечения

Входные параметры: f – целевая функция; \mathbf{P} и \mathbf{F} – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: \mathbf{P} – массив всех точек поиска; \mathbf{F} – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; x и f_x – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $t = 0,5 \cdot (\sqrt{5} - 1)$, $L = t \cdot (b - a)$, $u = b - L$, $f_u = f(u)$, $v = a + L$, $f_v = f(v)$.

2. Положить $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$, $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.

3. Если $f_u \geq f_v$, то перейти к шагу 7.

4. Положить $b = v$, $v = u$, $f_v = f_u$.

5. Вычислить $L = u - a$, $u = b - L$, $f_u = f(u)$.

6. Положить $i = i + 1$, $P_i = u$, $F_i = f_u$ и перейти к шагу 10.

7. Положить $a = u$, $u = v$, $f_u = f_v$.
8. Вычислить $L = b - v$, $v = a + L$, $f_v = f(v)$.
9. Положить $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.
10. Если $L > \varepsilon$, то перейти к шагу 3.
11. Остановиться.

Параметр t метода золотого сечения следует задавать как можно точнее по формуле (4.6), иначе в результате погрешностей вычислений интервал, содержащий минимум, может быть утерян. Признаком подобной ситуации в приведенном алгоритме является выполнение неравенства $u \geq v$. При этом рекомендуется перейти к шагу 1 алгоритма.

4.6. Метод адаптации шага

Метод адаптации шага разработан харьковским математиком В. Ф. Коропом. Метод заключается в умножении текущего шага поиска на некоторый коэффициент, который вычисляется на основании информации предшествующего поиска.

Для начала работы метода адаптации шага задаются начальная точка x_0 , начальный шаг $h_0 > 0$ и начальное значение множителя шага $r_0 = 0$. В точке x_0 вычисляется значение целевой функции $f_0 = f(x_0)$. Итерация с номером $k + 1$ метода адаптации шага выполняется по результатам итерации с номером $k = 0, 1, 2, \dots$. Вначале итерации вычисляется следующая пробная точка поиска:

$$y_{k+1} = x_k + h_k, \quad g_{k+1} = f(y_{k+1}).$$

Затем определяется лучшая точка поиска путем сравнения нового значения функции g_{k+1} с лучшим значением предыдущих итераций f_k :

$$x_{k+1} = \begin{cases} y_{k+1}, & g_{k+1} < f_k; \\ x_k, & g_{k+1} \geq f_k; \end{cases} \quad f_{k+1} = \begin{cases} g_{k+1}, & g_{k+1} < f_k; \\ f_k, & g_{k+1} \geq f_k. \end{cases}$$

На основании сравнения g_{k+1} с f_k и предыдущего значения множителя шага r_k вычисляется новое значение множителя шага:

$$r_{k+1} = \begin{cases} 2, & g_{k+1} < f_k \wedge r_k \geq 0,5; \\ 0,5, & g_{k+1} < f_k \wedge r_k < 0,5; \\ 0,25, & g_{k+1} \geq f_k \wedge r_k = 2; \\ -0,5, & g_{k+1} \geq f_k \wedge r_k \neq 2. \end{cases}$$

Умножением на это значение величины предыдущего шага находится значение следующего шага:

$$h_{k+1} = r_{k+1}h_k.$$

Итерации продолжаютсЯ до тех пор, пока не выполнится условие $|h_{k+1}| < \varepsilon$, где ε – допустимая погрешность.

Алгоритм метода адаптации шага

Входные параметры: f – целевая функция; x – начальная точка поиска; h – начальный шаг; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: \mathbf{P} – массив всех точек поиска; \mathbf{F} – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; x и f_x – конечная точка и значение функции в ней.

1. Положить $r = 0$ и вычислить $f_x = f(x)$.
2. Положить $i = 1$, $P_i = x$, $F_i = f_x$.
3. Вычислить $y = x + h$, $f_y = f(y)$.
4. Положить $i = i + 1$, $P_i = y$, $F_i = f_y$.
5. Если $f_y \geq f_x$, то перейти к шагу 9.
6. Положить $x = y$, $f_x = f_y$.
7. Если $r \geq 0,5$, то положить $r = 2$, иначе, положить $r = 0,5$.
8. Перейти к шагу 10.
9. Если $r = 2$, то положить $r = 0,25$, иначе, положить $r = -0,5$.

10. Положить $h = h \cdot r$.

11. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 3.

12. Остановиться.

Сравнивая алгоритм метода адаптации шага с алгоритмами методов Свенна и деления интервала пополам, которые совместно решают ту же задачу минимизации целевой функции одной переменной, что и данный метод, можно сделать вывод, что алгоритм метода адаптации шага проще объединения двух указанных алгоритмов. К тому же в методе адаптации шага применяются только простые операции сложения, удвоения шага, деления шага на два и на четыре. Поэтому данный метод является надежным и эффективным на практике.

4.7. Метод квадратичной аппроксимации

Метод квадратичной аппроксимации основан на аппроксимации унимодальной целевой функции $f(x)$ полиномом с последующей интерполяцией точки минимума целевой функции в точке минимума полиномиальной функции.

Методы квадратичной интерполяции основаны на аппроксимации целевой функции квадратичным полиномом

$$q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad (4.7)$$

где коэффициенты α , β и γ определяются по значениям целевой функции и ее производных. Дифференцируя равенство (4.7), имеем

$$q'(x) = 2\alpha x + \beta.$$

По необходимому условию существования экстремума $q'(x) = 0$ получим точку минимума параболы

$$\bar{x} = -\frac{\beta}{2\alpha}. \quad (4.8)$$

Для вычисления этой точки достаточно определить лишь пара-

метры α и β уравнения (4.7).

Метод квадратичной интерполяции с тремя точками основан на аппроксимации функции $f(x)$ по трем ее точкам квадратичным полиномом (4.7) и на интерполяции искомой точки минимума функции x^* точкой минимума этого полинома по формуле (4.8) и значениям функции.

Первые три точки графика функции (a, f_a) , (b, f_b) , (u, f_u) получим по алгоритму метода Свенна, где $[a, b]$ – интервал неопределенности, $a < u < b$, $f_a = f(a)$, $f_b = f(b)$, $f_u = f(u)$. Подставляя в уравнение параболы (4.7) координаты трех известных точек функции, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} q(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma = f_a, \\ q(u) = \alpha u^2 + \beta u + \gamma = f_u, \\ q(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma = f_b. \end{cases}$$

Решая эту систему по правилу Крамера и подставляя найденные значения коэффициентов α и β в формулу (4.8), получим точку минимума аппроксимирующей параболы

$$v = \frac{P(a+u) + Q(b+u)}{2(P+Q)}, \quad (4.9)$$

где

$$P = (u-a)(f_b - f_u), \quad Q = (b-u)(f_a - f_u). \quad (4.10)$$

Первоначальный интервал неопределенности $[a, b]$ делится двумя точками u и v на три части. По правилу исключения интервалов на основании сравнения значений целевой функции во внутренних точках интервала неопределенности $f_u = f(u)$ и $f_v = f(v)$ та часть, которая заведомо не содержит минимум, отбрасывается, и интервал $[a, b]$ уменьшается. Для оставшегося интервала с одной известной

внутренней точкой опять применяется квадратичная интерполяция по формулам (4.9), (4.10). Итерации продолжаются до тех пор, пока расстояние между внутренними точками u и v больше заданной погрешности ε . Метод квадратичной интерполяции с тремя точками построен по рабочим формулам (4.9) и (4.10).

Алгоритм метода квадратичной интерполяции с тремя точками

Входные параметры: f – целевая функция; \mathbf{P} и \mathbf{F} – массивы точек поиска интервала неопределенности и соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; a и b – концы интервала неопределенности; f_a и f_b – значения функции на концах интервала; u и f_u – внутренняя точка интервала и значение функции в ней; ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: \mathbf{P} – массив всех точек поиска; \mathbf{F} – массив соответствующих значений функции; i – количество точек поиска; v и f_v – конечная точка и значение функции в ней.

1. Вычислить $p = (u - a)(f_b - f_u)$, $q = (b - u)(f_a - f_u)$, $s = p + q$.
2. Вычислить $v = 0,5 \cdot [p \cdot (a + u) + q \cdot (b + u)] / s$, $f_v = f(v)$.
3. Положить $h = v - u$, $i = i + 1$, $P_i = v$, $F_i = f_v$.
4. Если $v < u$, то положить $w = u$, $f_w = f_u$, $u = v$, $f_u = f_v$, $v = w$, $f_v = f_w$.
5. Если $f_u < f_v$, то положить $b = v$, $f_b = f_v$, иначе, положить $a = u$, $f_a = f_u$, $u = v$, $f_u = f_v$.
6. Если $|h| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.
7. Остановиться.

Контрольные вопросы

1. Для решения какой задачи предназначены методы одномерного поиска?

2. Дайте определения минимума и максимума функции одной переменной.
3. Сформулируйте необходимый признак существования экстремума функции одной переменной.
4. Сформулируйте необходимый и достаточный признак существования экстремума функции одной переменной.
5. Дайте определение решения задачи одномерной оптимизации.
6. Что представляет собой метод одномерного поиска?
7. Какие функции называются строго убывающими и строго возрастающими?
8. Дайте определение унимодальной функции.
9. Какие функции называются выпуклыми и строго выпуклыми?
10. Какие функции называются вогнутыми и строго вогнутыми?
11. Какая особенность выпуклой функции, имеющей минимум?
12. Дайте определение интервала неопределенности.
13. Из каких этапов состоят методы одномерного поиска?
14. Какое наименьшее количество точек на графике функции надо знать, чтобы определить интервал неопределенности?
15. Какое наименьшее количество точек внутри интервала неопределенности необходимо определить, чтобы уменьшить этот интервал?
16. Сформулируйте правило исключения интервалов.
17. Для чего предназначен метод Свенна?
18. Как изменяется величина шага в методе Свенна?
19. При каком условии заканчиваются вычисления в методе Свенна?
20. Какого порядка метод Свенна?
21. Объясните алгоритм метода Свенна.
22. Какое назначение метода деления интервала пополам?
23. Опишите метод деления интервала пополам.
24. Оцените эффективность метода деления интервала пополам?
25. Какого порядка метод деления интервала пополам?
26. Приведите численное представление золотого сечения.

27. Какое назначение метода золотого сечения?
28. Опишите метод золотого сечения.
29. Как начинается поиск минимума в методе золотого сечения?
30. Как оценивается эффективность метода золотого сечения?
31. Какого порядка метод золотого сечения?
32. Какое назначение метода адаптации шага?
33. Опишите метод адаптации шага.
34. По какому правилу изменяется шаг в методе адаптации шага?
35. Какого порядка метод адаптации шага?
36. Какое назначение метода квадратичной интерполяции с тремя точками?
37. Опишите метод квадратичной интерполяции с тремя точками.
38. Как начинается поиск минимума в методе квадратичной интерполяции с тремя точками?
39. Какого порядка метод квадратичной интерполяции с тремя точками?
40. Какие преимущества и недостатки метода квадратичной интерполяции с тремя точками?

5. ОСНОВЫ МЕТОДОВ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассматриваются вопросы, связанные с основными положениями теории многомерной безусловной оптимизации, и базовые методы. Даются определения минимума, максимума и экстремума функции многих переменных, формулируются необходимые и достаточные условия экстремума. Обосновываются метод наискорейшего спуска, основанный на применении градиента целевой функции, и метод Ньютона с использованием матрицы вторых частных производных функции – матрицы Гессе. Рассматриваются методы сопряженных градиентов Флетчера – Ривса и Полака – Рибьера. Приводятся теоретические основы квазиньютоновских методов Дэвидона – Флетчера – Пауэлла и Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно. Представляются методы прямого поиска Нелдера – Мида и Хука – Дживса. Для всех рассмотренных методов приведены алгоритмы, которые позволяют облегчить понимание методов.

5.1. Теоретические основы многомерной оптимизации

Методы безусловной оптимизации предназначены для вычисления экстремума целевой функции многих переменных $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-столбец вещественных переменных, который также можно трактовать как точку n -мерного пространства $\mathbf{x} \in R^n$. Здесь и далее n – количество переменных, определяющее размерность вектора переменных параметров.

Точка \mathbf{x}^* называется *точкой локального минимума* функции $f(\mathbf{x})$, если существует такое $\delta > 0$, что $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ для всех \mathbf{x} , удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta$.

Точка \mathbf{x}^* называется *точкой строгого локального минимума*

функции $f(\mathbf{x})$, если существует такое $\delta > 0$, что $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$ для всех \mathbf{x} , удовлетворяющих условиям $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ и $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta$.

Точка \mathbf{x}^* называется *точкой глобального минимума* функции $f(\mathbf{x})$, если $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in R^n$.

Точка \mathbf{x}^* называется *точкой строгого глобального минимума* функции $f(\mathbf{x})$, если $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$.

Соответствующее значение функции $f^* = f(\mathbf{x}^*)$ называется ее *локальным минимумом*, *строгим локальным минимумом*, *глобальным минимумом*, *строгим глобальным минимумом* соответственно. Глобальный минимум является также и локальным минимумом.

Аналогично вводятся понятия *точек максимума* и *максимума* функции многих переменных. Минимум и максимум имеют общее название *экстремум*.

Задача безусловной минимизации заключается в минимизации функции $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in R^n$, что представляется в виде:

$$\min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n. \quad (5.1)$$

На вектор \mathbf{x} не накладывается никаких ограничений (условий), поэтому задача (5.1) минимизации функции $f(\mathbf{x})$ называется *задачей безусловной оптимизации* или *задачей оптимизации без ограничений*.

Функция, имеющая несколько минимумов или максимумов, называется *многоэкстремальной*.

Функция $f(\mathbf{x})$ называется *униmodalной*, если она имеет в пространстве параметров R^n единственную точку минимума \mathbf{x}^* .

Решение задачи безусловной минимизации (5.1) представляется в виде:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n.$$

Численные методы решения задачи (5.1) называются *методами*

безусловной минимизации или методами минимизации без ограничений. Существуют классы методов безусловной минимизации:

1. Методы нулевого порядка (прямого поиска), не использующие производные целевой функции $f(\mathbf{x})$.

2. Методы первого порядка, использующие первые частные производные целевой функции $f(\mathbf{x})$.

3. Методы второго порядка, использующие матрицу вторых частных производных целевой функции $f(\mathbf{x})$.

Рассматриваемые в данном пособии методы оптимизации предназначены для минимизации унимодальных функций, а также для вычисления локального минимума целевой функции.

Пусть целевая функция $f(\mathbf{x})$ является дифференцируемой при всех $\mathbf{x} \in R^n$. Вектор-столбец частных производных функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} называется *градиентом* и обозначается

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right)^T. \quad (5.2)$$

В формулах градиент часто обозначают вектором $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$.

Необходимое условие существования экстремума функции нескольких переменных $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}^* представляется теоремой, аналогичной теореме для экстремума функции одной переменной.

Теорема 5.1. Если дифференцируемая функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}^ экстремум, то*

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Итак, для дифференцируемой по всем n переменным функции по этой теореме с учетом (5.2) получим:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.4)$$

Точка \mathbf{x}^* , удовлетворяющая этому условию, называется *стационарной* точкой. Это необходимое условие экстремума, общее для минимума и максимума. Данному условию также удовлетворяют *седловые* точки, которые соответствуют минимуму функции по одним направлениям и ее максимуму по другим.

