процессом термической обработки и при производстве проволоки и ленты из цветных и тугоплавких металлов.

Список литературы: 1. *Коврев, Г. С.* Электроконтактный нагрев при обработке цветных металлов [Текст] / Г.С. Коврев/ М.: Металлургия, 1975. -312 с. **2**. *Ляшенко, В. П.* Пристрій для регулювання величини нагріву рухомого дроту перед волочінням [Текст] / *Ляшенко В. П., Гусак В. І.* // Патент України на винахід № 16206. Бюл. № 4, 1997**. 3**. *Ляшенко, В. П.,* Задачі для рівняння теплопровідності у порошковій металургії [Текст] / *В. П. Ляшенко, В. А. Ванін* // Вісник НТУ «ХПІ» Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків, 2010. – Вип. 68. – С. 108–113. **4**. *Троицкий, О. А.* Электропластическое волочение и новые технологии создания облегченных проводов [Текст] / *О. А. Троицкий, В. И. Сташенко, В.Г Рыжков и др.*// «Вопросы атомной науки и техники» (ВАНТ). – Харьков, 2011. Вип. 4/2011 – С. 111 – 117. **5.** *Кобыльская, Е. Б.* Исследование влияния термической составляющей на свойства проволоки при электропластическом волочении [Текст] / *Е. Б. Кобыльская, В.П. Ляшенко, Т.А. Григорова и др.*// Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2011. – Вип. 4/2011 (69) частина 1. – С. 57-62. **6** *Лизоркин П. И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа [Текст] / *П. И. Лизоркин* – М.: Наука, 1981. – 216 с. **7.** *Мартыненко В. С.* Операционное исчисление [Текст] / *В.С. Мартыненко*/ – К.: Изд-во Киевского университета, 1968. – 197с.

Надійшла до редколегії 20.03.2013

УДК 681.3:946.9:004.942

Определение параметров управления движущегося сосредоточенного источника тепла/ В. П. Ляшенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2013. - № 1 (977). – С. 177-182. – Бібліогр.: 7 назв.

Запропонована математична модель температурного поля нескінченного циліндра, що розігрівається рухомим точковим внутрішнім джерелом тепла. Джерело тепла представлене із залученням дельта-функції Дірака. Отримано розв'язки спрощених задач, та визначені параметри керування температурним полем. Запропоновано структуру алгоритму розв'язку нелінійної задачі та блок-схему системи керування температурним полем на основі запропонованого алгоритму. Проведені чисельні експерименти та побудовано температурний розподіл для технологічного процесу термічної обробки вольфрамового дроту. На основі розв'язку нелінійної задачі для системи керування побудовано графік залежності сили струму нагрівання в залежності від часу.

Ключові слова: температурне поле, рухоме джерело тепла, дельта-функція Дірака, алгоритм, блок-схема системи керування.

Mathematical model of temperature field of an infinite cylinder, which is heated by a moving internal heat source offered. The heat source is represented using Dirac delta function. Analytical solutions of simplified problems are obtained. The control parameters are determined by the temperature field. The structure of the algorithm for solving the nonlinear problem and control system of temperature field proposed. Numerical experiments are conducted. The temperature distribution for the process of thermal treatment of tungsten wire is built. Graph of dependence of the strength of the current heating from time built.

Keywords: temperature field, moving heat source, delta function, algorithm, control system.

УДК 532.2,517.2

Н. В. НОГИН, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУУ «КПИ», Киев

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПО НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Получено решение специальной краевой задачи для уравнений Навье-Стокса нестационарного ламинарного движения жидкости в круглой цилиндрической трубе в случае периодического закона изменения давления. Таким образом, создана возможность использования быстросходящихся степенных рядов для расчёта компонент поля скорости. Показана идентичность решений специальной задачи гидродинамики с граничной задачей теплопроводности с использованием интегрального преобразования Ханкеля.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, ламинарное движение, функции Бесселя, интегральное преобразование Ханкеля.

Введение. Задача о распределении скоростей при нестационарном ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости по круглой цилиндрической трубе рассматривалась в ряде работ [1-7], но полученные здесь чисто теоретические результаты не были доведены до расчетных формул. В настоящей работе указан способ аппроксимации функций Бесселя от комплексного аргумента, по сути, быстросходящимися степенными рядами, получен пример конкретного поля скоростей.

В работе также на основе [8-11] проведено решение близких задач с использованием специального интегрального преобразования, в замкнутом виде.