Локальный минимум функции может достигаться и в точках, в которых первые частные производные функции не существуют. Такие точки называются *критическими*. Точку глобального минимума функции, если она существует, можно искать, сравнивая значения функции во всех стационарных и критических точках.

Необходимое условие оптимальности первого порядка в общем случае не является достаточным условием оптимальности, поскольку стационарная точка не обязана быть решением задачи безусловной минимизации (5.1). Для анализа стационарных точек применяются условия оптимальности второго порядка, основанные на вторых производных целевой функции.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ является дважды дифференцируемой и существует матрица вторых частных производных целевой функции – *матрица Гессе*

$$\nabla^2(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

В силу теоремы Шварца

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Поэтому матрица Гессе является симметрической матрицей и для нее

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})^T = \mathbf{H}(\mathbf{x}).$$

Для строго выпуклой функции матрица Гессе является положительно определенной матрицей, а для строго вогнутой функции матрица Гессе отрицательно определенная.

Для выявления лишних стационарных точек может использоваться необходимое условие оптимальности второго порядка.

Теорема 5.2. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дважды дифференцируема в точке \mathbf{x}^* . Тогда, если \mathbf{x}^* – точка локального минимума функции $f(\mathbf{x})$, то матрица Гессе этой функции в точке \mathbf{x}^* $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ неотрицательно определена:

$$\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} \geq 0, \quad \forall \mathbf{d} \in R^n.$$

Достаточное условие локальной оптимальности содержит характерное усиление требований к матрице Гессе.

Теорема 5.3. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ дважды дифференцируема в точке \mathbf{x}^* . Тогда, если $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ и матрица Гессе функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}^* положительно определена, то есть

$$\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} > 0, \quad \forall \mathbf{d} \in R^n, \quad \mathbf{d} \neq \mathbf{0},$$

то \mathbf{x}^* – точка строгого локального минимума функции $f(\mathbf{x})$.

5.2. Метод наискорейшего спуска

Для обоснования метода наискорейшего спуска представим дифференцируемую целевую функцию $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in R^n$, рядом Тейлора, ограничиваясь слагаемым первого порядка малости

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} + o(\|\Delta \mathbf{x}\|).$$

Пусть \mathbf{x} – это фиксированная начальная точка поиска, $\Delta \mathbf{x}$ – при-

ращение аргумента, которое обеспечивает убывание функции, причем длина этого приращения $|\Delta \mathbf{x}|$ постоянна. При достаточно малых значениях $\Delta \mathbf{x}$, пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости, имеем

$$\Delta f = f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x}. \quad (5.5)$$

Таким образом, изменение функции в первом приближении равно скалярному произведению векторов $\nabla f(\mathbf{x})$ и $\Delta \mathbf{x}$. Пусть θ – угол между этими векторами. Тогда

$$\Delta f = |\nabla f(\mathbf{x})| \cdot |\Delta \mathbf{x}| \cdot \cos \theta.$$

При постоянной длине векторов $\nabla f(\mathbf{x})$ и $\Delta \mathbf{x}$ убывание функции будет наибольшим, если $\cos \theta = -1$, то есть $\theta = \pi$. Это означает, что векторы $\nabla f(\mathbf{x})$ и $\Delta \mathbf{x}$ должны иметь противоположные направления, то есть $\Delta \mathbf{x} = -\lambda \nabla f(\mathbf{x})$, где $\lambda > 0$. Таким образом, направление наиболее быстрого убывания функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} совпадает с *антиградиентом* $-\nabla f(\mathbf{x})$.

Направление антиградиента $-\nabla f(\mathbf{x})$ наиболее быстрого убывания функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} называется *направлением наискорейшего спуска*. Градиент функции $\nabla f(\mathbf{x})$ определяет направление наиболее быстрого возрастания функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} .

Пусть $\Delta \mathbf{x}$ – такой малый шаг вдоль линии уровня $f(\mathbf{x}) = C$, что $f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = C$. Тогда $\Delta f = f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0$. По формуле (5.5) с точностью до бесконечно малых первого порядка $\nabla f(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} = 0$. Это означает, что в любой точке \mathbf{x} направление градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ перпендикулярно линии уровня, проходящей через эту точку, поскольку вдоль этой линии функция постоянна. Это замечание касается и антиградиента $-\nabla f(\mathbf{x})$.

Метод безусловной минимизации целевой функции $f(\mathbf{x})$, в кото-

ром направление поиска определяется антиградиентом $-\nabla f(\mathbf{x})$, называется *методом наискорейшего спуска*. Это означает, что если на некотором шаге процесса оптимизации получена точка \mathbf{x}_k , то поиск минимума функции осуществляется вдоль направления $-\nabla f(\mathbf{x}_k)$. Данный метод является итерационным. Итерации выполняются по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}_k),$$

где λ_k – значение λ , которое доставляет минимум функции одной переменной $\varphi(\lambda) = f(\mathbf{x}_k - \lambda \nabla f(\mathbf{x}_k))$. Обозначая $\mathbf{g}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$, запишем формулы итерации метода наискорейшего спуска:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \lambda_k \mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k - \lambda \mathbf{g}_k). \quad (5.6)$$

Итерации продолжаютсЯ до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность, $\varepsilon > 0$. По формулам (5.6) составим алгоритм метода наискорейшего спуска.

Алгоритм метода наискорейшего спуска

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$.

2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} - \lambda \cdot \mathbf{g})$, $\mathbf{s} = -r \cdot \mathbf{g}$.

3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.

4. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.

5. Остановиться.

В этом алгоритме на шаге 2 выполняется одномерный поиск минимума из текущей точки поиска в направлении антиградиента $-\mathbf{g}$.

Для повышения эффективности одномерного поиска производят масштабирование направления поиска и используют вектор направления $\mathbf{d}^0 = -\mathbf{g}/\|\mathbf{g}\|$ единичной длины. Шаг перехода в следующую точку поиска обозначен через s . Итерации продолжаются, пока длина s больше заданной допустимой погрешности.

Метод наискорейшего спуска называется также *методом Коши*, поскольку известный французский математик Огюстен Луи Коши первым в 1847 году использовал аналогичный алгоритм для решения систем линейных уравнений.

Метод наискорейшего спуска является одним из простейших, наиболее известным и самым фундаментальным методом безусловной минимизации дифференцируемых функций нескольких переменных. Поскольку в нем используется отрицательный градиент как направление спуска, он также называется *градиентным методом*. Это метод первого порядка. Хотя он и эффективнее метода покоординатного поиска, но обладает тем же основным недостатком – низкой эффективностью при минимизации овражных функций.

Метод Коши, как правило, позволяет существенно уменьшить значение целевой функции при движении из точек, расположенных на значительных расстояниях от точки минимума, и поэтому часто используется при реализации других методов в качестве начальной процедуры. Достоинством метода является его простота.

Во многих практических задачах получение аналитического выражения для градиента затруднительно. Если значения целевой функции $f(\mathbf{x})$ определяются в результате имитационного моделирования или с помощью некоторого алгоритма, то аналитическое выражение градиента вообще невозможно. Кроме того, даже построение аналитических выражений не исключает возникновения ошибок. Следовательно, целесообразно иметь возможность численного определения градиента. Градиент и антиградиент можно вычислить двумя способами:

1. С помощью «разности вперед».
2. С помощью центральных разностей.

Простейшей формулой вычисления проекций градиента $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ является конечная разность вперёд

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{\delta}, \quad i = \overline{1, n},$$

где δ – некоторое малое приращение, \mathbf{e}_i – орт i -той оси. Такая аппроксимация непосредственно основана на определении частной производной и при достаточно малых значениях δ даёт весьма точные оценки.

С помощью «разности вперёд» при известном значении функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} для вычисления градиента требуется n дополнительных вычислений функции.

Алгоритм вычисления градиента

Входные параметры: \mathbf{x} и $f_{\mathbf{x}}$ – точка вычисления градиента и значение функции в ней; $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции; δ – параметр приращения аргумента.

Выходные параметры: \mathbf{g} – значение градиента.

1. Вычислить $n = \dim \mathbf{x}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $i = 1$..
2. Положить $y_i = y_i + \delta$.
3. Вычислить $f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$, $g_i = (f_{\mathbf{y}} - f_{\mathbf{x}}) / \delta$.
4. Положить $y_i = x_i$.
5. Если $i < n$, то положить $i = i + 1$ и перейти к п. 2.
6. Остановиться.

5.3. Метод Ньютона

Основная идея метода Ньютона заключается в итеративном использовании квадратичной аппроксимации целевой функции в текущей точке поиска и минимизации этой аппроксимации. Разложим дважды дифференцируемую целевую функцию $f(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора в

фиксированной точке \mathbf{x} при произвольном приращении аргумента $\Delta\mathbf{x}$, ограничиваясь слагаемыми второго порядка малости

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \Delta\mathbf{x} + o(\|\Delta\mathbf{x}\|^2).$$

Пренебрегая слагаемыми выше второго порядка малости и обозначая приращение аргумента $\mathbf{s} = \Delta\mathbf{x}$, градиент $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$, матрицу Гессе $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x})$, получим квадратичную функцию

$$q(\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{s}.$$

Вычислим значение аргумента \mathbf{s} , которое минимизирует эту функцию. Используя формулы векторного дифференцирования

$$\nabla(\mathbf{a}^T \mathbf{x}) = \mathbf{a}, \quad \nabla(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = 2\mathbf{A} \mathbf{x},$$

запишем градиент квадратичной функции

$$\nabla q(\mathbf{s}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{s}.$$

Учитывая необходимое условие минимума $\nabla q(\mathbf{s}) = 0$, получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{s} = -\mathbf{g}(\mathbf{x}). \tag{5.7}$$

Решая эту систему относительно вектора \mathbf{s} , найдем вектор перемещения в точку минимума квадратичной функции

$$\mathbf{s} = -\mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Метод Ньютона минимизирует положительно определенную квадратичную функцию за один шаг из любой начальной точки \mathbf{x}_0

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0 - \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}_0).$$

В случае же минимизации функции общего вида метод Ньютона при-

меняется итерационно. Обозначая в текущей точке поиска \mathbf{x}_k значения градиента $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ и матрицы Гессе $\mathbf{H}_k = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$, получим на основании равенства (5.7) итерационные формулы метода Ньютона для номеров итераций $k = 0, 1, 2, \dots$ для произвольной начальной точки \mathbf{x}_0 :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k, \quad \mathbf{H}_k \mathbf{s}_k = -\mathbf{g}_k. \quad (5.9)$$

При минимизации произвольной целевой функции $f(\mathbf{x})$ формулы метода Ньютона (5.9) могут приводить к возрастанию значений функции. Для повышения эффективности метода Ньютона в выбранном направлении поиска необходимо проводить одномерную минимизацию целевой функции. Это означает, что на каждой итерации метода из точки \mathbf{x}_k необходимо производить одномерный поиск в направлении метода Ньютона $\mathbf{d}_k = \mathbf{s}_k$

$$\lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k).$$

Таким образом, получим формулы метода Ньютона с одномерным поиском:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{H}_k \mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k).$$

Итерации продолжаютсЯ до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность, $\varepsilon > 0$. По приведенным формулам составим алгоритм метода Ньютона с одномерным поиском.

Алгоритм метода Ньютона с одномерным поиском

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{x})$.
2. Решить СЛАУ $\mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{g}$.
3. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.
4. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$.
5. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 1.
6. Остановиться.

По сравнению с предыдущим алгоритмом в этом алгоритме добавлен шаг 3, на котором выполняется одномерный поиск. Для повышения эффективности одномерного поиска производят масштабирование направления поиска и используют вектор направления $\mathbf{d}^0 = \mathbf{d} / \|\mathbf{d}\|$ единичной длины. Шаг перехода в следующую точку поиска обозначен через \mathbf{s} . Итерации продолжаются, пока длина \mathbf{s} больше заданной допустимой погрешности.

Для минимизации дважды дифференцируемой целевой функции $f(\mathbf{x})$, зависящей от вектора \mathbf{x} n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , рассмотренные в этом разделе методы второго порядка – метод Ньютона и его модификации используют матрицу вторых частных производных функции – матрицу Гессе (5.4). Матрица Гессе является симметрической матрицей, для которой симметричные относительно главной диагонали элементы совпадают: $H_{ij}(\mathbf{x}) = H_{ji}(\mathbf{x})$. В силу этого свойства при транспонировании матрица Гессе не изменяется $\mathbf{H}(\mathbf{x})^T = \mathbf{H}(\mathbf{x})$.

В реальных задачах оптимизации целевые функции представляются сложными выражениями или вычисляются алгоритмически, поэтому матрица Гессе в методах второго порядка определяется численно с помощью конечных разностей.

Рассмотрим вычисление матрицы Гессе и градиента. Элементы градиента вычислим по формулам центральных разностей:

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_i)}{2\delta}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Диагональные элементы матрицы Гессе вычисляются по формулам:

$$H_{ii}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - 2f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_i)}{\delta^2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Недиагональные элементы матрицы Гессе вычисляются по формулам:

$$H_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i + \delta \mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_j) + f(\mathbf{x})}{\delta^2},$$

где $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$. Эти формулы, кроме значения целевой функции в точке \mathbf{x} , требуют $n(n+3)/2$ добавочных вычислений функции. При этом точность вычисления градиента и матрицы Гессе существенно зависит от величины приращения аргумента δ , которую связывают со значением «машинного эpsilon» ε_m . Обычно полагают $\delta \geq 10^6 \varepsilon_m$.

5.4. Методы сопряжённых градиентов

Для повышения эффективности методов оптимизации используется понятие сопряженных направлений.

Пусть \mathbf{A} – симметрическая и положительно определенная матрица квадратичной формы размерности $n \times n$.

Определение 5.1. Ненулевые векторы $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k$ пространства R^n при $k < n$ называются \mathbf{A} -сопряженными или просто сопряженными, если для них

$$\mathbf{d}_i^T \mathbf{A} \mathbf{d}_j = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (5.10)$$

Если матрица \mathbf{A} равна единичной матрице \mathbf{E} , то $\mathbf{E} \mathbf{d}_j = \mathbf{d}_j$ и условие сопряженности принимает вид $\mathbf{d}_i^T \mathbf{d}_j = 0$. Это означает, что скалярное произведение двух векторов равно нулю. В этом случае усло-

вие сопряженности двух векторов эквивалентно условию их ортогональности $\mathbf{d}_i \perp \mathbf{d}_j$. В частности, собственные векторы матрицы \mathbf{A} являются сопряженными.

Для положительно определенной квадратичной формы эффективный поиск минимума можно проводить в сопряженных направлениях этой формы. Это утверждение основано на свойствах сопряженных направлений.

Гладкие овражные функции вблизи дна оврага можно аппроксимировать квадратичными функциями. Поэтому свойства сопряженных направлений позволяют находить эффективные направления поиска для любых гладких функций.

Методами сопряженных направлений для минимизации квадратичной функции n переменных называются итерационные методы с последовательным одномерным поиском в n сопряженных направлениях.

Теорема 5.4. Метод сопряженных направлений из любой начальной точки находит минимум положительно определенной квадратичной функции не более чем за n итераций, причем в конечной точке любой итерации градиент ортогонален всем предыдущим направлениям поиска.

В методах сопряженных направлений сопряженные векторы как направления одномерного поиска можно задавать по-разному.

Методами сопряженных градиентов для минимизации квадратичной функции $f(\mathbf{x})$ называются методы сопряженных направлений, в которых сопряженные векторы как направления одномерного поиска определяются на основании градиента целевой функции $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$.

Рассмотрим общие свойства методов сопряженных градиентов. Обозначим $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$. Справедлива следующая теорема методов сопряженных градиентов.

Теорема 5.5. Метод сопряженных градиентов является методом сопряженных направлений, в котором векторы направлений вычисляются по формулам

$$\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \beta_{k-1} \overline{\mathbf{d}_{k-1}}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (5.11)$$

и выполняются свойства

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_i = 0, \quad i = \overline{0, k-1}; \quad \mathbf{d}_k^T \mathbf{g}_k = -\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (5.12)$$

Таким образом, для обеспечения сопряженности векторов направлений в методе сопряженных градиентов достаточно учитывать только предыдущий вектор направления. Формула для вычисления β_{k-1} в (5.11) называется *формулой Флетчера – Ривса*. При этом метод сопряженных градиентов является методом сопряженных направлений со всеми его свойствами. В частности, любой метод сопряженных градиентов минимизирует квадратичную функцию за n итераций.

Важной особенностью формул (5.11) является то, что для построения вектора направления \mathbf{d}_k нужно знать лишь градиенты \mathbf{g}_k и \mathbf{g}_{k-1} в текущей и предыдущей точках соответственно, а также предыдущий вектор направления \mathbf{d}_{k-1} . Это обстоятельство оказывается особенно существенным при применении метода к неквадратичным функциям общего вида.

Метод Полака – Рибьера является методом сопряженных градиентов, как и метод Флетчера – Ривса. Для построения этого метода воспользуемся первым из свойств метода сопряженных градиентов (5.12) в виде $\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_{k-1} = 0, \quad k = \overline{1, n-1}$. Из этой формулы следует, что

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_{k-1} = \mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}).$$

Поэтому формулу Флетчера – Ривса (5.11) для вычисления коэффициента β_{k-1} можно представить в виде

$$\beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (5.13)$$

Эта формула называется *формулой Полака – Рибьера*. На использовании этой формулы и основан метод Полака – Рибьера. В этом методе задается начальная точка \mathbf{x}_0 , в ней вычисляется значение градиента $\mathbf{g}_0 = \nabla f(\mathbf{x}_0)$. В направлении антиградиента производится одномерный поиск и находится следующая точка:

$$\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0). \quad (5.14)$$

Последующие итерации основаны на вычислении градиента $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$, методов сопряженных градиентов (5.11) и формулы Полака – Рибьера (5.13):

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \beta_{k-1} \mathbf{d}_{k-1}, \quad \beta_{k-1} = \frac{\mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1})}{\mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k). \quad (5.16)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность, $\varepsilon > 0$. По формулам (5.14)–(5.16) составим алгоритм метода Полака – Рибьера.

Алгоритм метода Полака – Рибьера

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$ и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$.
2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r \cdot \mathbf{d}$.
3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_x$.
4. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, $\beta = \mathbf{g}_x^T \cdot (\mathbf{g}_x - \mathbf{g}_y) / (\mathbf{g}_y^T \cdot \mathbf{g}_y)$.
5. Положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x + \beta \cdot \mathbf{d}$.

6. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.

7. Остановиться.

Этот алгоритм отличается от алгоритма метода Флетчера – Ривса только вычислением параметра β на шаге 4.

Если все вычисления, включая одномерный поиск, проводятся с абсолютной точностью, то при минимизации квадратичной целевой функции методы Флетчера – Ривса и Полака – Рибьера производят одинаковые последовательности точек поиска $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$, то есть траектории поиска в обоих методах совпадают.

Однако при минимизации целевых функций общего вида в результате большого количества вычислительных экспериментов установлено, что метод Полака – Рибьера гораздо эффективнее метода Флетчера – Ривса.

5.5. Квазиньютоновские методы

Модифицированный метод Ньютона с одномерным поиском для минимизации целевой функции $f(\mathbf{x})$ с $\mathbf{x} \in R^n$ можно представить итерационной формулой

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k, \quad (5.17)$$

где λ_k – минимальное значение параметра одномерной минимизации целевой функции из точки \mathbf{x}_k в направлении $\mathbf{d}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k$, $\mathbf{H}_k = \nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$ – матрица Гессе, $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ – градиент. Модифицированный метод Ньютона – это метод второго порядка. Для многих задач оптимизации вычисление матрицы Гессе, состоящей из вторых частных производных, требует больших затрат машинного времени.

Квазиньютоновские методы также основаны на итерационной формуле (5.17). Однако при вычислении направления одномерного поиска \mathbf{d}_k выполняется аппроксимация обратной матрицы Гессе с

использованием градиента. Таким образом, все квазиньютоновские методы – это методы первого порядка. Квазиньютоновские методы называются также *методами переменной метрики*.

Рассмотрим принципы построения аппроксимационной матрицы для обратной матрицы Гессе $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})^{-1}$. Поскольку матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ симметрические, то начальное приближение матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ задается в виде некоторой симметрической положительно определенной матрицы \mathbf{G}_0 . Положительная определенность матрицы обеспечивает то, что соответствующее направление одномерного поиска $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{G}_0 \mathbf{g}_0$ из начальной точки \mathbf{x}_0 с градиентом целевой функции \mathbf{g}_0 будет направлением спуска. Обычно полагают $\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}$, тогда $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0$ – направление наискорейшего спуска. Из начальной точки \mathbf{x}_0 в направлении \mathbf{d}_0 выполняют одномерный поиск минимума целевой функции:

$$\lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0.$$

В точке \mathbf{x}_1 вычисляется значение градиента целевой функции \mathbf{g}_1 . Для последующих итераций построение аппроксимационной матрицы основано на свойстве квадратичной функции

$$\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k = \mathbf{H}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k).$$

Обозначим

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k. \quad (5.18)$$

Тогда следующее приближение \mathbf{G}_{k+1} должно удовлетворять уравнению

$$\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{p}_k = \mathbf{s}_k. \quad (5.19)$$

Это матрично-векторное уравнение называется квазиньютоновским условием. Оно представляет собой систему n линейных алгебраических уравнений. С учетом свойства симметричности матрица \mathbf{G}_{k+1}

имеет

$$N = n + (n^2 - n)/2 = n(n+1)/2$$

неизвестных элементов. Таким образом, система линейных алгебраических уравнений (5.19) является недоопределенной. Для ее решения необходимо дополнительное условие. Это условие записывается в виде уравнения коррекции

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \Delta\mathbf{G}_k, \quad (5.20)$$

где $\Delta\mathbf{G}_k$ – симметрическая матрица, называемая *поправкой* и формируемая специальным образом так, чтобы выполнялась система линейных алгебраических уравнений (5.19). Различные квазиньютоновские методы отличаются между собой формулами для поправки $\Delta\mathbf{G}_k$.

После определения аппроксимационной матрицы \mathbf{G}_k на последующих итерациях квазиньютоновского метода направление одномерного поиска определяется формулой

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{G}_k \mathbf{g}_k. \quad (5.21)$$

В этом направлении из точки \mathbf{x}_k выполняется одномерный поиск:

$$\lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k), \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k. \quad (5.22)$$

Итерации продолжаются, пока не выполнится условие окончания процесса оптимизации

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq \varepsilon,$$

где ε – допустимая погрешность.

В *методе Девидона – Флетчера – Пауэлла* (ДФП) формула (5.20) имеет вид

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k} - \frac{\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k (\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T}{(\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k}.$$

В методе Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно (БФГШ) формула (5.20) имеет вид

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \left(1 + \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k} \right) \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k} - \frac{\mathbf{s}_k (\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T + \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k}. \quad (5.23)$$

На первой итерации из заданной начальной точки \mathbf{x}_0 выполняется одномерный поиск в направлении антиградиента:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d}_0), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \lambda_0 \mathbf{d}_0. \quad (5.24)$$

Последующие итерации выполняются с учетом формулы (5.23):

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \left(1 + \frac{\mathbf{p}_k^T \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k} \right) \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k} - \frac{\mathbf{s}_k (\mathbf{G}_k \mathbf{p}_k)^T + \mathbf{G}_k \mathbf{p}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{p}_k}, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{G}_k \mathbf{g}_k, \quad \lambda_k = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k), \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k. \quad (5.27)$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| > \varepsilon.$$

По формулам (5.24)–(5.27) составим алгоритм модифицированного метода Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно.

Алгоритм модифицированного метода БФГШ

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка поиска, $f(\mathbf{x})$ – процедура вычисления функции, ε – допустимая погрешность.

Выходной параметр \mathbf{x} – конечная точка поиска.

1. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$ и положить $\mathbf{d} = -\mathbf{g}_x$, $\mathbf{G} = \mathbf{E}$.

2. Вычислить $r = \arg \min_{\lambda} f(\mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = r\mathbf{d}$.

3. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, $\mathbf{g}_y = \mathbf{g}_x$.

4. Вычислить $\mathbf{g}_x = \nabla f(\mathbf{x})$, $\mathbf{p} = \mathbf{g}_x - \mathbf{g}_y$, $\mathbf{v} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{p}$, $\alpha = 1/\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{p}$.

5. Положить $\mathbf{G} = \mathbf{G} + (1 + \alpha \cdot \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{v}) \cdot \alpha \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T - \alpha \cdot (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}^T + \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^T)$.

6. Вычислить $\mathbf{d} = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{g}_x$.

7. Если $\|\mathbf{s}\| > \varepsilon$, то перейти к шагу 2.

8. Остановиться.

В отличие от предыдущего алгоритма метода Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно этот алгоритм не требует решения системы линейных алгебраических уравнений.

5.6. Метод Нелдера – Мида

Метод деформируемого многогранника Нелдера – Мида является эвристическим методом прямого поиска минимума целевой функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n$. Метод Нелдера – Мида является развитием метода симплексного поиска. В данном методе начальный симплекс может деформироваться, изменяя свою форму и эффективно приспосабливаясь к рельефу целевой функции. На множестве точек поиска лучшей считается точка с наименьшим значением целевой функции, а худшей – точка с наибольшим значением функции.

Данный метод состоит из трех основных этапов: построение начального многогранника, отражение худшей вершины многогранника, переход к новому многограннику. Рассмотрим содержание этих этапов.

1. Построение начального многогранника

Начальный многогранник из $n+1$ вершины можно сформировать в виде правильного симплекса как в методе симплексного поиска. Но поскольку в процессе оптимизации целевой функции многогранник деформируется, то нет смысла задавать его в виде регулярного симплекса. Наиболее просто начальный многогранник можно сформировать путём смещения начальной точки \mathbf{x}_0 на заданное расстояние δ в

направлениях ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ осей координат. При этом вершины начального многогранника определяются по формулам:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{X}_j = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{e}_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Во всех вершинах многогранника вычисляются значения целевой функции:

$$F_j = f(\mathbf{X}_j), \quad j = \overline{0, n}.$$

На этом первый этап метода заканчивается, и переходят ко второму этапу.

II. Отражение худшей вершины

1. Определение лучшей и худшей вершин. Определяются индекс l лучшей вершины с наименьшим значением функции и индекс h худшей вершины с наибольшим значением функции:

$$F_l = \min_j F_j, \quad F_h = \max_j F_j.$$

Для лучшей и худшей вершин, а также для значений в них функции вводятся обозначения:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_l, \quad \mathbf{w} = \mathbf{X}_h, \quad f_{\mathbf{x}} = F_l, \quad f_{\mathbf{w}} = F_h.$$

Худшая вершина обозначена через \mathbf{w} .

2. Проверка критерия останова. Определяется размер многогранника по разностям координат всех вершин и лучшей вершины:

$$\delta = \max_{i, j} |X_{ij} - x_i|.$$

Полученное значение размера многогранника δ сравнивается с допустимой погрешностью минимизации целевой функции ε . Если $\delta < \varepsilon$, то вычисления прекращаются, а наилучшая вершина многогранника \mathbf{x} представляет оптимальную точку \mathbf{x}^* с допустимой погрешностью ε . Если же $\delta \geq \varepsilon$, то вычисления продолжаются.

3. Определение центра n лучших вершин. Находится центр вер-

шин многогранника за исключением худшей вершины

$$\mathbf{c} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j - \mathbf{w} \right).$$

4. Отражение худшей вершины. Отражение худшей вершины выполняется по такой же формуле, как и в методе симплексного поиска:

$$\mathbf{y} = 2\mathbf{c} - \mathbf{w}, \quad f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}).$$

В результате получим точку отражения \mathbf{y} , симметричную точке \mathbf{w} относительно точки \mathbf{c} , со значением целевой функции $f_{\mathbf{y}}$ и перейдем к третьему этапу метода.

III. Переход к новому многограннику

1. Растяжение многогранника. Точка отражения сравнивается с лучшей вершиной многогранника. Если $f_{\mathbf{y}} < f_{\mathbf{x}}$, то аналогично отражению выполняется растяжение многогранника по формулам

$$\mathbf{z} = 2\mathbf{y} - \mathbf{c}, \quad f_{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}).$$

Точка растяжения \mathbf{z} , симметричная точке \mathbf{c} относительно точки отражения \mathbf{y} , сравнивается с точкой отражения \mathbf{y} . При этом возможны следующие случаи.

1.1. Удачное растяжение. Если $f_{\mathbf{z}} < f_{\mathbf{y}}$, худшая вершина заменяется точкой растяжения. При этом полагают $\mathbf{X}_h = \mathbf{z}$, $F_h = f_{\mathbf{z}}$. В этом случае новый многогранник будет охватывать большую область в пространстве параметров, чем предыдущий многогранник.

1.2. Неудачное растяжение. Если же $f_{\mathbf{z}} \geq f_{\mathbf{y}}$, то худшая вершина заменяется точкой отражения \mathbf{y} . При этом полагают $\mathbf{X}_h = \mathbf{y}$, $F_h = f_{\mathbf{y}}$.

В любом случае после замены худшей вершины многогранника возвращаются ко второму этапу метода.

2. Удачное отражение. Если точка отражения \mathbf{y} не лучше лучшей

вершины многогранника \mathbf{x} , но за исключением худшей вершины \mathbf{w} существуют и другие вершины, худшие \mathbf{y} , то худшая вершина многогранника \mathbf{w} заменяется точкой отражения \mathbf{y} . Это означает, что

$$f_{\mathbf{y}} \geq f_{\mathbf{x}} \wedge (\exists j: f_{\mathbf{y}} < F_j, j = \overline{0, n}, j \neq h).$$

При этом полагают $\mathbf{X}_h = \mathbf{y}$, $F_h = f_{\mathbf{y}}$ и возвращаются ко второму этапу метода.

3. Сжатие многогранника. Сжатие многогранника выполняется, если точка отражения \mathbf{y} хуже всех вершин многогранника за исключением худшей вершины \mathbf{w} . Это означает, что

$$f_{\mathbf{y}} \geq F_j, \quad j = \overline{0, n}, \quad j \neq h.$$

При этом возможно внешнее или внутреннее сжатие многогранника.