Анализ литературных данных и постановка проблемы. Задача о нестационарном ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости по бесконечной цилиндрической трубе давно привлекали внимание крупных учёных, простейших случай рассмотрен еще Гельмгольц [1].В общей постановке для произвольных начальных условий и различных, в том числе периодических законов перепада давления задачи рассматривались в работах [2-7]. В частности, решение задачи о приведении в движение покоящейся в круглой трубе вязкой жидкости под действием внезапно приложенного кусочно-постоянного перепада давления получено в [4], g(t)=const, с граничным условием $w\big|_{r=R}=0$, и начальным условием $w\big|_{t=0}=0$, здесь получена функция распределения скоростей в виде ряда от функций Бесселя:

$$w\,(r,t) = \frac{R^2}{4\mu l}[1-\frac{r^2}{R^2}-8\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-\nu\lambda_n^2 t}{R^2}}\frac{J_0(\lambda_n\frac{r}{R})}{\lambda_n^2 J_1(\lambda_n)}] \quad ,$$

где λ_n – корни уравнения $J_0(\lambda_n)=0$.

Однако, указанные работы имеют чисто теоретическое значение.

Цель и задание исследования. Целью данного исследования является :

1) получение простых расчётных формул поля скоростей для построения эпюр с любой заданной точностью;

2) в теоретическом плане применение специального интегрального преобразования с полной идентичностью приводящего к решению указанного трансцендентного уравнения.

Основная часть. В настоящей работе приводится также решение с использованием интегрального преобразования Ханкеля [8-11]. Для составления уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости в ее простейшей ньютоновской модели, получена система уравнений в частных производных в скалярной форме вида [1-5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 w \end{cases} , \tag{1}$$

где $\nabla^2 V$ – вектор скорости с проекциями $\{\nabla^2 u,\nabla^2 v,\nabla^2 w\}$, γ-плотность объемных сил, $\overline{grad}$ P-давление.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2}$$

В случае ламинарного движения по цилиндрической трубе положим в (1)

$$u = v = 0,\ F_x=F_y=F_z=0$$

Далее с учетом неразрывности давления $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=0$, причем $\frac{\partial P}{\partial z}$ – является только функцией времени, полагаем

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -g(t).$$

Таким образом, выражая, также оператор Лапласа в цилиндрических координатах, приходим к краевой задаче вида:

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{\gamma}g(t)=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} & (3)\\ w\big|_{r=R}=0 & (4)\\ w\big|_{t=0}=w_0(r) & (5) \end{cases}$$

Рассмотрим, далее случай, когда перепад давления в трубе подчиняется гармоническому закону

$$g(t)=\gamma N\cos\omega t$$

Тогда решение граничной задачи находим в виде суперпозиции[1-4, 7] :

$$W(r,t)=W_1(r,t)+\frac{N}{\omega}\sin\omega t \qquad (6)$$

Относительно $W_1(r,t)$ приходим к уравнению теплопроводности вида:

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial w_1}{\partial t}=\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} \qquad (7)$$

с граничным условием вида

$$w_1(r,t)\big|_{r=R}=-\frac{N}{\omega}\sin\omega t \qquad (8)$$

Аналогично методу Фурье решение граничной задачи (7)-(8) находим в виде

$$w_1 = A(r)e^{-i\lambda\tau} \qquad (9)$$

где λ – неопределенная «константа Фурье», $\tau=\nu t$. Для определения «амплитуды» A(r) получим однородное дифференциальное уравнение Бесселя вида

$$A''(r)+\frac{1}{r}A'(r)+i\lambda A(r)=0 \qquad (10)$$

Его частное решение, ограниченное на оси трубы, имеет вид:

$$A(r)=J_0(r\sqrt{\lambda i}) \qquad (11)$$

где $J_0(r\sqrt{\lambda i})$– функция Бесселя нулевого порядка от комплексного аргумента.

Переходя далее к безразмерной координате $\rho=\frac{r}{R}$, $\rho\in[0,1)$, учитывая, что $J_0(r\sqrt{\lambda i})$ является комплексной парой быстросходящихся степенных рядов с областью сходимости $\rho\in[0,1)$, запишем указанное частное решение в виде:

$$\phi(\rho,\tau)=R_e\left\{(B-iC)(1-\frac{\rho\theta^4}{64}-i\frac{\rho^2}{4})(\cos\lambda\tau-i\sin\lambda\tau)\right\} \qquad (12)$$

где B,C – неопределённые коэффициенты.