3.1. Внешнее сжатие. Если $f_{\mathbf{y}} < f_{\mathbf{w}}$, то сжатие выполняется по формулам:

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{y}}{2}, \quad f_{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}).$$

Точка сжатия \mathbf{z} оказывается вне многогранника. Если $f_{\mathbf{z}} < f_{\mathbf{y}}$, то худшая вершина заменяется точкой внешнего сжатия $\mathbf{X}_h = \mathbf{z}$, $F_h = f_{\mathbf{z}}$ и возвращаются ко второму этапу метода. В противном случае полагают $\mathbf{X}_h = \mathbf{y}$, $F_h = f_{\mathbf{y}}$ и переходят к редукции многогранника.

3.2. Внутреннее сжатие. Если $f_{\mathbf{y}} \geq f_{\mathbf{w}}$, то формулы сжатия

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{w} + \mathbf{c}}{2}, \quad f_{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z}).$$

Точка сжатия \mathbf{z} лежит внутри многогранника. Если $f_{\mathbf{z}} < f_{\mathbf{y}}$, то худшая вершина заменяется точкой внутреннего сжатия $\mathbf{X}_h = \mathbf{z}$, $F_h = f_{\mathbf{z}}$ и возвращаются ко второму этапу метода. В противном случае перехо-

дят к редукции многогранника.

3.3. Редукция многогранника. Если точка сжатия хуже худшей вершины многогранника или точки отражения, то выполняется редукция, то есть уменьшение многогранника по формулам:

$$\mathbf{X}_j^{(k+1)} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{X}_j^{(k)}}{2}, \quad F_j^{(k+1)} = f(\mathbf{X}_j^{(k+1)}), \quad j = \overline{0, n}, \quad j \neq l.$$

После этого возвращаются ко второму этапу метода.

На этом заканчивается третий этап метода Нелдера – Мида.

Итерацию метода составляют второй и третий этапы. Достоинством данного метода является его гибкость в приспособлении многогранника к сложному рельефу целевой функции, что и обеспечивает эффективность данного метода. Недостатком метода является необходимость хранения массива вершин многогранника $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_n)$, а также то, что эффективность метода резко падает при $n > 10$.

Алгоритм метода Нелдера – Мида

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка, δ – размер начального многогранника, ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: \mathbf{x} и $f_{\mathbf{x}}$ – лучшая точка и значение функции в ней.

1. Положить $n = \dim \mathbf{x}$, $m = n + 1$, $j = 1$.
2. Положить $\mathbf{X}_j = \mathbf{x}$, $X_{jj} = x_j + \delta$, $F_j = f(\mathbf{X}_j)$.
3. Если $j < n$, положить $j = j + 1$ и перейти к п. 2.
4. Положить $\mathbf{X}_m = \mathbf{x}$, $F_m = f(\mathbf{x})$.
5. Положить $l = m$, $f_{\mathbf{x}} = F_m$, $h = m$, $f_{\mathbf{w}} = F_m$, $j = 1$.
6. Если $F_j < f_{\mathbf{x}}$, положить $f_{\mathbf{x}} = F_j$, $l = j$.
7. Если $f_{\mathbf{w}} < F_j$, положить $f_{\mathbf{w}} = F_j$, $h = j$.
8. Если $j < n$, положить $j = j + 1$ и перейти к п. 6.
9. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{X}_l$, $\mathbf{w} = \mathbf{X}_h$.

10. Вычислить $\delta = \max_{i, j} |X_{ij} - x_i|$.

11. Если $\delta < \varepsilon$, остановиться.

12. Вычислить $\mathbf{c} = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{X}_j - \mathbf{w} \right)$.

13. Вычислить $\mathbf{y} = 2\mathbf{c} - \mathbf{w}$, $f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$.

14. Если $-(f_{\mathbf{y}} < f_{\mathbf{x}})$, перейти к п. 18.

15. Вычислить $\mathbf{z} = 2\mathbf{y} - \mathbf{c}$, $f_{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z})$.

16. Если $f_{\mathbf{z}} < f_{\mathbf{y}}$, положить $\mathbf{X}_h = \mathbf{z}$, $F_h = f_{\mathbf{z}}$, иначе, $\mathbf{X}_h = \mathbf{y}$, $F_h = f_{\mathbf{y}}$.

17. Перейти к п. 5.

18. Положить $j = 1$.

19. Если $j \neq h$ и $f_{\mathbf{y}} < F_j$, положить $\mathbf{X}_h = \mathbf{y}$, $F_h = f_{\mathbf{y}}$ и перейти к п. 5.

20. Если $j < m$, положить $j = j + 1$ и перейти к п. 19.

21. Если $f_{\mathbf{y}} < f_{\mathbf{w}}$, положить $\mathbf{w} = \mathbf{y}$, $f_{\mathbf{w}} = f_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{X}_h = \mathbf{y}$, $F_h = f_{\mathbf{y}}$.

22. Вычислить $\mathbf{z} = 0,5(\mathbf{w} + \mathbf{c})$, $f_{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z})$.

23. Если $f_{\mathbf{z}} < f_{\mathbf{w}}$, положить $\mathbf{X}_h = \mathbf{z}$, $F_h = f_{\mathbf{z}}$ и перейти к п. 5.

24. Положить $j = 1$.

25. Если $j \neq l$, положить $\mathbf{X}_j = 0,5(\mathbf{X}_j + \mathbf{x})$, $F_j = f(\mathbf{X}_j)$.

26. Если $j < m$, положить $j = j + 1$ и перейти к п. 25.

27. Перейти к п. 5.

В этом алгоритме используются следующие обозначения: n – размерность вектора переменных; $m = n + 1$ – число вершин многогранника; δ – размер многогранника; j – индекс вершины многогранника; \mathbf{X}_j и F_j – вершина с номером j и значение целевой функ-

ции в ней; l – индекс лучшей вершины; $\mathbf{x} = \mathbf{X}_l$ и $f_{\mathbf{x}} = F_l$ – лучшая вершина и значение целевой функции в ней; h – индекс худшей вершины; $\mathbf{w} = \mathbf{X}_h$ и $f_{\mathbf{w}} = F_h$ – худшая вершина и значение целевой функции в ней; \mathbf{c} – центр n лучших вершин; \mathbf{y} и $f_{\mathbf{y}}$ – точка отражения и значение целевой функции в ней; \mathbf{z} и $f_{\mathbf{z}}$ – точка растяжения или сжатия и значение функции в ней.

В приведенном алгоритме нумерация вершин многогранника несколько отличается от описания метода Нелдера – Мида, где нумерация вершин начинается с индекса 0 и индексы вершин $j = \overline{0, n}$, при формировании начального многогранника начальной точке \mathbf{x}_0 соответствует вершина \mathbf{X}_0 . В алгоритме индексы вершин $j = \overline{1, m}$, а при формировании начального многогранника начальной точке \mathbf{x}_0 соответствует вершина \mathbf{X}_m .

Шаг 1 инициализирует параметры. Шаги 2–4 формируют вершины начального многогранника. Шаги 5–27 составляют итерационный цикл метода. Шаги 5–9 определяют лучшую и худшую вершины. Шаг 10 вычисляет размер многогранника. На шаге 11 проверяется критерий останова. Шаг 12 вычисляет центр вершин многогранника за исключением худшей вершины. Шаги 13–20 выполняют отражение и растяжение многогранника. Шаги 21–27 выполняют сжатие и редукцию многогранника.

5.7. Метод Хука – Дживса

Метод Хука – Дживса является эвристическим методом прямого поиска минимума целевой функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n$. Основная идея метода Хука – Дживса заключается в формировании эффективного шага спуска путем исследования поведения целевой функции в окрестности базовой точки с помощью вспомогательного исследующего поиска.

Исследующий поиск состоит в последовательном изменении ко-

ординат базовой точки \mathbf{x} на заданную величину $\delta > 0$ и в определении лучшей точки в окрестности базовой точки. Исследующий поиск начинается в базовой точке \mathbf{x} со значением целевой функции $f_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ с изменения первой ее координаты на величину δ , что соответствует смещению в направлении орта \mathbf{e}_1 , и перехода к пробной точке $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{e}_1$. Если значение целевой функции в пробной точке $f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$ меньше значения функции в исходной точке $f_{\mathbf{x}}$, то шаг поиска рассматривается как успешный. В противном случае необходимо вернуться в предыдущую точку и сделать шаг в противоположном направлении, полагая $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \delta \mathbf{e}_1$ и $f_{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$, с последующей проверкой значения целевой функции. После перебора всех n координат исследующий поиск завершается в новой базовой точке \mathbf{y} со значением функции $f_{\mathbf{y}}$. Таким образом, координаты лучшей пробной точки изменяются последовательно путем её смещения на шаг δ в прямом и обратном направлениях осей координат. В отличие от метода Нелдера – Мида исследующий поиск не требует запоминания массива точек поиска.

Исследующий поиск, реализующий функцию $(\mathbf{y}, f_{\mathbf{y}}) = R(\mathbf{x}, f_{\mathbf{x}}, \delta)$, представим следующим алгоритмом.

А л г о р и т м и с с л е д у ю щ е г о п о и с к а

Входные параметры: \mathbf{x} и $f_{\mathbf{x}}$ – базовая точка и значение в ней целевой функции, δ – шаг исследующего поиска.

Выходные параметры: \mathbf{y} и $f_{\mathbf{y}}$ – лучшая точка исследующего поиска и значение в ней целевой функции.

1. Положить $n = \dim \mathbf{x}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, $f_{\mathbf{y}} = f_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{u} = \mathbf{y}$, $i = 1$.
2. Вычислить $u_i = y_i + \delta$, $f_{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u})$.
3. Если $f_{\mathbf{u}} < f_{\mathbf{y}}$, положить $y_i = u_i$, $f_{\mathbf{y}} = f_{\mathbf{u}}$ и перейти к п. 6.
4. Вычислить $u_i = y_i - \delta$, $f_{\mathbf{u}} = f(\mathbf{u})$.

5. Если $f_{\mathbf{u}} < f_{\mathbf{y}}$, положить $y_i = u_i$, $f_{\mathbf{y}} = f_{\mathbf{u}}$, иначе, положить $u_i = y_i$.

6. Если $i < n$, положить $i = i + 1$ и перейти к п. 2, иначе, остановиться.

В этом алгоритме n – размерность вектора переменных, i – индекс координаты точки, \mathbf{u} и $f_{\mathbf{u}}$ – пробная точка поиска и значение в ней целевой функции. На шаге 1 инициализируются параметры исследующего поиска. Шаги 2–6 составляют итерационный цикл метода. На шаге 2 выполняется шаг исследующего поиска в прямом направлении. На шаге 3 сравниваются значения функции в пробной точке поиска и лучшей точке. После неудачного поиска в прямом направлении шагом 4 выполняется шаг исследующего поиска в обратном направлении. На шаге 5 сравниваются значения функции в пробной точке поиска и лучшей точке. На шаге 6 проверяется критерий останова.

Метод Хука – Дживса состоит из трех основных этапов: исследующего поиска типа 1 (ИП1), поиска по образцу (ПО), исследующего поиска типа 2 (ИП2). Рассмотрим содержание этих этапов.

Для начала работы метода задается начальная базовая точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ и начальный шаг исследующего поиска $\delta > 0$. В базовой точке вычисляется значение целевой функции $f_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$. Затем переходят к первому этапу метода.

1. Исследующий поиск типа 1 (ИП1)

1. Проверка критерия останова. Значение шага исследующего поиска δ сравнивается с допустимой погрешностью минимизации целевой функции ε по ее переменным. Если $\delta < \varepsilon$, то вычисления прекращаются, а базовая точка \mathbf{x} представляет оптимальную точку \mathbf{x}^* с допустимой погрешностью ε . Если же $\delta \geq \varepsilon$, то вычисления продолжаются.

2. Исследующий поиск. Из базовой точки \mathbf{x} со значением целевой функции $f_{\mathbf{x}}$ проводится исследующий поиск с шагом δ и определяет-

ся лучшая точка поиска \mathbf{y} со значением функции $f_{\mathbf{y}}$.

3. Проверка эффективности поиска. Лучшая точка исследуемого поиска \mathbf{y} сравнивается с базовой точкой \mathbf{x} . Если $f_{\mathbf{y}} < f_{\mathbf{x}}$, то переходят к следующему этапу, в противном случае шаг исследуемого поиска уменьшают, полагая $\delta_{k+1} = \delta_k/2$, и повторяют исследующий поиск с меньшим шагом из той же базовой точки \mathbf{x} .

II. Поиск по образцу (ПО)

Поиск по образцу выполняется отражением базовой точки \mathbf{x} через лучшую точку предыдущего исследуемого поиска \mathbf{y} по формуле $\mathbf{z} = 2\mathbf{y} - \mathbf{x}$, и вычисляется значение функции $f_{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z})$.

III. Исследующий поиск типа 2

1. Замена базовой точки. Выполняется переход к новой базовой точке, в качестве которой задают лучшую точку предыдущего исследуемого поиска 1 или 2. При этом полагают $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $f_{\mathbf{x}} = f_{\mathbf{y}}$.

2. Исследующий поиск. Из точки \mathbf{z} со значением целевой функции $f_{\mathbf{z}}$ проводится исследующий поиск типа 2 с шагом δ и определяется лучшая точка поиска \mathbf{y} со значением функции $f_{\mathbf{y}}$.

3. Проверка эффективности поиска. Лучшая точка исследуемого поиска \mathbf{y} сравнивается с исходной точкой \mathbf{z} . Если $f_{\mathbf{z}} < f_{\mathbf{y}}$, то возвращаются к этапу II, в противном случае шаг исследуемого поиска уменьшают, полагая $\delta_{k+1} = \delta_k/2$, и возвращаются к началу этапа II.

Таким образом, основное отличие исследуемого поиска типа 2 от исследуемого поиска типа 1 заключается в том, что он проводится в точке поиска по образцу \mathbf{z} , а не в базовой точке \mathbf{x} . При удачных исследующих поисках шаг поиска по образцу увеличивается.

Исследующий поиск играет вспомогательную роль в методе Хука – Дживса, а существенное продвижение к оптимальной точке выполняет поиск по образцу. Метод Хука – Дживса, как правило, эффективнее метода Нелдера – Мида при числе переменных $n > 10$.

Алгоритм метода Хука – Дживса

Входные параметры: \mathbf{x} – начальная точка, δ – начальный шаг исследующего поиска, ε – допустимая погрешность.

Выходные параметры: \mathbf{x} и $f_{\mathbf{x}}$ — лучшая точка поиска и значение в ней целевой функции.

1. Положить $f_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\delta = 2\delta$.
2. Если $\delta < \varepsilon$, остановиться.
3. Положить $\delta = \delta/2$.
4. Вычислить $(\mathbf{y}, f_{\mathbf{y}}) = R(\mathbf{x}, f_{\mathbf{x}}, \delta)$ (ИП1).
5. Если $-(f_{\mathbf{y}} < f_{\mathbf{x}})$, перейти к п. 2.
6. Вычислить $\mathbf{z} = 2\mathbf{y} - \mathbf{x}$, $f_{\mathbf{z}} = f(\mathbf{z})$ (ПО).
7. Положить $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $f_{\mathbf{x}} = f_{\mathbf{y}}$.
8. Вычислить $(\mathbf{y}, f_{\mathbf{y}}) = R(\mathbf{z}, f_{\mathbf{z}}, \delta)$ (ИП2).
9. Если $f_{\mathbf{y}} < f_{\mathbf{x}}$, перейти к п. 6, иначе, перейти к п. 2.

В этом алгоритме δ обозначает величину шага исследующего поиска, \mathbf{x} и $f_{\mathbf{x}}$ – лучшая точка предыдущей итерации и значение в ней целевой функции, \mathbf{y} и $f_{\mathbf{y}}$ – лучшая точка исследующего поиска и значение в ней функции, \mathbf{z} и $f_{\mathbf{z}}$ – точка поиска по образцу и значение в ней функции.

На шаге 1 вычисляется значение целевой функции в начальной точке и удваивается шаг исследующего поиска для удобства алгоритмизации метода, поскольку при последующих вычислениях перед исследующим поиском типа 1 шаг всегда делится пополам. Вначале алгоритма полагают $\delta = 2\delta$, чтобы 1-й исследующий поиск был проведён с шагом δ . Шаги 2–9 реализуют итерационный цикл метода. На шаге 2 проверяется критерий останова. На шаге 3 уменьшается шаг исследующего поиска. На шаге 4 проводится исследующий поиск типа 1. На шаге 5 сравниваются значения функции в конечной точке исследующего поиска типа 1 и базовой точке. Шаг 6 выполняет поиск

по образцу. На шаге 7 производится замена базовой точки. Шаг 8 проводит исследующий поиск типа 2. На шаге 9 сравниваются значения функции в конечной точке исследующего поиска типа 2 и новой базовой точке.

Примечание. На шаге 4 выполняется ИП1, а на шаге 8 – ИП2. Очевидно, что ИП2 отличается от ИП1 только тем, что вместо базовой точки \mathbf{x} , $f_{\mathbf{x}}$ взята точка поиска по образцу \mathbf{z} , $f_{\mathbf{z}}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения глобального и локального минимумов и максимумов функции многих переменных.
2. Приведите задачу многомерной безусловной минимизации.
3. Определите решение задачи многомерной минимизации.
4. Дайте определение градиента функции многих переменных.
5. Приведите необходимое условие оптимальности первого порядка существования экстремума функции нескольких переменных.
6. Определите стационарную точку функции многих переменных.
7. Дайте определение матрицы Гессе для целевой функции.
8. Дайте определение направления наискорейшего спуска.
9. Опишите метод наискорейшего спуска.
10. Как задается направление шага в методе Коши?
11. Как вычисляется величина шага в методе Коши?
12. Как заканчиваются вычисления в методе Коши?
13. Какого порядка метод наискорейшего спуска?
14. Составьте алгоритм метода наискорейшего спуска.
15. Укажите способ вычисления градиента функции.
16. Дайте определение метода Ньютона.
17. Приведите различные формулы метода Ньютона.
18. Запишите итерационные формулы метода Ньютона.
19. Опишите метод Ньютона.
20. Как задается направление шага в методе Ньютона?
21. Как вычисляется величина шага в методе Ньютона?

22. Как заканчиваются вычисления в методе Ньютона?
23. Какого порядка метод Ньютона?
24. Запишите формулы метода Ньютона с одномерным поиском.
25. Какого порядка метод Ньютона с одномерным поиском?
26. Укажите способ вычисления матрицы Гессе функции.
27. Составьте алгоритм вычисления матрицы Гессе и градиента.
28. Дайте определение сопряженных направлений.
29. Дайте понятие сопряженных векторов единичной матрицы.
30. Сформулируйте теорему методов сопряжённых направлений.
31. Дайте определение методов сопряженных градиентов.
32. Приведите теорему методов сопряжённых градиентов.
33. Запишите формулу Флетчера – Ривса.
34. Запишите формулу Полака – Рибьера.
35. Запишите итерационные формулы метода Полака – Рибьера.
36. Опишите метод Полака – Рибьера.
37. Какого порядка метод Полака – Рибьера?
38. Чем отличается алгоритм метода Полака – Рибьера от алгоритма метода Флетчера – Ривса?
39. Дайте определение квазиньютоновских методов.
40. Запишите уравнение коррекции для аппроксимации обратной матрицы Гессе.
41. Запишите формулы квазиньютоновских методов.
42. Какого порядка квазиньютоновские методы?
43. Какое другое название квазиньютоновских методов вы знаете?
44. Запишите формулы метода Девидона – Флетчера – Пауэлла.
45. Запишите итерационные формулы модифицированного метода Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно.
46. Какого порядка модифицированный метод Бroyдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно?
47. Опишите метод Нелдера – Мида.
48. Какого порядка метод Нелдера – Мида?
49. Опишите метод Хука – Дживса.
50. Какого порядка метод Хука – Дживса?

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ, АНАЛИЗ И СИНТЕЗ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Рассмотрены уравнения типовых элементов радиоэлектронных схем, которые применяются при математическом моделировании. В радиоэлектронике для создания в нагрузке импульсов тока большой длительности с коротким фронтом широко используются работающие параллельно импульсные источники питания. Приводится математическая модель генератора импульсов напряжения с двумя источниками. Решается задача анализа для генератора импульсов напряжения матричным методом интегрирования. Синтез параметров нескольких высоковольтных источников, обеспечивающих получение в нагрузке заданного импульса тока, выполняется методами оптимизации. Рассмотрен генератор Маркса для создания импульсов высокого напряжения, приведены математические модели генератора Маркса и результаты расчетов переходных процессов.

6.1. Уравнения типовых элементов в радиоэлектронике

При математическом моделировании радиоэлектронных схем используются уравнения типовых элементов. Наиболее часто в радиоэлектронных схемах используются активные сопротивления, индуктивности и емкости.

При моделировании активного сопротивления величины R закон Ома (1.1) представим в виде

$$i = \frac{u}{R}, \quad (6.1)$$

где i – величина тока, протекающего через активное сопротивление; $u = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов или падение напряжения на активном сопротивлении.

При моделировании индуктивности величины L в соответствии с (1.21)

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad (6.2)$$

где i – величина тока, протекающего через индуктивность; u – падение напряжения на индуктивности.

При моделировании емкости величины C в соответствии с (1.26)

$$u = \frac{q}{C}, \quad (6.3)$$

где q – заряд, накопленный в конденсаторе; u – падение напряжения переменного тока на конденсаторе. Поскольку величина заряда q на пластинах конденсатора определяется величиной переменного тока i , протекающего за время t , то

$$q = \int_0^t i(t) dt. \quad (6.4)$$

Дифференцируя равенства (6.3) и (6.4), получим уравнение для модели прохождения переменного тока через конденсатор в виде

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (6.5)$$

Уравнения (6.1), (6.2) и (6.5) совместно с законами Кирхгофа (1.6) и (1.7) позволяют строить математические модели различных радио-электронных схем.

6.2. Математическая модель генератора импульсов тока

При радиофизических исследованиях для создания в нагрузке импульсов тока большой длительности и с коротким фронтом широко используют генераторы импульсов тока (ГИТ), содержащие работаю-

щие параллельно импульсные источники питания (ИИП). При параллельной работе импульсных источников снижается необходимая суммарная энергия, а зависимостей, позволяющих определить параметры источников по известному аналитическому выражению импульса тока в нагрузке, не существует. Однако выбор параметров нескольких высоковольтных ИИП, обеспечивающих получение в нагрузке заданного импульса тока с учетом ограничений, накладываемых на параметры из условий реализуемости, требует решения задач анализа и синтеза для соответствующей радиоэлектронной схемы.

Рассмотрим работу двух ИИП, включаемых параллельно на индуктивно-активную нагрузку с целью получения в ней заданного (эталонного) импульса тока. При составлении математической модели полагаем, что включение ИИП на нагрузку одновременное, параметры разрядного контура линейны и постоянны, импульсные источники представляются последовательной RLC -цепочкой.

На рис. 6.1 приведена соответствующая расчетная схема, где C_1, C_2 – емкости первого и второго ИИП; L_1, L_2 – паразитные и развязывающие индуктивности ИИП; L_3 – индуктивность нагрузки; R_1, R_2 – активные демпфирующие и формирующие сопротивления источников; R_3 – активное сопротивление нагрузки; U_1, U_2 – напряжения на емкостях источников; i_1, i_2 – разрядные токи ИИП.

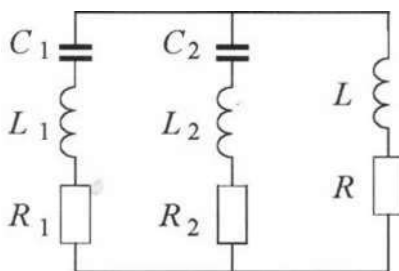


Рис. 6.1. Расчетная схема генератора импульсов тока

В матричной форме система дифференциальных уравнений, описывающая переходный процесс в схеме на рис. 6.1, получена с помощью законов Кирхгофа:

$$\mathbf{D} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{X}, \quad (6.6)$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} L_1 & -L_2 & 0 & 0 \\ L_3 & L_2 + L_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -R_1 & R_2 & -1 & 1 \\ -R_3 & -R_2 - R_3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ U_1(t) \\ U_2(t) \end{pmatrix}.$$

Введением матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$ преобразуем систему (6.6) к виду Коши (2.29):

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \quad i = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (6.7)$$

где $\mathbf{X}_0 = (0 \ 0 \ U_{10} \ U_{20})^T$ – вектор начальных условий; $i = i_1 + i_2$ – ток в нагрузке; $\mathbf{C} = (1 \ 1 \ 0 \ 0)$ – вектор наблюдения.

6.3. Анализ процессов в генераторе импульсов тока

Пусть эталонный импульс тока в нагрузке, который обеспечивает генератор на рис. 6.1, задан функцией

$$i_e(t) = I_m(e^{-100t} - e^{-600000t}), \quad (6.8)$$

где I_m – максимальное значение тока. Длительность фронта этого импульса $\tau_f = 5 \cdot 10^{-6}$ с, длительность полного импульса $\tau_i = 3 \cdot 10^{-2}$ с. Большое отличие τ_i и τ_f объективно приводит к жесткости СДУ

(6.7). При этом время ее решения методом Рунге – Кутты четвертого порядка требует использования малого шага интегрирования и больших затрат машинного времени. С целью сокращения времени решения системы (6.7) применим матричный метод интегрирования. Для этого выберем $h = \tau_f / 100$, $H_0 = 2^5 h$ и определим матричную экспоненту $\Phi(\mathbf{A}H_0) = e^{\mathbf{A}H_0}$ по алгоритму 2.2: $\Phi(\mathbf{A}H_0) = \Phi(2^5 \mathbf{A}h)$.

Решение СДУ (6.7) в L точках дискретизации $t_{k+1} = t_k + H_m$, $k = \overline{0, L-1}$ получим по формуле (2.33):

$$\mathbf{X}_{k+1} = \Phi(\mathbf{A}H_m)\mathbf{X}_k, \quad k = \overline{1, L-1}. \quad (6.9)$$

где k – номер текущей точки; m – номер интервала с постоянным шагом интегрирования, который от нуля увеличивается на единицу через каждые 5 шагов, после чего шаг удваивается:

$$H_{m+1} = 2H_m, \quad \Phi(\mathbf{A}H_{m+1}) = \Phi(\mathbf{A}H_m)^2. \quad (6.10)$$

Такой алгоритм матричного метода решения СДУ позволил уменьшить время ее интегрирования по сравнению с методом Рунге – Кутты на два порядка, что дало возможность поставить задачу синтеза параметров схемы включения ИИП, представленной на рис. 6.1.

6.4. Синтез параметров генератора импульсов тока

Введем вектор неизвестных параметров:

$$\mathbf{x} = (C_1 \ C_2 \ L_1 \ L_2 \ L_3 \ R_1 \ R_2 \ R_3 \ U_{10} \ U_{20}). \quad (6.11)$$

Из условий реализуемости на параметры схемы и начальные напряжения U_{10} и U_{20} наложены следующие ограничения:

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad L_1 = L_p, \quad L_2 > L_p, \quad L_3 = 100 \text{ мкГ}, \quad (6.12)$$

$$R_1 > R_d, \quad R_2 > R_d, \quad R_3 > 5 \text{ Ом}, \quad U_{10} < 0, \quad U_{20} < 0, \quad W < 2,5 \text{ МДж}, \quad (6.13)$$

где $L_p = 2 \text{ мкГ}$ – минимально возможное значение паразитной индуктивности первого ИИП; $R_d = 0,2 \text{ Ом}$ – минимально возможное значение демпфирующего сопротивления первого ИИП; W – суммарная запасаемая энергия источников: $W = 0,5(C_1 U_{10}^2 + C_2 U_{20}^2)$.

В качестве критериев оптимальности выберем и проведем сравнение суммарных критериев:

$$f_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^L |i_{ek} - i_k(\mathbf{x})|^k, \quad (6.14)$$

где $i_{ek} = i_e(t_k)$ и $i_k = i_1(t_k) + i_2(t_k)$ – значения эталонного и фактического токов в нагрузке в k -й точке дискретизации; L – число таких точек в интервале интегрирования; j – показатель степени суммарного критерия.

Выбор этих критериев обусловлен тем, что вследствие отличия τ_i и τ_f более чем на три порядка интегральные по времени критерии и критерии с постоянным шагом дискретизации слабо чувствительны к значительным отличиям импульсов на фронте, а применение в критериях (6.14) весовых коэффициентов, учитывающих влияние отдельных точек наблюдения, не является необходимым. Чувствительность критериев (6.14) на фронте импульса повышается за счет увеличения шага дискретизации на спаде импульса. Численные эксперименты показали, что количество точек дискретизации на фронте импульса должно составлять примерно $0,1L$.

Теперь задачу оптимизации параметров импульсной схемы на рис. 6.1 можно сформулировать как задачу нелинейного программирования, состоящую в определении значений параметров (6.11), которые минимизируют критерии (6.14) при выполнении ограничений (6.12) и (6.13). Из известных методов нелинейного программирования для решения этой задачи выбран метод скользящего допущения, так как он не требует вычисления производных целевой функции и учитывает

ограничения на параметры как в виде равенств, так и неравенств.

Значения параметров оптимизации в случае жестких систем отличаются друг от друга на несколько порядков, поэтому для более эффективной работы процедуры метода скользящего допуска перед обращением к ней параметры нормируются относительно своих начальных значений, а критерии оптимальности – относительно I_m^j . Для предотвращения аварийных остановов в стандартных программах обращения и перемножения матриц при интегрировании СДУ масштаб времени изменен таким образом, чтобы обеспечить отличие значений элементов матриц D и B не более чем на два порядка.

Оптимизация параметров, параллельно работающих на индуктивно-активную нагрузку двух импульсных источников питания, проводилась при различных критериях и условиях завершения процесса оптимизации. Выход из процедуры оптимизации осуществлялся после того, как погрешность $\Delta f_j(\mathbf{x})$ вычисления минимального значения $f_j(\mathbf{x}^*)$ удовлетворяла условию

$$\Delta f_j(\mathbf{x}) < L^{-1} 100^{-j} \sum_{k=0}^L |i_{ek}|^k. \quad (6.15)$$

Результаты минимизации сформулированных суммарных критериев оптимальности (6.14) приведены в табл. 6.1. Значения составляющих начального вектора оптимизируемых параметров \mathbf{x}_0 выбраны следующими: $C_1 = 15$ мкФ, $C_2 = 2000$ мкФ, $L_1 = 2$ мкГ, $L_2 = 400$ мкГ, $L_3 = 100$ мкГ, $R_1 = 40$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, $U_{10} = -250$ кВ, $U_{20} = -20$ кВ, причем максимальное значение заданного тока $I_m = 5$ кА, а в условии (6.15) положено $N = 100$.