Выделяя здесь действительную часть, находим

$$\phi(\rho,\tau)=B[(1-\frac{\rho^2}{64})\cos\lambda\tau-\frac{\rho^2}{4}\sin\lambda\tau]-C[\frac{\rho^2}{4}\cos\lambda\tau+(1-\frac{\rho^2}{64})\sin\lambda\tau] \qquad (13)$$

Далее при p = 1, подставив (13) в граничное условие вида (8), находим

$$\varphi(1,\tau)=-\frac{N}{\omega}\sin\frac{\omega}{\nu}\tau=B[\frac{63}{64}\cos\lambda\tau-\frac{1}{4}\sin\lambda\tau]-C[\frac{1}{4}\cos\lambda\tau+\frac{63}{64}\sin\lambda\tau] \qquad (14)$$

Приравнивая коэффициенты при линейно-независимых функциях $\cos\lambda\tau$, $\sin\lambda\tau$ получим систему двух линейных алгебраических уравнений для определения постоянных B,C. Окончательно:

$$\lambda=\frac{\omega}{\nu}\ ,\quad \phi(1,\tau)=0,001\sin\lambda\tau-0,0038\cos\lambda\tau \qquad (15)$$

Возвращаясь к переменным $t=\frac{\tau}{\nu}$, r=pR, подставляя полученное выражение (15) в граничное условие (13), окончательно находим функцию распределения скоростей в виде:

$$W(r,t)=\frac{N}{\omega}[(1+0,00025\frac{\omega r^2}{\nu R^2})\sin\omega t-0,0038(1-\frac{\omega^2 r^4}{64\nu^2 R^4})\cos\omega t] \tag{16}$$

Теперь вычисление эпюр скоростей в различные моменты времени получить просто. Наконец, для получения эпюр касательных напряжений находим частную производную вида

$$\frac{\partial w}{\partial r}=1,0005\frac{Nr}{\nu R^2}\sin\omega t+0,00024\frac{\omega r^3}{\nu^2 R^4}\cos\omega\,\mathrm{t} \tag{17}$$

Необходимо отметить, что при «фиксированном времени» полученное решение совпадает с известным решением [4,6,7] в случае прямолинейно-параллельного осесимметричного установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости при постоянном коэффициенте вязкости и при отсутствии массовых сил в неподвижной цилиндрической трубе радиуса R:

$$W=\frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}(r^2-R^2),$$

Касательное напряжение получено, как $O(r^3)$, в отличие от известного линейного закона

$$\tau_3=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial z}r$$

Отметим также, что решение задачи о движении вязкой жидкости в неограниченном цилиндре, если $\frac{\partial P}{\partial z}$= const, r=1 сводится к решению граничной задачи для уравнения теплопроводности вида:

$$\begin{cases}\frac{1}{\nu}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\\ u\big|_{r=1}=\omega V_0,\ t\rangle 0\\ u\big|_{t=0}=0\end{cases} \tag{17}$$

Для ее решения можно применить конечное интегральное преобразование Ханкеля [4] вида

$$\tilde{u}=\int_0^1 rJ_0(pr)u(r)dr \tag{18}$$

где p – положительный корень трансцендентного уравнения:

$$J_0(p)=0 \tag{19}$$

Учитывая равенство

$$-\int_0^1 r\,J_0(pr)(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r})dr=p^2\tilde{u}+p\omega U_0 J_0'(p) \tag{20}$$

Приходим в «классе изображений» к простой задаче Коши для линейного диференциального уравнения первого порядка вида

$$\begin{cases}\frac{d\tilde{u}}{dt}=-\nu[\omega pU_0 J_0'(p)+p^2 u']\\ \tilde{u}\big|_{t=0}\end{cases} \tag{21}$$

решение которой, очевидно, имеет вид

$$\tilde{u}(p,t)=\frac{\nu\omega U_0}{p}J_0'(p)(e^{-\nu p^2 t}-1) \tag{22}$$

Выводы.

1. Решение сложной задачи гидродинамики о распределении скоростей вязкой несжимаемой жидкости доведено до удобных простых формул для построения соответствующих эпюр, вычисления касательных напряжений энергии.

2. Полученные во второй части работы теоретические результаты позволяют применять известные результаты теории конечных интегральных преобразований к решению специальных задач гидромеханики.