Минимальное количество вычислений критерия оптимальности при $j = 4$ объясняется увеличением с ростом j рельефности поверхности критерия оптимальности в пространстве параметров.

Таблица 6.1 – Результаты синтеза генератора импульсов тока

Характеристики процесса оптимизации		Значения оптимальных параметров ИИП при степенях j критерия оптимальности					
		1	2	3	4	5	6
\mathbf{x}^*	C_1 , мкФ	22,7	40,4	58,6	40,2	41,3	33,3
	C_2 , мкФ	1650	1471	1323	1533	1671	1545
	L_1 , мкГ	1,99	2,00	2,00	1,99	2,00	1,99
	L_2 , мкГ	239	747	568	498	124	510
	L_3 , мкГ	100	100	100	100	100	100
	R_1 , Ом	46,0	50,0	41,1	47,1	31,6	49,0
	R_2 , Ом	1,00	1,75	1,84	1,54	0,84	1,31
	R_3 , Ом	5,00	5,00	5,00	4,98	4,99	4,98
	U_{10} , кВ	-343	-307	-269	-303	-303	-312
	U_{20} , кВ	-24,1	-25,5	-24,0	-24,7	-22,3	-25,3
$W(\mathbf{x}^*)$, кДж		2233	2389	2499	2320	2324	2113
$F_j(\mathbf{x}_0)$		11,5	2,59	0,69	0,20	0,06	0,02
$F_j(\mathbf{x}^*)$		0,3	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-10}$	$7 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-13}$
Количество итераций		213	314	295	142	211	184
Количество вычислений $F(\mathbf{x}^*)$		421	552	566	280	418	416
Количество вычислений ограничений		6957	9347	1059 2	4817	4352	6349

Предпочтительность суммарного критерия четвертой степени подтверждена численными экспериментами для различных форм эталонного импульса.

Использование двух параллельных ИИП вместо одного энергетически, а значит, и экономически более выгодно. Так, энергия одного источника питания имела бы значение в 4 раза больше, чем необходимая энергия двух импульсных источников.

На рис. 6.2 представлены графики импульсов тока в нагрузке, где 1 – импульс тока, получаемый при начальных значениях параметров x_0 ; 2 – импульс, заданный формулой (6.8) и совпадающий с ним расчетный импульс при оптимальных параметрах ИИП x^* , т. к. при принятом масштабе они неразличимы.

Таким образом, показано, что задача оптимального выбора параметров нескольких работающих на нагрузку ИИП с учетом ограничений параметров может быть сформулирована как задача нелинейного программирования.

Использование системного метода решения жестких СДУ на два порядка уменьшает время их интегрирования, что позволяет поставить задачу оптимизации параметров ИИП.

Примененный для оптимизации метод скользящего допуска

дает возможность успешно решать сформулированную задачу, учитывая любые ограничения на параметры.

Введенное общее условие окончания процесса оптимизации обеспечивает практически полное совпадение заданного и оптимального импульсов тока при использовании любого суммарного критерия оп-

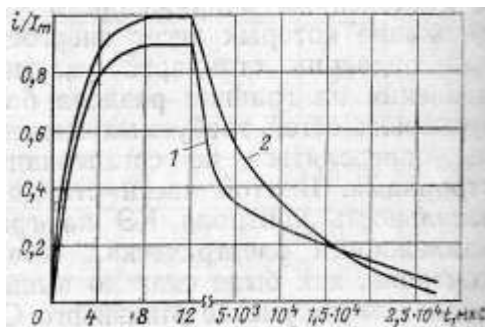


Рис. 6.2. Импульсы тока в нагрузке генератора

тимальности.

Проведенное сравнение сформулированных суммарных критериев оптимальности позволяет сделать вывод о предпочтительности критерия четвертой степени.

6.5. Генераторы импульсов напряжения

Генератор Маркса – генератор импульсного высокого напряжения, принцип действия которого основан на заряде электрическим током соединённых параллельно через резисторы конденсаторов, соединяющихся после заряда последовательно при помощи различных коммутирующих устройств, например, газовых разрядников или триггеров (рис. 6.3 и 6.4). Таким образом, выходное напряжение увеличивается пропорционально количеству соединённых конденсаторов.

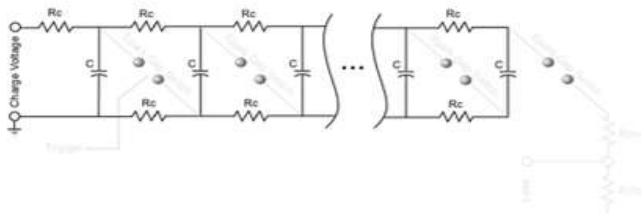


Рис. 6.3. Общая схема и стадия заряда генератора Маркса

После зарядки конденсаторов запуск генератора обычно производится после срабатывания первого разрядника (на рис. 6.3 обозначенного как *trigger* (триггер)). После срабатывания триггера перенапряжение на разрядниках заставляет срабатывать все зарядники практически одновременно, чем и производится последовательное соединение заряженных конденсаторов.

Генераторы Маркса позволяют получать импульсные напряжения от десятков киловольт до десятка мегавольт. Частота импульсов, вырабатываемых генератором Маркса, зависит от мощности генератора в импульсе – от единиц импульсов в час до нескольких десятков герц.

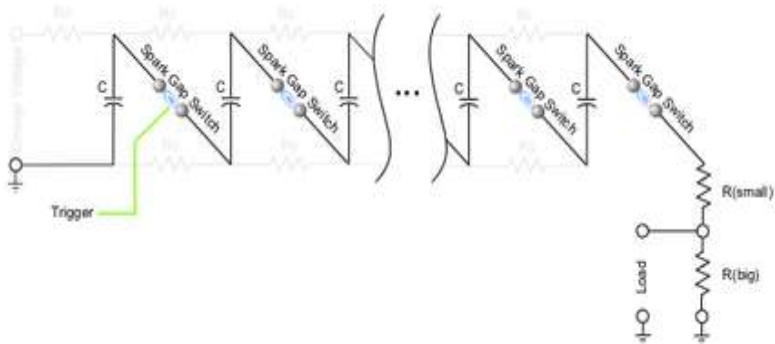


Рис. 6.4. Стадия разряда генератора Маркса

Энергия в импульсе генераторов Маркса широко варьируется – от дециджоулей до десятков мегаджоулей.

Коаксиальная конструкция генератора Маркса является источником импульсов с фронтом 5 нс. Диэлектрики конденсаторов, обкладки которых соединены резисторами, выполнены из скрученной высокоомной проволоки. Разрядные промежутки расположены так близко, как возможно, и самосинхронизируются вспышками ультрафиолетового излучения. Питающее напряжение подводится снизу, высокое снижается с цилиндра наверху.

Малые лабораторные генераторы Маркса до напряжений в 100–200 киловольт могут выполняться с воздушной изоляцией, более мощные генераторы Маркса с более высокими рабочими импульсными напряжениями могут выполняться с вакуумной, газовой (газ с высокой электрической прочностью под давлением, например элегаз), масляной изоляцией, препятствующей как непосредственным паразитным пробоям воздуха, так и стеканию зарядов с установки вследствие коронных разрядов.

В случае выполнения генераторов Маркса с вакуумной, газовой или масляной изоляцией генератор обычно помещается в герметичную вакуумированную или заполненную указанными веществами ёмкость. В некоторых конструкциях генераторов Маркса применяют гермети-

зацию конденсаторов и резисторов, но расположение газовых разрядников на воздухе.

В качестве разрядников применяют воздушные разрядники (например, с глушителями звука) на напряжение до 100 кВ и ток до 1000 кА, вакуумные разрядники, игнитроны, импульсные водородные тиратроны. Тиристоры в качестве коммутирующих элементов практически не применяются в связи с малыми значениями обратного напряжения и трудностями синхронизации их срабатывания в случае последовательного соединения. Все виды разрядников отличаются теми или иными различными недостатками – эрозией электродов, недостаточным быстродействием, незначительным сроком службы и так далее, либо дороги, как, например, водородные тиратроны.

Для снижения потерь в качестве защитных и разделительных (зарядных) элементов генератора вместо резисторов в некоторых случаях применяют высокодобротные дроссели. В некоторых конструкциях генераторов в качестве резисторов применяют жидкостные сопротивления (резисторы).

Генератор Маркса, использующий жидкостные конденсаторы на деионизированной воде, улучшает технологичность конденсатора, уменьшает длину соединительных проводников, а также позволяет значительно уменьшить общее время срабатывания разрядников благодаря их облучению излучением разрядников, сработавших чуть раньше.

Основной недостаток генератора Маркса состоит в том, что при уровне зарядного напряжения порядка $(50-100) \cdot 10^3$ В он должен содержать 5–8 ступеней с таким же количеством искровых коммутаторов, что связано с ухудшением удельных энергетических и массогабаритных параметров и снижением КПД. В режиме разряда генератора Маркса потери складываются из потерь в конденсаторах и искровых промежутках и сопротивления нагрузки, например, канала разряда в главном разрядном промежутке. Для уменьшения потерь стремятся снижать сопротивления искровых коммутаторов генератора импульсного напряжения (ГИН), например, помещением их в электрически

прочный газ под давлением, применяют конденсаторы с повышенной добротностью, оптимизируют иницирование пробоя для достижения минимальных пробивных градиентов и т. п.

Генератор импульсов высокого напряжения Маркса используется в разнообразных исследованиях в науке, а также для решения разнообразных задач в технике. В некоторых установках генераторы Маркса работают и в качестве генераторов импульсного тока.

В некоторых установках объединяют два генератора Маркса в единую установку в которой многоступенчатый ГИН с конденсаторами небольшой общей ёмкостью обеспечивает высокий потенциал напряжения, необходимый для развития разряда основного малоступенчатого ГИТ с конденсаторами большой общей ёмкости, со сравнительно невысоким потенциалом, но большой силой тока в продолжительном импульсе.

Например, генераторы Маркса применяются в ядерных и термоядерных исследованиях для ускорения различных элементарных частиц, создания ионных пучков, создания релятивистских электронных пучков для иницирования термоядерных реакций.

Генераторы Маркса применяются в качестве мощных источников накачки квантовых генераторов, для исследований состояний плазмы, для исследований импульсных электромагнитных излучений.

В военной технике генераторы Маркса в комплексе с виркаторами в качестве генераторов излучения применяются для создания портативных средств радиоэлектронной борьбы, в качестве электромагнитного оружия, действие которого основано на поражении целей радиочастотным электромагнитным излучением.

В промышленности генераторы Маркса наряду с другими источниками импульсных напряжений и токов применяются в электрогидравлической обработке материалов, дроблении, бурении, уплотнении грунтов и бетонных смесей.

6.6. Математическая модель генератора импульсов напряжения

При математическом моделировании генератора импульсов напряжения необходимо учитывать множество паразитных элементов. Предлагается схема генератора Маркса с n -ступенями, представленная на рис. 6.5.

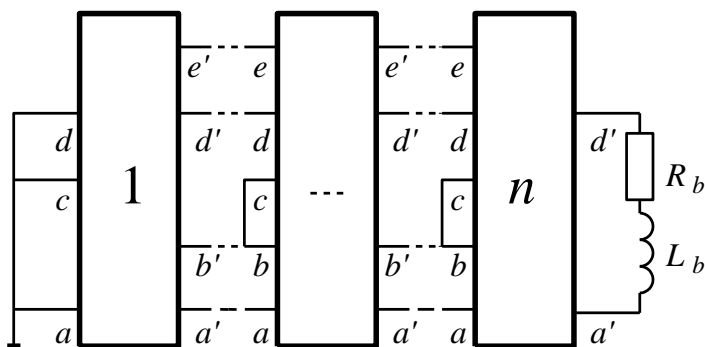


Рис. 6.5. Схема многокаскадного генератора

Здесь R_b и L_b – эквивалентные параметры нагрузки. Каждый каскад является многополюсником, электрическая цепь которого представлена на рис. 6.6. В этой цепи обозначены эквивалентные параметры генератора: R_s , L_s , C_s – эквивалентные параметры конденсатора; R_f , C_f – параметры коммутатора ступени; R_d , L_d – параметры демпфирующего сопротивления; R_l , L_l – параметры зарядного сопротивления; R_e , L_e – параметры разрядного сопротивления; C_1 – емкость элементов, имеющих зарядный потенциал в течение времени заряда; C_2 – емкость элементов, имеющих нулевой потенциал в течение времени разряда; K_1 – емкость элементов, между ступенями,

имеющих зарядный потенциал в течение времени заряда; K_2 – емкость элементов, между ступенями, имеющих нулевой потенциал в течение времени разряда.

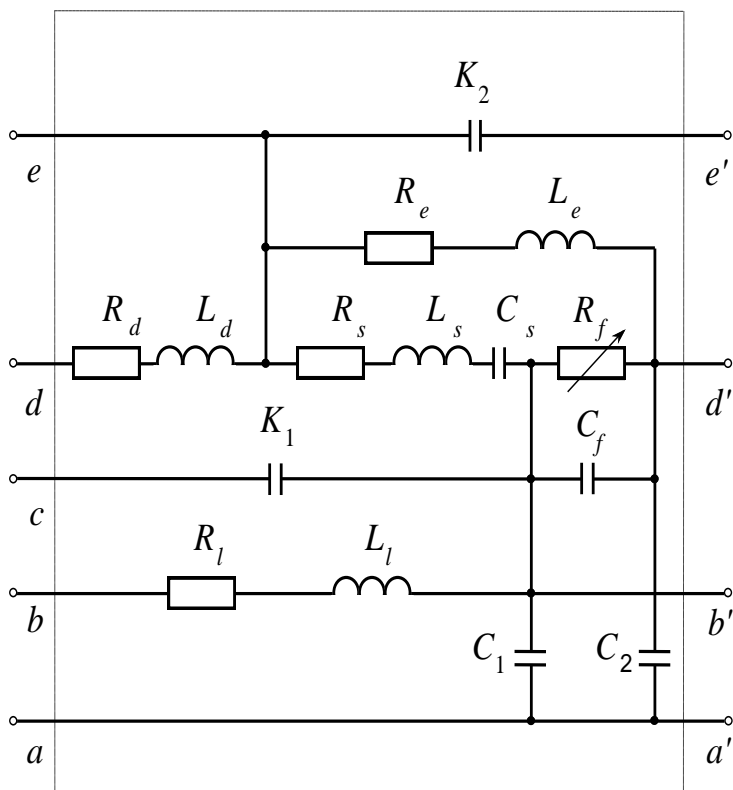


Рис. 6.6. Электрическая схема каскада

Искровой промежуток является коммутатором ступени. Резистивная модель искрового промежутка обобщает известные модели искры в сжатом газе Теплера, Ромпе – Вайцеля, Брагинского:

$$R = \frac{d}{k \cdot I^\delta}, \quad I = \int |i|^\gamma dt + C,$$

где R – сопротивление искрового промежутка; d – размер промежутка; k , δ , γ – параметры, которые определяются моделями искры; i – ток в искровом промежутке; C – константа, которая определяется начальным значением сопротивления.

Используя законы Кирхгофа и рассматривая уравнения для последней ступени, можно установить они разрешимы относительно производных. Полагая, что j – номер каскада, отметим индексами «+» и «-» переменные для последующего и предыдущего каскадов соответственно. Принимая во внимание, что $u_{c2} = u_{cf} + u_{c1}$ для всех ступеней и обозначая

$$u_{sf} = \begin{cases} u_{K2}, & j = \overline{n}, \\ u_{K2} + u_d^+, & j = \overline{n-1, 1}, \end{cases} \quad u_d = \begin{cases} u_{C2}^- + u_{sf} - u_{C2}, & j = \overline{n, 2}, \\ u_{sf} - u_{C2}, & j = 1, \end{cases}$$

получим уравнения для токов:

$$\begin{aligned} di_b/dt &= (u_{C2} - R_b \cdot i_b)/L_b, \quad j = n, \\ di_s/dt &= (u_{Cf} - u_{sf} - u_{Cs} - R_s \cdot i_s)/L_s, \quad j = \overline{n, 1}, \\ di_d/dt &= (u_d - R_d \cdot i_d)/L_d, \quad j = \overline{n, 1}, \\ di_e/dt &= (u_{sf} - R_e \cdot i_e)/L_e, \quad j = \overline{n, 1}, \\ di_l/dt &= (u_{C1}^- - u_{C1} - R_l \cdot i_l)/L_l, \quad j = \overline{n, 2}. \end{aligned}$$

Таким образом, получена модель генератора импульсов напряжения в виде СДУ. Значения параметров генератора приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2 – Параметры генератора импульсов напряжения

Параметр	Значение	Параметр	Значение
C_s , нФ	120	R_s , Ом	0,05
C_f , пФ	12	R_d , Ом	0,001
C_1 , пФ	9	R_e , Ом	75
C_2 , пФ	7,7	R_l , Ом	600
K_1 , пФ	58	R_b , Ом	390
K_2 , пФ	3,8	u_s , кВ	100
L_s , нГ	10,2	k_T , В с/м	0,005
L_d , нГ	5	d , мм	8
L_e , нГ	6,5	u_{max} , кВ	1200
L_l , нГ	100	i_{max} , кА	4,6
L_b , нГ	600	τ , нс	10

6.7. Анализ процессов в генераторе импульсов напряжения

Представленная модель генератора импульсов напряжения интегрируется системным методом первой степени, представленным алгоритмом 2.7. Математические модели и методы анализа эффективно использованы для расчета генераторов наносекундных импульсов напряжения.

Процесс разряда в генераторе с $n = 10$ каскадами представлен на рис. 6.7. Здесь верхние индексы переменных указывают номера соответствующих каскадов. Анализ графиков позволяет заключить, что с ростом номера каскада уменьшается время коммутации для искровых коммутаторов ступеней. С увеличением количества каскадов уменьшается время фронта импульса и уровень его колебаний.

Предложенные методы и разработанное на их основе программное обеспечение позволяют повысить производительность работы специалистов по разработке, исследованию и улучшению реальных

процессов в моделируемых генераторах.

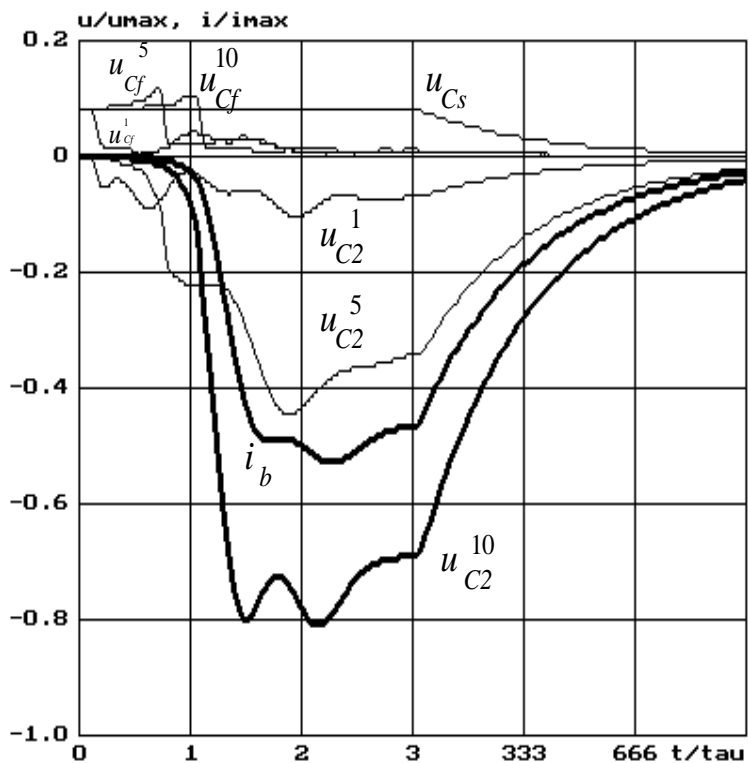


Рис. 6.7. Процесс разряда в десятикаскадном генераторе

Использование многокаскадных генераторов Маркса позволяет формировать импульсы напряжения кило- и мегавольтного диапазона с длительностью фронта менее 10 наносекунд.

Контрольные вопросы

1. Каким уравнением моделируется активное сопротивление?

2. Запишите модель индуктивности.
3. Каким уравнением моделируется емкость?
4. Как формируются импульсы тока большой длительности с коротким фронтом?
5. Какое преимущество параллельной работы импульсных источников питания для формирования импульсов тока?
6. Представьте расчетную схему для формирования импульсов тока с двумя импульсными источниками питания.
7. Как получены уравнения для исследования переходных процессов в схеме формирования импульсов тока с двумя импульсными источниками питания?
8. Запишите математическую модель для схемы формирования импульсов тока с двумя импульсными источниками питания.
9. Преобразуйте математическую модель для схемы формирования импульсов тока с двумя импульсными источниками к виду Коши.
10. Как выполняется анализ процессов в генераторе импульсов тока?
11. Запишите формулы анализа процессов в генераторе импульсов тока.
12. Какое преимущество матричного метода решения систем дифференциальных уравнений перед методом Рунге – Кутты?
13. Сформулируйте задачу синтеза параметров для генератора импульсов тока.
14. Какие используются критерии качества в задаче синтеза параметров для генератора импульсов тока?
15. Объясните результаты синтеза генератора импульсов тока при использовании различных критериев оптимальности.
16. Какое преимущество использования двух параллельных источников питания вместо одного?
17. Опишите принцип действия генератора импульсов высокого напряжения.
18. Представьте общую схему заряда генератора Маркса.
19. Представьте общую схему разряда генератора Маркса.

20. Приведите разновидности и характеристики генераторов Маркса.
21. Какие вы знаете особенности конструкций генераторов Маркса?
22. Как учитывается при моделировании генератора Маркса множество паразитных элементов?
23. Что представляет собой одна ступень генератора Маркса с учетом паразитных элементов?
24. Какие существуют модели искрового промежутка, основанные на модели искры в сжатом газе?
25. Запишите модель искрового промежутка, основанную на моделях искры в сжатом газе.
26. По каким законам составляется модель многокаскадного генератора Маркса?
27. Какой метод применяется для анализа процессов в многокаскадном генераторе Маркса?
28. Какие выводы можно сделать на основании анализа процессов в многокаскадном генераторе Маркса?
29. Каким образом можно повысить величину напряжения импульса в нагрузке и уменьшить длительность фронта импульса?

7. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Освоение теории и практики методов многомерной безусловной минимизации требует знания многих понятий и формул математического анализа и линейной алгебры. В этом разделе обобщается основной справочный материал, необходимый для изучения методов многомерной оптимизации. Приводятся правила дифференцирования функций. Рассматриваются элементы векторной алгебры. Представляются действия с матрицами. Приводится формула Шермана – Моррисона для обращения матрицы. Рассматривается дифференцирование функций многих переменных. Приводится формула Тейлора для функции многих переменных. Рассматриваются квадратичные формы, формулируется критерий Сильвестра – Якоби.

7.1. Правила дифференцирования

При аналитическом нахождении точки минимума функции необходимо использовать формулы дифференциального исчисления функций одной переменной. Ниже приведены основные правила дифференцирования функций, а также таблица производных основных элементарных функций.

Производная постоянной величины $C' = 0$.

Производная суммы $(u + v)' = u' + v'$.

Производная разности $(u - v)' = u' - v'$.

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(Cy)' = Cy'.$$

Производная произведения $(uv)' = u'v + uv'$.

Производная частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'_u \cdot u'_x$.

Производная обратной функции

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Производная функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t); \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производные основных элементарных функций даны в табл. 7.1. В этой таблице a – некоторый числовой постоянный параметр. Структура таблицы позволяет установить аналогию и отличие между производными тригонометрических и гиперболических функций, а также производными обратных тригонометрических и обратных гиперболических функций. Здесь обозначены гиперболические и обратные гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Таблица 7.1 – Производные элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^a	ax^{a-1}	a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{Arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Логарифмическое дифференцирование:

$$1) \ y = u^v, \ \ln y = v \ln u, \ (\ln y)' = \frac{1}{y} y', \ y' = y(v \ln u)',$$

$$y' = y \left(v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \right);$$

$$2) \quad y = \frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n},$$

$$\ln y = \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n - \ln v_1 - \ln v_2 - \dots - \ln v_n,$$

$$y' = y \left(\frac{1}{u_1} u_1' + \frac{1}{u_2} u_2' + \dots + \frac{1}{u_n} u_n' - \frac{1}{v_1} v_1' - \frac{1}{v_2} v_2' - \dots - \frac{1}{v_n} v_n' \right).$$

7.2. Элементы векторной алгебры

Вектором называется упорядоченное множество действительных чисел. Например, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, где a_1, a_2, \dots, a_n действительные числа, есть вектор, состоящий из n элементов. Количество элементов n называется *размером* вектора. Числа a_1, a_2, \dots, a_n называются *проекциями* вектора.

Два вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называются *равными*, если равны все их соответствующие проекции: $a_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$. В этом случае пишут $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Если $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, то определены операции сложения и вычитания векторов:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

Для любой скалярной величины α определена операция умножения вектора на скаляр $\alpha \mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$.

Вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ называется нулевым вектором.

Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

В этом случае хотя бы один из этих векторов можно представить *линейной комбинацией* остальных векторов, например, при $\alpha_m \neq 0$

$$\mathbf{a}_m = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_{m-1} \mathbf{a}_{m-1}.$$

В противном случае система векторов является *линейно независимой*.

Множество всех n -мерных векторов называется n -мерным *векторным пространством* и обозначается R^n . Говорят, что векторное пространство R^n *натянута* на некоторую систему векторов, если каждый вектор из R^n можно представить в виде линейной комбинации этой системы. *Базис* векторного пространства R^n определяется как система n линейно независимых векторов. Элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства R^n также называется *точкой*. В этом случае x_1, x_2, \dots, x_n называются *координатами* точки.

Скалярное произведение двух векторов есть число, равное

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Евклидова *норма* вектора \mathbf{a} определяется равенством

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

и соответствует длине вектора. Ее также обозначают $|\mathbf{a}|$ и называют *модулем* вектора.

Если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} рассматриваются как направленные отрезки, между которыми угол θ , то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \theta.$$

Векторы называются *ортогональными*, если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. При этом пишут $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Для векторов справедливо неравенство Коши – Буняковского – Шварца

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|.$$

Здесь равенство возможно только при $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$.

Евклидова норма также называется l_2 -нормой и обозначается $\|\mathbf{a}\|_2$. В векторном анализе также применяются l_1 -норма и l_∞ -норма:

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|, \quad \|\mathbf{a}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Все представленные нормы векторов являются частными случаями l_p -нормы

$$\|\mathbf{a}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

Любая норма обладает свойствами:

- 1) $\|\mathbf{a}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{a} \in R^n, \|\mathbf{a}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
- 2) $\|\alpha \mathbf{a}\| = |\alpha| \|\mathbf{a}\| \quad \forall \mathbf{a} \in R^n, \forall \alpha \in R$;
- 3) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^n$ – неравенство треугольника.

Две нормы $\|\cdot\|_r$ и $\|\cdot\|_s$ называются *эквивалентными*, если существуют $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha \|\mathbf{a}\|_r \leq \|\mathbf{a}\|_s \leq \beta \|\mathbf{a}\|_r \quad \forall \mathbf{a} \in R^n.$$

В частности,

$$\|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{a}\|_2, \quad \|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{a}\|_\infty,$$

$$\|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_1 \leq n \|\mathbf{a}\|_\infty, \quad \|\mathbf{a}\|_\infty \leq \|\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{a}\|_1.$$

Таким образом, нормы $\|\mathbf{a}\|_1$, $\|\mathbf{a}\|_2$ и $\|\mathbf{a}\|_\infty$ являются эквивалентными.

Расстоянием между двумя точками $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ пространства R^n называется евклидова норма разностей их координат

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

которая обобщает понятие расстояния из аналитической геометрии.

Расстояние обладает свойствами:

- 1) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq 0$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- 2) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$;
- 3) $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$ – неравенство треугольника.

Последовательность векторов $\{\mathbf{x}_k\}$ называется *сходящейся* к вектору \mathbf{x}^* , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| = 0.$$

Понятие сходимости последовательности векторов положено в основу исследования скорости сходимости методов многомерной оптимизации.

7.3. Матрицы и действия с ними

Матрица размера $m \times n$ представляет собой прямоугольную таблицу действительных чисел, состоящую из m строк и n столбцов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – действительные числа, называемые *элементами* матрицы. Элементы a_{ij} при $i = j$ называются *диагональными* элементами, если же $i \neq j$, то a_{ij} называются *внедиагональными* элементами. Диагональные элементы составляют *главную диагональ* матрицы.

Элементы каждого столбца матрицы составляют вектор, который называется *вектор-столбцом*. Аналогично каждая строка матрицы определяет *вектор-строку*. Вектор можно рассматривать как матрицу специального вида, которая содержит либо только одну строку, либо лишь один столбец. Матрица с одинаковым количеством строк и столбцов называется *квадратной матрицей*.

Если заменить строки матрицы \mathbf{A} столбцами, то получится *транспонированная* к \mathbf{A} матрица, которая обозначается \mathbf{A}^T . В частности, если \mathbf{a} – вектор-строка, то \mathbf{a}^T – вектор-столбец.

Квадратная матрица \mathbf{A} называется *симметрической*, если для ее элементов $a_{ij} = a_{ji}$, то есть симметричные относительно главной диагонали элементы одинаковы. Для симметрической матрицы $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы совпадают.

Квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а внедиагональные элементы – нулю, называется *единичной* матрицей и обозначается через \mathbf{E} . Матрица, которая содержит только равные нулю элементы, называется *нулевой* матрицей и обозначается \mathbf{O} .

Рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк или столбцов.

Сумма или *разность* двух матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} одинакового размера, есть матрица того же размера \mathbf{C} , элементы которой вычисляются по формуле $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. При этом пишут $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$.

Скалярное произведение двух вектор-столбцов \mathbf{a} и \mathbf{b} представим в виде $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. При этом $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$. Условие орто-

гональности векторов $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ имеет вид $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$.

Неравенство Коши – Буняковского – Шварца можно представить в виде $|\mathbf{a}^T \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$.