Список литературы: **1.** *Helmholz, H.* Über electrische Grenzschichten. Annalen der Physik und Chemie [Text] / *H. Helmholz* // -1879.- P.337-383. **2.** *Лойцянский, Л. Г.* Механика жидкости и газа [Текст] / *Л. Г. Лойцянский* // - М.- Наука- 1970. **3.** *Громека, И. С.* К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках [Текст] / *И. С. Громека* // Собр. Сочинений АН СССР – 1952. С. 149-171. **4.** *Слезкин, Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости [Текст] / *Н. А. Слезкин* //- М.: Гостехиздат-1955. **5.** *Ламб, Г.* Гидродинамика [Текст] / *Г. Ламб* //– М.:Гостехиздат-1947. **6.** *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды [Текст] / *Л. И. Седов* // – М.: Наука,1973, т.1,2. **7.** *Лямбоси, П.* Вынужденные колебания несжимаемой вязкой жидкости в жесткой горизонтальной трубе. Русский перевод в сб. «Механика» [Текст] / *П. Лямбоси* //-1953-вып.3, ИЛ, С. 67-77. **8.** *Watson, G. N.* Bessels Functions [Text] / *G. N. Watson* // Cambridge -1944. **9.** *Грей, Э.* Функции Бесселя и их приложения в физике и механике [Текст] / *Э. Грей, Г. Метьюз* //- ИЛ,1949. **10.** *Трантер, К. ДЖ.* Интегральные преобразования в математической физике [Текст] / *К. ДЖ. Трантер* // М.-ГИТТЛ- 1956. **11.** *Ногін, М. В.* Нестаціонарна теплопровідність необмеженого циліндра при симетричному нагріві [Текст] / *М. В. Ногін* // -К.- КНУ ім.Т.Г.Шевченка, 2011, С.125-126.

Надійшла до редколегії 20.03.2013

УДК 532.2,517.2

Периодическое движение вязкой несжимаемой жидкости по неограниченной цилиндрической трубе/ Н. В. Ногин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2013. - № 1 (977). – С. 182-186. – Бібліогр.:11 назв.

Одержаний розв'язок спеціальної крайової задачі для рівняння Нав'є-Стокса нестаціонарного ламінарного руху рідини в круглій циліндричній трубі у випадку періодичного закону зміни тиску.Таким чином, створена можливість використання швидкозбіжних степеневих рядів для розрахунку компонент поля швидкості. Показана ідентичність розв'язків спеціальної задачі гідродинаміки з граничною задачею теплопровідності з застосуванням інтегрального перетворення Ханкеля.

Ключові слова: в'язка нестислива рідина, ламінарний рух, функції Бесселя, інтегральне перетворення Ханкеля.

Received a special solution of the boundary value problem for the Navier-Stokes unsteady laminar flow in a circular cylindrical tube in the case of the periodic law of pressure. Thus, a possibility of rapidly converging power series to calculate the components of the velocity field. The identity of the special problems of hydrodynamics with boundary heat conduction problem by using the integral Hankel transform.

Keywords: viscous incompressible fluid, laminar flow, Bessel functions, integral Hankel transform.

УДК 669.15-198:669.168:669.27

О. А. ГЛОТКА, канд. техн. наук, доцент, ЗНТУ, Запоріжжя,Україна

АНАЛІЗ СТРУКТУРНО-ФАЗОВОГО СТАНУ ВАЖКОТОПКОГО ВОЛЬФРАМ-НІКЕЛЬ-ЗАЛІЗНОГО БРУХТУ

Проведений аналіз структурно-фазового стану важкотопкого брухту системи «вольфрам-нікель-залізо» після довготривалого відпалення. Встановлено природу та проаналізовано склад вкраплень. Запропоновано рекомендації до подальшого використання брухту.

Ключові слова: структурно-фазовий стан, важкотопкий брухт, неметалеві вкраплення, рентгеноспектральні дослідження.

Вступ. Пошук нових джерел постачання легувальних елементів є одним з основних завдань сьогодення. Проте історично склалося, що Україна не має значної кількості руд кольорових металів, а попит на спеціальні сталі та стопи суттєво зростає. Водночас на металургійних підприємствах накопичені металеві відходи, що містять значну кількість висококоштовних елементів і можуть бути використані під час повторного перероблення. Одним із таких матеріалів є важкотопкий брухт системи «вольфрам-нікель-залізо»,