Произведение \mathbf{AB} двух матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} определено тогда и только тогда, когда размеры матриц согласованы, то есть количество столбцов матрицы \mathbf{A} равно количеству строк матрицы \mathbf{B} . Если \mathbf{A} – матрица размера $m \times n$, а \mathbf{B} – матрица размера $n \times p$, то произведение этих матриц $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ представляет собой матрицу размера $m \times p$. Элемент матрицы \mathbf{C} , расположенный на пересечении i -ой строки и j -го столбца, определяется по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Это означает, что необходимо найти скалярное произведение i -ой строки матрицы \mathbf{A} и j -го столбца матрицы \mathbf{B} , то есть произведение матриц выполняется по правилу «строка на столбец». В частности, всегда можно перемножать квадратные матрицы одинакового размера. В общем случае $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Произведением матрицы \mathbf{A} на некоторое число α называется матрица $\alpha \mathbf{A}$ с элементами αa_{ij} .

Определителем квадратной матрицы \mathbf{A} называется число, обозначаемое $\det \mathbf{A}$ и получаемое с помощью арифметических операций над элементами \mathbf{A} . Если \mathbf{A} – матрица размера 2×2 , то

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Если \mathbf{A} – матрица размера $n \times n$, то

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1},$$

где M_{i1} называется *минором* элемента a_{i1} и представляет собой определитель подматрицы матрицы \mathbf{A} , полученной путем исключения строки i и столбца 1.

Матрица называется *вырожденной* или *особенной*, если ее определитель равен нулю. Если же определитель не равен нулю, то соответствующая ему матрица называется *невырожденной* или *неособенной*. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется.

Матрица, обратная к невырожденной квадратной матрице \mathbf{A} , обозначается как \mathbf{A}^{-1} и представляет собой невырожденную квадратную матрицу, обладающую свойством $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Определитель обратной матрицы $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$.

Операции над матрицами имеют свойства:

- 1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
- 2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$;
- 3) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$;
- 4) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$;
- 5) $\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{A}$, $\mathbf{E}\mathbf{A} = \mathbf{A}$;
- 6) $\alpha(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$;
- 7) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$;
- 8) $(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})$;
- 9) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
- 10) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$;
- 11) $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$;
- 12) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Если для матрицы $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ и ненулевого вектор-столбца $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ выполняется равенство $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, то число λ называется собственным значением, а вектор \mathbf{x} называется собственным вектором матрицы \mathbf{A} .

В соответствии с l_p -нормой вектора вводится l_p -норма матрицы

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p,$$

о которой говорят, что она индуцирована векторной l_p -нормой. В частности, определены максимальная столбцовая норма, максимальная строчная норма и спектральная норма:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|\mathbf{A}\|_2 = (\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}))^{1/2}.$$

Спектральная норма матрицы \mathbf{A} равна квадратному корню из максимального собственного значения матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Последовательность матриц $\{\mathbf{A}_k\}$ называется сходящейся к матрице \mathbf{A} , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\| = 0.$$

Пусть \mathbf{A} – невырожденная квадратная матрица порядка n , а \mathbf{u} и \mathbf{v} – произвольные n -мерные вектор-столбцы. Если $1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \neq 0$, то матрица $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T \neq 0$ невырожденная и имеет обратную матрицу

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}.$$

Это равенство называется *формулой Шермана – Моррисона*.

7.4. Дифференцирование функций многих переменных

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ векторного аргумента $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ задана в некоторой области $D \subset R^n$ и пусть \mathbf{x}_0 – некоторая точка этой

области. Функция $f(\mathbf{x})$ называется *непрерывной* в точке \mathbf{x}_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ следует неравенство $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ векторного аргумента $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ задана в некоторой области $D \subset R^n$ и пусть \mathbf{x}_0 – произвольная точка этой области. Придадим переменной x_i приращение δ такое, чтобы было $\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{e}_i \in D$, где $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ – орт оси Ox_i , представляющий собой вектор с i -той единичной проекцией и остальными нулевыми проекциями. Вычислим разность $\Delta_i f = f(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)$ и составим отношение $\Delta_i f / \delta$. Если существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta_i f / \delta,$$

то он называется *частной производной* функции $f(\mathbf{x})$ по переменной x_i в точке \mathbf{x}_0 и обозначается $\partial f(\mathbf{x}_0) / \partial x_i$.

Итак, по определению

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{\delta}.$$

Частные производные вычисляются по обычным правилам и формулам дифференцирования, причем при вычислении $\partial f / \partial x_i$ дифференцирование ведется по переменной x_i , а остальные переменные считаются неизменными.

Частные производные функции двух переменных $f(x_1, x_2)$ геометрически представляют собой тангенсы углов наклона касательных к сечениям графика этой функции плоскостями $x_1 = C$ и $x_2 = C$.

Если для функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_0 существуют все частные производные, то она называется *дифференцируемой* в точке \mathbf{x}_0 .

Если функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке \mathbf{x}_0 , то она и непрерывна в этой точке.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ является дифференцируемой при всех $\mathbf{x} \in R^n$. Вектор-столбец частных производных функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_0 называется *градиентом* и обозначается

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n} \right)^T.$$

Символ «набла» ∇ служит для обозначения оператора градиента $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \dots, \partial/\partial x_n)^T$. Градиент определяет направление наиболее быстрого возрастания функции в данной точке.

Поскольку по определению градиента $\nabla x_i = \mathbf{e}_i$, то

$$\nabla \mathbf{x}^T = \nabla(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathbf{E}.$$

Если вектор-столбцы \mathbf{u} и \mathbf{v} зависят от \mathbf{x} , то по правилу производной произведения функций

$$\nabla(\mathbf{u}^T \mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{u}^T) \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v}^T) \mathbf{u}.$$

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ имеет частные производные $\partial f / \partial x_i$, $i = \overline{1, n}$. Предположим, что эти частные производные в свою очередь дифференцируемы по всем переменным. Тогда, дифференцируя $\partial f / \partial x_i$ по x_i , получим *частную производную второго порядка* функции $f(\mathbf{x})$ по переменной x_i . Она обозначается $\partial^2 f / \partial x_i^2$.

Дифференцируя $\partial f / \partial x_i$ по другой переменной x_j , получим *смешанную частную производную* второго порядка, которая обозначается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Теорема Шварца. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке \mathbf{x}_0 и в некоторой ее окрестности частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ является дважды дифференцируемой по всем переменным. Тогда для такой функции можно составить матрицу вторых частных производных, которая называется *матрицей Гессе*:

$$\nabla^2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы Шварца

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j.$$

Поэтому матрица Гессе является симметрической матрицей и для нее:

$$\nabla^2(\mathbf{x})^T = \nabla^2(\mathbf{x}).$$

7.5. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ скалярного действительного аргумента $x \in R$ в любой точке x_0 n раз дифференцируема. Тогда для нее спра-

ведлива формула Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + o(h^n),$$

где h – приращение аргумента; $o(h^n)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем h^n , называемая остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано.

Пусть теперь функция $f(\mathbf{x})$ векторного аргумента $\mathbf{x} \in R^n$ в любой точке дважды дифференцируема. Тогда для нее формула Тейлора

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(\|\mathbf{h}\|^2),$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ – векторное приращение аргумента. Эту формулу можно представить в векторном виде

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d} + \frac{1}{2!} \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{d} + o(\|\mathbf{d}\|^2),$$

где $\nabla f(\mathbf{x})$ и $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ – градиент и матрица Гессе функции $f(\mathbf{x})$ соответственно.

7.6. Квадратичные формы

Функция n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *квадратичной формой*, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Вводя обозначения для вектора переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ и квадратной матрицы \mathbf{A} с элементами a_{ij} квадратичную форму можно

представить в виде

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Без потери общности матрицу \mathbf{A} можно всегда предполагать симметрической. В противном случае \mathbf{A} следует заменить симметрической матрицей $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2$, значения квадратичной формы при этом не изменятся.

Симметрическая матрица \mathbf{A} называется *неотрицательно определенной*, если $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in R^n$. При этом пишут $\mathbf{A} \geq 0$.

Симметрическая матрица \mathbf{A} называется *положительно определенной*, если $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ для всех $\mathbf{x} \neq 0$. При этом пишут $\mathbf{A} > 0$.

Симметрическая матрица \mathbf{A} называется *неположительно определенной*, если $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in R^n$. При этом пишут $\mathbf{A} \leq 0$. Матрица \mathbf{A} *неположительно определенная* тогда и только тогда, когда $-\mathbf{A}$ есть неотрицательно определенная матрица.

Симметрическая матрица \mathbf{A} называется *отрицательно определенной*, если $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ для всех $\mathbf{x} \neq 0$. При этом пишут $\mathbf{A} < 0$. Матрица \mathbf{A} *отрицательно определенная* тогда и только тогда, когда $-\mathbf{A}$ — положительно определенная матрица.

Симметрическая матрица \mathbf{A} называется *неопределенной*, если квадратичная форма $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Для установления положительной определенности матрицы \mathbf{A} составим из ее элементов определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $\det \mathbf{A} = \Delta_n$. Определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}$ называются *главными диагональными минорами* матрицы \mathbf{A} .

Критерий Сильвестра – Якоби. Для того чтобы квадратная симметрическая матрица была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные диагональные миноры, включая и определитель матрицы, были положительными.

Таким образом, если для матрицы \mathbf{A} $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0$, то \mathbf{A} – положительно определенная матрица. Все диагональные элементы положительно определенной матрицы должны быть положительными.

Чтобы установить, что матрица является отрицательно определенной, следует умножить ее на -1 и проверить полученную матрицу на положительную определенность. Тогда из критерия Сильвестра – Якоби следует, что для того чтобы матрица была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки ее главных диагональных миноров, включая и определитель этой матрицы, чередовались, начиная со знака «-». То есть, если $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, то \mathbf{A} – отрицательно определенная матрица. Все диагональные элементы отрицательно определенной матрицы должны быть отрицательными.

При проверке матрицы на неотрицательную определенность достаточно проверить, что все ее диагональные элементы и все главные диагональные миноры, включая определитель матрицы, неотрицательны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аттетков А.В. Методы оптимизации : учебник для вузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин ; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.
2. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди ; пер. с англ. О.В. Шихеевой. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.
3. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И.В. Бейко, Б.Н. Бублик, П.Н. Зинько. – К. : Вища школа, 1983. – 512 с.
4. Веников В.А. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики) / В.А. Веников. – М. : Высшая школа, 1979. – 468 с.
5. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи / Н.Н. Воробьев. – 4-е изд., доп. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 142 с.
6. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт ; пер. с англ. В.Ю. Лебедева. – М. : Мир, 1985. – 512 с.
7. Губарев Г.Г. Оптимизация импульсных источников питания / Г.Г. Губарев, В.П. Северин // Электричество. –1983. – № 1. – С. 64–65.
8. Дмитришин Р.В. Оптимизация электронных схем на ЭВМ / Р.В. Дмитришин. – К. : Техника, 1980. – 402 с.
9. Дэннис Д. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Д. Дэннис, Р. Шнабель ; пер. с англ. О.П. Бурдакова. – М. : Мир, 1988. – 440 с.
10. Измаилов А.Ф. Численные методы оптимизации : учеб. пособ. / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
11. Карманов В.Г. Математическое программирование / В.Г. Карманов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 256 с.
12. Короп В.Ф. Принцип равномерного вклада и регулирование шагов покоординатного случайного поиска / В.Ф. Короп // Численные методы нелинейного программирования. – К. : Наук. думка. – 1976. –

С. 33–41.

13. Кремнев В.В. Методы умножения и трансформации импульсов в сильно-точной электронике / В.В. Кремнев, Г.А. Месяц. – Новосибирск, 1987. – 342 с.

14. Ланнэ А.А. Оптимальный синтез линейных электронных схем / А.А. Ланнэ. – М. : Связь, 1978. – 342 с.

15. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину ; пер. с фр. А.И. Штерна. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 488 с.

16. Полак Д. Численные методы оптимизации. Единый подход / Д. Полак ; пер. с англ. Ф.И. Ерешко. – М. : Мир, 1974. – 376 с.

17. Пантелеев А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособ. / А. В. Пантелеев, Т.А. Легова. – М. : Высш. шк., 2002. – 544 с.

18. Раскин Л.Г. Математическое программирование : учебно-метод. пособ. / Л.Г. Раскин. – Харьков : ПП «ГЕММА», 1986. – 68 с.

19. Ракитский Ю.В. Новые методы численного расчета переходных процессов в колебательных системах / Ю.В. Ракитский, Л.К. Кириллова, В.А. Зимницкий // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, вып. 7. – С. 62–68.

20. Ракитский Ю.В. Численные методы решения жестких систем / Ю.В. Ракитский, С.М. Устиинов, И.Г. Чернолуцкий. – М. : Наука, 1979. – 421 с.

21. Реклейтис Г. Оптимизация в технике : в 2 кн. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсел. Кн. 1 ; пер. с англ. В.Я. Алтаева, В.И. Моторина. – М. : Мир, 1986. – 349 с.

22. Северин В. П. Методы одномерного поиска : учебно-метод. пособ. по курсу «Методы оптимизации» / В. П. Северин. – Х. : НТУ «ХПИ», 2012. – 112 с.

23. Северин В. П. Исследование алгоритмов вычисления матричной экспоненты и интеграла матричной экспоненты / В. П. Северин // Вестник ХПИ «Техническая кибернетика». – 1992. – Вып. 2. – С. 43–48.

24. Струченков В.И. Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы : учеб. пособ. / В.И. Струченков. – М. : Экзамен, 2005. – 256 с.

25. Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации : учеб. пособ. / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – 2-е изд. – М. : ФИЗМАТ-ЛИТ, 2005. – 368 с.

26. Форсайт Д. Машинные методы математических вычислений / Д. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер ; пер. с англ. Х.Д. Икрамова. – М. : Мир, 1980. – 280 с.

27. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау ; пер. с англ. И.М. Быховской, Б.Т. Вавилова. – М. : Мир, 1975. – 536 с.

28. Fletcher R. Practical methods of optimization / R. Fletcher. – 2-d edition. – UK, Chichester : John Wiley & Sons Ltd, 2000. – 436 p.

29. Luenberger D. G. Linear and nonlinear programming / D.G. Luenberger, Y. Yinyu. – 3-d edition. – USA, New York : Springer, 2008. – 546 p.

30. Bazaraa M.S. Nonlinear programming : theory and algorithms / M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, C.M. Shetty. – 3-d edition. – USA, Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons Inc., 2006. – 853 p.

31. Sun W. Optimization theory and methods. Nonlinear programming / W. Sun, Y. X. Yuan. – USA, New York: Springer, 2006. – 687 p.

Навчальне видання

ДОМНІН Ігор Феліксович,
СЕВЕРИН Валерій Петрович,
НІКУЛІНА Олена Миколаївна

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ В РАДІОЕЛЕКТРОНІЦІ

Навчальний посібник
з курсу «Основи радіоелектроніки»

для студентів напрямку 6.040302 «Прикладна фізика»

Російською мовою

Роботу до видання рекомендував *О. І. Рогачов*
Редактор *О. С. Самініна*

План 2013 р., п. 73

Підп. до друку 26.12.2013 р. Формат 60×84 1/16. Папір офісний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 9,5. Наклад 100 пр., 1-й з-д 1-50.
Зам. № 90. Ціна договірна.

Видавець і виготовлювач
Видавничий центр НТУ «ХП»,
вул. Фрунзе, 21, м. Харків-2, 61002

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.